Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 64–71

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ДВУМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Изучается задача Дирихле для анизотропной термоупругой среды. Здесь, по определению, на границе заданы вектор перемещений и температура. Краевая задача приведена к системе интегральных уравнений. Эта система имеет слаборегулярные ядра в ограниченной области с ляпуновской границей и гельдеровыми граничными данными. Если граница области и граничные данные имеют худшие свойства гладкости, краевая задача сохраняет свойство разрешимости по Фредгольму.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, анизотропия, упругость.*

Введение. Интегральные уравнения редко применяются для решения стационарных задач термоупругости. Так, в статье [1] используется метод сингулярных уравнений. Не так давно автор [2] обнаружил, что при условии однозначной разрешимости краевую задачу для анизотропного материала можно легко привести к системе интегральных уравнений, если использовать простоту корней характеристического уравнения для анизотропного материала. Аналогичный подход применялся автором ранее при решении задач теории упругости. В этой работе этот подход применяется ко второй краевой задаче анизотропной термоупругости, т. е. когда на границе заданы температура и перемещения. Построена система интегральных уравнений. Если граница односвязной области достаточно гладкая, например, принадлежит классу Ляпунова, то это — система уравнений Фредгольма второго рода. Рассмотрен вопрос о гладкости напряжений.

1. Постановка задачи. Напомним необходимые сведения из термоупругости. Для определенности будем считать, что рассматривается обобщённое плоское состояние. В дальнейшем в основном используются обозначения [3]. Примем обобщённый закон Дюамеля—Неймана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= c_{11}\sigma_{11} + c_{12}\sigma_{22} + c_{16}\sigma_{12} + \beta_{11}u_3, \\ \varepsilon_{22} &= c_{12}\sigma_{11} + c_{22}\sigma_{22} + c_{26}\sigma_{12} + \beta_{22}u_3, \\ \varepsilon_{12} &= c_{16}\sigma_{11} + c_{26}\sigma_{22} + c_{66}\sigma_{12} - 2\beta_{66}u_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ε_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$ — деформации; u_1, u_2 — перемещения; u_3 — температура; σ_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$ — напряжения; c_{ij}, $i,j \in \{1,2,6\}$ — податливости; β_{ii}, $i \in \{1,2,6\}$ — коэффициенты, определяющие компоненты тензора деформации свободного от внешних сил тела при изменении температуры. Напомним, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Юрий Александрович Боган (д.ф.-м.н), ведущий научный сотрудник, отдел механики деформируемого твердого тела.

Определим из (1) напряжения и подставим их в уравнения равновесия. Получающаяся при этом система для произвольной анизотропии материала выглядит довольно громоздко, поэтому выпишем её для случая ортотропного материала:

$$\begin{aligned} &d_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + d_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (d_{12}+d_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \gamma_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \\ &(d_{12}+d_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + d_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + d_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \gamma_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Функция $u_3(x_1, x_2)$ — решение однородного уравнения

$$b_{11}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2b_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{22}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \tag{3}$$

в предположении, что (3) является эллиптическим: $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$. Ясно, что простой заменой независимых переменных его можно привести к уравнению Лапласа. Однако это упрощение не всегда допустимо.

Уравнения (2), (3) можно рассматривать как систему уравнений анизотропной теории упругости, куда в качестве правых частей входят производные от температуры. Её общее решение состоит из общего решения однородной системы (температура отсутствует) и частного решения, соответствующего присутствию температурного слагаемого.

Решение будем искать в следующем виде:

$$u_1 = \operatorname{Re} n_1 \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2), \quad u_2 = \operatorname{Re} n_2 \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2). \tag{4}$$

Здесь $\operatorname{Re}\varphi_3(x_1+\mu_3 x_2)$ — решение уравнения теплопроводности, где Re — действительная часть комплексного выражения. При подстановке (4) в (2) получим для n_1, n_2 алгебраическую систему

$$\begin{aligned} n_1(d_{11} + d_{66}\mu_3^2) + n_2\mu_3(d_{12}+d_{66}) = \gamma_1, \\ n_1\mu_3(d_{12}+d_{66}) + n_2(d_{66} + d_{22}\mu_3^2) = \gamma_2\mu_3 \end{aligned}$$

с определителем

$$\delta(\mu_3) = (d_{11} + d_{66}\mu_3^2)(d_{66} + d_{22}\mu_3^2) - (d_{12}+d_{66})^2\mu_3^2.$$

Если μ_3 таково, что $\delta(\mu_3) \neq 0$, то постоянные n_1, n_2 однозначно определяются из (4) и тем самым находится требуемое частное решение. Но уравнение $\delta(\mu) = 0$ имеет четыре комплексно сопряжённых корня μ_1, $\bar{\mu}_1$, μ_2, $\bar{\mu}_2$, и при совпадении μ_3 с одним из них $\delta(\mu_3)$ равно нулю. Следовательно, в данном случае этот подход непригоден. Тем не менее именно такой способ определения частного решения применяется в [2] без всяких оговорок.

Как представляется автору, в этом случае для определения частного решения необходимо построить фундаментальное решение системы уравнений теории упругости и свернуть его с правой частью. Так, для ортотропного материала матрица (v_{ij}) $(i,j \in \{1,2\}$, $v_{12} = v_{21})$ фундаментального решения с особенностью в точке $(0,0)$ имеет следующий вид:

$$v_{11}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\frac{a_{22}\mu_k^2 + a_{66}}{N(\mu_k)}\ln(x_1 + \mu_k x_2),$$

$$v_{12}(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}\frac{(a_{12}+a_{66})\mu_k}{N(\mu_k)}\ln(x_1+\mu_k x_2),$$

$$v_{22}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi^2}\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}\frac{a_{66}\mu_k^2+a_{11}}{N(\mu_k)}\ln(x_1+\mu_k x_2).$$

Здесь $N(\mu)=\Lambda(\mu)'$, где $\Lambda(\mu)=d_{22}d_{66}\mu^4+(d_{11}d_{22}-d_{12}^2-2d_{12}d_{66})\mu^2+d_{11}d_{66}$. При этом μ_1, μ_2 — корни уравнения $\Lambda(\mu)=0$ с положительной мнимой частью. Нетрудно видеть, что

$$N(\mu_1)=d_{22}d_{66}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_1)(\mu_1-\bar{\mu}_2),$$

$$N(\mu_2)=d_{22}d_{66}(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\bar{\mu}_1)(\mu_2-\bar{\mu}_2).$$

Положим

$$v_k(x_1,x_2)=\int\limits_Q\sum_{s=1}^{2}v_{ks}(x_1-t_1,x_2-t_2)f_s(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2,\quad k\in\{1,2\}.$$

Если при этом

$$f_1=\gamma_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\quad f_2=\gamma_2\frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

то функции $v_k(x_1,x_2)$ $(k\in\{1,2\})$ дают требуемое частное решение системы уравнений.

В реальной физической ситуации упругие постоянные и температурные параметры известны только с некоторой погрешностью, и поэтому при малом изменении параметров можно придти к неравенству $\delta(\mu_3)\neq 0$, справедливость которого будет предполагаться в дальнейшем. Отсюда для перемещений и температуры получим представление через аналитические функции (с точностью до жёсткого перемещения):

$$\begin{aligned}
u_1(x_1,x_2)&=\mathrm{Re}\,\{b_{11}\varphi_1(z_1)+b_{12}\varphi_2(z_2)+n_1\varphi_3'(z_3)\},\\
u_2(x_1,x_2)&=\mathrm{Re}\,\{b_{21}\varphi_1(z_1)+b_{22}\varphi_2(z_2)+n_2\varphi_3'(z_3)\},\\
u_3(x_1,x_2)&=\mathrm{Re}\,\varphi_3(z_3).
\end{aligned}$$

где $b_{1k}=c_{11}\mu_k^2+c_{12}-c_{16}\mu_k$, $b_{2k}=c_{12}\mu_k+c_{22}\mu_k^{-1}-c_{26}$, $k\in\{1,2\}$.

2. Задача Дирихле. Количество постановок краевых задач термоупругости, допускающих приведение к регулярным интегральным уравнениям, довольно велико. Рассмотрим одну из них, которую будем называть задачей Дирихле: будем предполагать, что на границе заданы вектор перемещений и температура. Пусть Q_i — односвязная ограниченная область на плоскости со спрямляемой жордановой границей ∂Q длины M класса $C^{1,\alpha}(0,M)$; s — длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки границы. В дальнейшем утверждение $\partial Q\in C^{l,\alpha}(\partial Q)$ означает, что функции $x_1(s)$, $x_2(s)\in C^{l,\alpha}(0,M)$. Под $C^{l,\alpha}(\Omega)$ в области или на отрезке Ω понимается, как обычно, банахово пространство функций, имеющих l непрерывных производных в области Ω, причём производная порядка l удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$. Через Q_e обозначим область, внешнюю по отношению к Q_i.

Для определения перемещений необходимо сначала решить задачу Дирихле для уравнения теплопроводности. Положим $t_k(s) = x_1(s) + \mu_k(s)$, $t_{k0} = x_1(s_0) + \mu_k(s_0)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Будем искать решение уравнения (3) в таком виде: $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2)$. Здесь $\mu_3 = \gamma + i\beta$ $(\beta > 0)$ определяется из уравнения $b_{11} + 2b_{12}\mu + b_{22}\mu^2 = 0$ и отлично от нуля, так как $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ ввиду эллиптичности уравнения (3).

Рассмотрим задачу Дирихле D_i:

$$u_3(x_1, x_2)\big|_{\partial Q} = g_3(s_0), \quad g_3(s_0) \in C^{0,\alpha}(\partial Q). \tag{5}$$

Представим $u_3(x_1, x_2)$ в виде действительной части интеграла типа Коши с вещественной плотностью $f_3(s)$:

$$u_3(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f(s)\, dt_3}{t_3 - z_3}.$$

Здесь и в дальнейшем $dt_j = (x_1'(s) + \mu_j x_2'(s))\, ds$, $j \in \{1, 2, 3\}$. В силу формулы Сохоцкого, когда точка $z \in Q$ стремится к точке $t_0 = x_1(s_0) + ix_2(s_0) \in \partial Q$ $(s_0 \in (\partial Q))$ изнутри области, имеем

$$\lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{g_j\, dt_j}{t_j - z_j} = g_j(s_0) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{g_j\, dt_j}{t_j - t_{j0}}.$$

Напомним, что формула Сохоцкого применима, если $g_j(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$. Тогда получим на границе интегральное уравнение для определения неизвестной плотности $f_3(s)$:

$$f_3(s_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_3(s)\, dt_3}{t_3 - t_{30}} = g_3(s_0), \quad g_3(s_0) \in C^{0,\alpha}(\partial Q). \tag{6}$$

То, что (7) является уравнением Фредгольма второго рода, следует из следующего рассуждения. Достаточно доказать, что ядро интегрального оператора в (7) имеет слабую особенность. Действительно, при помощи замены независимой переменной $x = x_1 + \gamma x_2$, $y = \beta x_2$, $\mu = \gamma + i\beta$ $(\beta > 0)$ получим, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f(s)\, dt_3}{t_3 - z_3} = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{f_3(s)\, dt}{t - z},$$

где $t = x(s) + iy(s)$, $z = x + iy$. Правая часть в этом соотношении, очевидно, совпадает с потенциалом двойного слоя для уравнения Лапласа. Действительно, при замене $\xi_1 = x_1 + \gamma x_2$, $\xi_2 = \beta x_2$ уравнение (3) обращается в уравнение Лапласа. Как показано в [1], его ядро имеет слабую особенность, если граница имеет нормальный вектор, удовлетворяющий условию Гельдера, т. е. если функции $x(s)$, $y(s)$, задающие форму границы, подчинены условию

$$|x_k'(s) - x_k'(s_0)| \leqslant c|s - s_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Напомним, что, как хорошо известно [1], конечным числом итераций ядро со слабой особенностью можно превратить в непрерывное, и поэтому к уравнению (7) можно применить теорию Фредгольма.

3. Интегральные уравнения. Рассмотрим следующую краевую задачу: определить поле перемещений и температуру по их значениям на границе:

$$u_k(x_1,x_2)|_{\partial Q}=g_k(s),\quad g_k(s)\in C^{0,\alpha}(\partial Q),\quad k\in\{1,2\},$$
$$u_3(x_1,x_2)|_{\partial Q}=g_3(s),\quad g_3(s)\in C^{1,\alpha}(\partial Q).$$

Назовём её для краткости задачей Дирихле для системы уравнений термоупругости. Тогда функции $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$ определяются из граничных условий

$$\operatorname{Re}\{b_{11}\varphi_1(z_1)+b_{12}\varphi_2(z_2)\}=g_1(s_0)-n_1\varphi_3'(t_3(s_0)),$$
$$\operatorname{Re}\{b_{21}\varphi_1(z_1)+b_{22}\varphi_2(z_2)\}=g_2(s_0)-n_2\varphi_3'(t_3(s_0)),$$
$$\operatorname{Re}\varphi_3(z_3)=g_3(s_0),\quad g_3(s)\in C^{1,\alpha}(\partial Q).$$

Положим $\chi_k(s)=g_k(s)-n_k\varphi'(t_3(s))$, $k\in\{1,2\}$. Тогда функции $\chi_k(s)\in$ $\in C^{0,\alpha}(\partial Q)$. Функция $f_3(s)$ — плотность интеграла типа Коши для определения температуры — определяется из уравнения (7). При этом поле перемещений должно иметь первые производные всюду в области Q, интегрируемые с квадратом в замкнутой области $\bar{Q}$, так как иначе краевая задача не будет иметь единственного решения. Будем искать аналитические функции $\varphi_k(z_k)$ в виде интегралов типа Коши:

$$\varphi_k(z_k)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{\omega_k(s)\,dt_k}{t_k-z_k},\quad k\in\{1,2,3\}.$$

Здесь $t_k=x_1(s)+\mu_k x_2(s)$, $k\in\{1,2\}$. Пусть $f_1(s)$, $f_2(s)$ — некоторые *вещественные* функции. Решим систему уравнений

$$b_{11}\omega_1+b_{12}\omega_2=f_1(s),\quad b_{21}\omega_1+b_{22}\omega_2=f_2(s) \tag{7}$$

методом Крамера и подставим её решение в (6). Тогда перемещения будут записаны в следующем виде:

$$u_1(x_1,x_2)=\operatorname{Re}\left\{\frac{b_{11}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\frac{\big(b_{22}f_1(s)-b_{12}f_2(s)\big)\,dt_1}{t_1-z_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\frac{\big(-b_{21}f_1(s)+b_{11}f_2(s)\big)\,dt_2}{t_2-z_2}\right\},$$

$$u_2(x_1,x_2)=\operatorname{Re}\left\{\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\frac{\big(b_{22}f_1(s)-b_{12}f_2(s)\big)\,dt_1}{t_1-z_1}+\right.$$

$$+\frac{b_{22}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\frac{\big(-b_{21}f_1(s)+b_{11}f_2(s)\big)\,dt_2}{t_2-z_2}\bigg\}.$$

Здесь $\delta = b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}$ — определитель системы (8). Нетрудно видеть, что он пропорционален разности $\mu_1-\mu_2$ и поэтому можно записать, что $\delta=\xi\cdot(\mu_1-\mu_2)$. При этом ξ зависит от симметрических функций, от корней характеристического уравнения, и, как следствие, от коэффициентов обобщённого закона Гука. В дальнейшем предполагается, что $\xi\neq 0$. В краевых задачах теории упругости он всегда отличен от нуля ввиду положительной определённости удельной потенциальной энергии деформации. Например, для ортотропного материала ($c_{16}=0, c_{26}=0$) составляет величину

$$\xi=(\gamma_1\gamma_2)^{-1}\Big\{(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}+c_{22}c_{66}\Big\}$$

и положителен, так как $c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0$, $c_{11}>0$, $c_{22}>0$, $c_{66}>0$. При этом для изотропного материала $\xi=(1+\nu)(3-\nu)E^{-2}$, где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Нетрудно видеть, что перемещения можно представить и так:

$$u_1(x_1,x_2)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{f_1(s)\,dt_1}{t_1-z_1}+$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\big(-b_{21}f_1(s)+b_{11}f_2(s)\big)\Big(\frac{dt_2}{t_2-z_2}-\frac{dt_1}{t_1-z_1}\Big),$$

$$u_2(x_1,x_2)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{f_2(s)\,dt_2}{t_2-z_2}+$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\big(b_{22}f_1(s)-b_{12}f_2(s)\big)\Big(\frac{dt_1}{t_1-z_1}-\frac{dt_2}{t_2-z_2}\Big).$$

Применяя формулу Сохоцкого, получим систему интегральных уравнений на границе

$$f_1(s_0)+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{f_1(s)\,dt_1}{t_1-t_{10}}+$$
$$+\mathrm{Re}\frac{b_{12}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\big(-b_{21}f_1(s)+b_{11}f_2(s)\big)\Big(\frac{dt_2}{t_2-t_{20}}-\frac{dt_1}{t_1-t_{10}}\Big)=\chi_1(s_0),$$

$$f_2(s_0)+\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial Q}\frac{f_2(s)\,dt_2}{t_2-t_{20}}+$$

$$+\operatorname{Re}\frac{b_{21}}{\pi i\delta}\int\limits_{\partial Q}\big(b_{22}f_1(s)-b_{12}f_2(s)\big)\Big(\frac{dt_1}{t_1-t_{10}}-\frac{dt_2}{t_2-t_{20}}\Big)=\chi_2(s_0).$$

Доказательство регулярности этой системы уравнений аналогично данному в работе [2] и потому здесь не приводится.

4. Гладкость решения. Решение задачи Дирихле имеет весьма ограниченную гладкость. Действительно, если граничные данные принадлежат только классу $C^{0,\alpha}(\partial Q)$, то функции

$$|\varphi_k'(z_k)|\leqslant C|\delta(\partial Q)|^{\alpha-1},\quad k\in\{1,2,3\},\tag{8}$$

где $\delta(\partial Q)$ — расстояние до границы области [4, стр. 69]. Эта оценка, в частности, показывает, что производные от перемещений интегрируемы с квадратом, только если $\alpha>1/2$. Поэтому решение задачи Дирихле будет единственным, только если $\alpha>1/2$. Справедливость предыдущей оценки легко проверить для решения краевой задачи в полуплоскости. Пусть $\varphi(z_3)$, например, — решение задачи теплопроводности в полуплоскости $\mathbb{R}_+{}^2=\{(x_1,x_2);x_2>0\}$. Тогда $\varphi_3(z_3)$ представима интегралом типа Коши:

$$\varphi_3(z_3)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(t)\,dt}{t-z_3},$$

где $\mu(t)\in C^{0,\alpha}$ на любом подынтервале вещественной оси. Положим для сокращения записи $z=z_3$, $z=x+iy$, т. е. $\mu=i$ (это не влияет на существо оценки). Тогда

$$y\varphi'(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\mu(t)}{(t-z)^2}\,dt.$$

При учёте неравенств $|z-x|=y\leqslant|t-z|$, $|t-x|\leqslant|t-z|$, справедливых при любом вещественном t, получим следующую цепочку неравенств:

$$|y\varphi'(z)|\leqslant A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,dt}{|t-z|^{2-\alpha}}\leqslant Ay^{1+\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{y}{t-z}\Big|^{-1-\alpha}\frac{dt}{|t-z|^2}\leqslant$$
$$\leqslant Ay^{1+\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{|t-z|^2}=\pi Ay^{\alpha},\quad A>0.$$

Аналогичное рассуждение применялось в статье [5]. При этом, как отмечалось в [2], для интегрируемости напряжений с квадратом необходимо предполагать, что показатель Гельдера $\alpha>1/2$. Для непрерывности напряжений на границе следует предполагать принадлежность граничных данных классам $g_k(s)\in C^{1,\alpha}(\partial Q)$, $k\in\{1,2\}$, $g_3(s)\in C^{2,\alpha}(\partial Q)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zhao Yu-Qui* On the Plane Orthotropic Stress Problem of Quasi-Static Thermoelasticity // *J. Elasticity*, 1997. — Vol. 46, No. 3. — P. 199–216.
2. *Боган Ю. А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2005. — № 4. — С. 17–26.
3. *Прусов И. А.* Термоупругие анизотропные пластинки. — Минск: БГУ, 1978. — 200 с.

4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 511 с.
5. *Бикчантаев И. А.* Краевая задача для однородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами // *Изв. вузов. Матем.*, 1975. — № 6. — С. 3–13.

Поступила в редакцию 18/VIII/2010;
в окончательном варианте — 22/IX/2010.

MSC: 74B05, 74E10

THE DIRICHLET PROBLEM IN THE 2D STATIONARY ANISOTROPIC THERMOELASTICITY

Yu. A. Bogan

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

In this article the Dirichlet problem for an anisotropic thermoelastic media is studied. It means, by definition, that a displacement vector and a stationary temperature are assigned at a boundary. This boundary value problem is reduced to a system of integral equations. Kernels of integral operators, entering into this system, are weakly regular in a bounded region with a Lyapunov boundary and Hölder continuous boundary data. This boundary value problem keeps up the property of Fredholm solvability if a region and boundary data have weaker properties of smoothness.

Key words: *integral equations, anisotropy, elasticity.*

Original article submitted 18/VIII/2010;
revision submitted 22/IX/2010.

Yurii A. Bogan, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Leading Research Scientist, Dept. of Deformable Solid Body.