УДК 539.3

ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННАЯ НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНОЙ

А. А. Шваб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

E-mail: schwab@ngs.ru

Рассматривается неклассическая краевая задача для тел с трещиной. Полагается, что на всей поверхности тела известны векторы нагрузки и перемещения. Местоположение и размеры трещины считаются неизвестными. Для нахождения трещины вводится интегральный критерий, позволяющий ответить на вопрос о наличии или отсутствии трещины в теле. Показано, что интегральный критерий можно использовать для ответа на вопрос о наличии в теле дефекта типа трещины и для определения плоскости трещины.

Ключевые слова: *трещина, неклассическая задача, упругость.*

В работе рассматривается задача, когда на поверхности упругого тела заданы одновременно векторы нагрузки $\boldsymbol{p}$ и перемещения $\boldsymbol{u}$. Подобные задачи возникают при исследовании состояния объектов по натурным замерам, например, в механике неоднородных сред при выявлении и описании свойств материала.

Аналогичная постановка актуальна в теории дефектоскопии. Задача дефектоскопии, во-первых, решает вопрос: имеется ли дефект в теле; и, во-вторых, при необходимости позволяет определить местоположение и идентифицировать дефект по экспериментальным данным. Под дефектами (неоднородностями) здесь понимаются полости, включения и трещины. Иногда этот класс задач называют задачами компьютерной томографии в статических полях. В данной работе рассматривается задача дефектоскопии для тел с трещиной. Введём необходимые определения и понятия.

Существенно переопределённой задачей теории упругости назовём задачу с существенно переопределёнными краевыми условиями. Данный класс задач может быть сформулирован для неоднородных сред при выявлении дефектов или для коэффициентных задач, когда оцениваются прочностные характеристики среды [1]. Введём следующее определение.

Определение. Существенно переопределёнными назовём условия, когда на всей поверхности тела заданы одновременно векторы смещения и нагрузки.

Для однородной изотропной упругой среды очевидно, что существенно переопределённые условия не могут быть произвольными, т. е. векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$ на поверхности тела функционально зависимы. Получим необходимые условия согласования и вытекающие из них следствия.

Рассмотрим тело объёма Ω с поверхностью $\partial\Omega$. Введём в рассмотрение

Альберт Александрович Шваб (д.ф.-м.н.), ведущий научный сотрудник, лаб. статической прочности.

векторы

$$\boldsymbol{A}(\xi)=\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)\,dS_x,\quad \boldsymbol{B}(\xi)=\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\,dS_x,$$

которые являются потенциалами простого и двойного слоёв теории упругости. Здесь $U^{\circ}(x,\xi)$ — тензор Кельвина—Сомильяны, $R^{\circ}(x,\xi)$ — силовой тензор влияния, $\boldsymbol{a}(x)$ и $\boldsymbol{b}(x)$ — плотности слоёв. Полагаем, что $\partial\Omega$ кусочно-гладкая по Ляпунову, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют условию Гёльдера. Пусть $\boldsymbol{u}(\xi)=\boldsymbol{A}(\xi)-\boldsymbol{B}(\xi)$. Запишем аналог формулы Сомильяны:

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\big[\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)-\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]dS_x=\begin{cases}\boldsymbol{u}^{+}(\xi),\xi\in\Omega^{+},\\ \boldsymbol{u}^{-}(\xi),\xi\in\Omega^{-}.\end{cases}\tag{1}$$

Здесь Ω^{+}, Ω^{-} — соответственно внутренняя и внешняя части области Ω.

Будем говорить, что плотности $\boldsymbol{a}(x)$ и $\boldsymbol{b}(x)$ согласованы между собой, если вектор $\boldsymbol{u}^{+}(\xi)\to\boldsymbol{b}(x)$ при $\xi\to x$, $x\in\partial\Omega$. Согласованность плотностей можно трактовать следующим образом. Если на однородное упругое тело действует усилие $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\big|_{\partial\Omega}$, то оно вызовет перемещения $\boldsymbol{u}(x)$, которые на $\partial\Omega$ совпадут с плотностью $\boldsymbol{b}(x)$, а в Ω — с вектором $\boldsymbol{u}^{+}(\xi)$. В силу единственности решения первой и второй основных задач теории упругости по плотности $\boldsymbol{a}(x)$ однозначно восстанавливается согласованная с ней $\boldsymbol{b}(x)$ (с точностью до жёсткого смещения), и обратно, по $\boldsymbol{b}(x)$ однозначно определяется $\boldsymbol{a}(x)$. В дальнейшем множество пар $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ согласованных плотностей будем обозначать через класс $H(\partial\Omega)$. Наряду с обозначением пары $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ будем использовать эквивалентное обозначение $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u})$. Для согласованных плотностей уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}(\xi)-\iint\limits_{\partial\Omega}\big[\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)-\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]\,dS_x=0,\quad \xi\in\partial\Omega,\tag{2}$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\big[\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)-\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]\,dS_x=0,\quad \xi\in\Omega^{-}.\tag{3}$$

Эти соотношения можно переписать в терминах $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\xi)-\iint\limits_{\partial\Omega}\big[\boldsymbol{p}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)-\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]\,dS_x=0,\quad \xi\in\partial\Omega,\tag{4}$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\big[\boldsymbol{p}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi)-\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]\,dS_x=0,\quad \xi\in\Omega^{-}.\tag{5}$$

Заметим, что (2) и (4) являются сингулярными интегральными соотношениями. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1 (О согласовании плотностей). *Плотности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ согласованы, т. е. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in H(\partial\Omega)$ $\big((\boldsymbol{p},\boldsymbol{u})\in H(\partial\Omega)\big)$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$\boldsymbol{\Delta}(\xi)=0,\quad \xi\in\Omega^{-},\tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{\Delta}(\xi) = \iint\limits_{\partial\Omega} [\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi) - \boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)]\, dS_x, \tag{7}$$

или, как следует из (2),

$$\boldsymbol{\Lambda}(\xi) = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}(\xi) - \iint\limits_{\partial\Omega} \big[\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{U}^{\circ}(x,\xi) - \boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{R}^{\circ}(x,\xi)\big]\, dS_x, \quad \boldsymbol{\Lambda}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость, очевидно, следует из формулы Сомильяны (7) при $\xi \in \Omega^-$ или из (8) при $\xi \in \partial\Omega$. Для доказательства достаточности воспользуемся аналогом формулы Сохоцкого—Племели:

$$\boldsymbol{u}^+(\xi_e) = \boldsymbol{A}(\xi_\circ) - \boldsymbol{B}(\xi_\circ) + 0{,}5\cdot\boldsymbol{b}(\xi_\circ), \quad \boldsymbol{u}^-(\xi_l) = \boldsymbol{A}(\xi_\circ) - \boldsymbol{B}(\xi_\circ) - 0{,}5\cdot\boldsymbol{b}(\xi_\circ), \tag{9}$$

где $\xi_\circ \in \partial\Omega$, а ξ_e, ξ_l — внутренняя и внешняя предельные точки к $\xi_\circ$. Из (1) и (6), (7) следует, что $\boldsymbol{u}^-(\xi_l) = 0$, откуда с учётом (9) получим $\boldsymbol{u}^+(\xi_e) - \boldsymbol{u}^-(\xi_l) = \boldsymbol{u}^+(\xi_e) = \boldsymbol{b}(\xi_\circ)$. Что и требовалось доказать. □

Перечислим некоторые свойства функции класса $H(\partial\Omega)$:

1) если на некоторой (сколь угодно малой) поверхности, принадлежащей Ω, значения векторов нагрузки и перемещения равны нулю, то $\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{b}(x) = 0$ или $\boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{u}(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, $\boldsymbol{u}^+(x) = 0$ при $x \in \Omega$ [2];
2) если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in H(\partial\Omega)$ и $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, то $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1) \in H(\partial\Omega_1)$, где $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ — векторы нагрузки и перемещения, определённые на $\partial\Omega_1$ из (1), или, если $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1) \notin H(\partial\Omega_1)$, то $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \notin H(\partial\Omega)$;
3) если $(\boldsymbol{a},0) \in H(\partial\Omega)$, то $\boldsymbol{a}(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, или, если $\boldsymbol{a}(x) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$, то $(\boldsymbol{a},0) \notin H(\partial\Omega)$;
4) если $(0,\boldsymbol{b}) \in H(\partial\Omega)$, то $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{const}$, $x \in \partial\Omega$, или, если $\boldsymbol{b}(x) \neq \mathrm{const}$, $x \in \partial\Omega$, то $(0,\boldsymbol{b}) \notin H(\partial\Omega)$;
5) если $\boldsymbol{a}(x) \neq 0$ ($\boldsymbol{b}(x) \neq \mathrm{const}$), $x \in \partial\Omega$ и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in H(\partial\Omega)$, то $(\alpha\boldsymbol{a},\beta\boldsymbol{b}) \notin H(\partial\Omega)$ при $\alpha \neq \beta \neq 1$, $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$, или, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in H(\partial\Omega)$ и $(\alpha\boldsymbol{a},\beta\boldsymbol{b}) \in H(\partial\Omega)$, то $\boldsymbol{a}(x) = 0$, $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{const}$, $x \in \partial\Omega$;
6) если $\boldsymbol{A}(\xi) \pm \boldsymbol{B}(\xi) = 0$ при $\xi \in \Omega^-$, то $\boldsymbol{a}(x) = 0$, $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{const}$, $x \in \partial\Omega$.

Заметим, что свойства 2–6 есть следствия свойств потенциалов простого и двойного слоев [3].

Определим неоднородную среду как среду, содержащую трещину. Как отмечалось ранее, в дальнейшем с плотностями $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ будем связывать следующие механические характеристики. Так, если нагрузка $\boldsymbol{p}(x)$, приложенная к телу, вызывает смещение $\boldsymbol{u}(x)$ на поверхности последнего, то векторы $\boldsymbol{a}(x)$ и $\boldsymbol{b}(x)$ суть векторы $\boldsymbol{p}(x)$ и $\boldsymbol{u}(x)$ соответственно. Переопределённость в задании граничных условий объясняется тем, что в теле могут находиться дефекты (трещины), местоположение и размеры которых неизвестны. Задание же переопределённых граничных условий позволяет сформулировать задачу об отыскании этих дефектов.

Будем полагать, что $\boldsymbol{a}(x) \neq 0$, $\boldsymbol{b}(x) \neq \mathrm{const}$ при $x \in \partial\Omega$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.*Пусть на $\partial\Omega$ известны значения векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{p}$. Если в теле находится трещина $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ и $(\Sigma^+ \cup \Sigma^-) \cap \partial\Omega = \emptyset$, то $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}) \notin H(\partial\Omega)$. Здесь Σ^+ и Σ^- — берега трещины.*

Доказательство. При переходе через Σ^+ и Σ^- вектор смещения терпит разрыв, т. е. $[\boldsymbol{u}(\xi)] = \boldsymbol{l}(\xi) \neq 0$. По плоскости Σ разобьём область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2, содержащие соответственно Σ^+ и Σ^-.

В областях Ω_1 и Ω_2 векторы упругих смещений $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и $\boldsymbol{u}^{(2)}$ непрерывны. Допустим, что $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) \in H(\partial\Omega)$, тогда из (1) в Ω находится непрерывное упругое перемещение $\boldsymbol{u}^{(\circ)}$. На общей части $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ векторы перемещений и нагрузки совпадают, т. е. можно записать $\boldsymbol{b}_\circ = \boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(\circ)} = 0$ и $\boldsymbol{a}_\circ = \boldsymbol{p}^{(1)} - \boldsymbol{p}^{(\circ)} = 0$. Тогда, согласно первому свойству $H(\partial\Omega)$, должны быть выполнены равенства $\boldsymbol{b}_\circ = \boldsymbol{u}^{(1)}(\xi) - \boldsymbol{u}^{(\circ)}(\xi) = 0$, $\xi \in \Omega_1$, $\xi \in \Sigma^+$, аналогично на общей части $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_2$ имеем $\boldsymbol{b}_\circ = \boldsymbol{u}^{(2)}(\xi) - \boldsymbol{u}^{(\circ)}(\xi) = 0$, $\xi \in \Omega_2$, $\xi \in \Sigma^-$. С учётом непрерывности вектора $\boldsymbol{u}^{(\circ)}$ во всей области Ω при переходе через трещину для скачка вектора $\boldsymbol{b}_\circ$ получим

$$[\boldsymbol{b}_\circ] = 0 = (\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(\circ)}) - (\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(\circ)}) = \boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)} = [\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{l} = 0.$$

Последнее равенство противоречит исходному предположению о том, что вектор перемещения $\boldsymbol{u}$ терпит разрыв при переходе через плоскость трещины. Таким образом, утверждение доказано. □

Введённый критерий о наличии трещины позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Если в теле находится трещина, то вектор-функция $\boldsymbol{\Delta}(\xi)$, $\xi \in \Omega^-$ или $\boldsymbol{\Lambda}(\xi)$, $\xi \in \partial\Omega$ определяют плоскость трещины единственным образом.*

Доказательство. Как следует из условий теоремы 2, на плоскости трещины в теле вектор перемещения терпит разрыв. Путём продолжения решения с поверхности $\partial\Omega$ найдём плоскость разрыва компонент вектора $\boldsymbol{u}$. Тогда решение в Ω можно представить как сумму вектора $\boldsymbol{u}_1$, имеющего особенность, т. е. имеющего разрыв на плоскости трещины, и некоторого непрерывного вектора $\boldsymbol{u}_2$ в области Ω. На границе $\partial\Omega$ этим перемещениям соответствуют значения нагрузок $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Для этих решений можно записать:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}(\xi) &= \iint\limits_{\partial\Omega} \big[\boldsymbol{p}_1(x)\boldsymbol{U}^\circ(x,\xi) - \boldsymbol{u}_1(x)\boldsymbol{R}^\circ(x,\xi)\big]\, dS_x,\\
0 &= \iint\limits_{\partial\Omega} \big[\boldsymbol{p}_2(x)\boldsymbol{U}^\circ(x,\xi) - \boldsymbol{u}_2(x)\boldsymbol{R}^\circ(x,\xi)\big]\, dS_x, \quad \xi \in \Omega^-;\\
\boldsymbol{\Lambda}(\xi) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1(\xi) - \iint\limits_{\partial\Omega} \big[\boldsymbol{p}_1(x)\boldsymbol{U}^\circ(x,\xi) - \boldsymbol{u}_1(x)\boldsymbol{R}^\circ(x,\xi)\big]\, dS_x,\\
0 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2(\xi) - \iint\limits_{\partial\Omega} \big[\boldsymbol{p}_2(x)\boldsymbol{U}^\circ(x,\xi) - \boldsymbol{u}_2(x)\boldsymbol{R}^\circ(x,\xi)\big]\, dS_x, \quad \xi \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Гладкое решение $(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{u}_2)$ принадлежит классу $H(\partial\Omega)$. Согласно теореме 2, для этого решения в области Ω не существует плоскости с разрывом перемещений, т. е. другой плоскости, кроме найденной по функциям $\boldsymbol{\Delta}(\xi)$ или $\boldsymbol{\Lambda}(\xi)$. Таким образом, теорема доказана. □

Перейдём к численной оценке существования трещины в теле. Изначально рассмотрим однородное тело, ограниченное единичным квадратом. Из уравнения (1) при отсутствии массовых сил получаем:

$$u_i(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \Big[p_i(x)U_{ij}^{(0)}(\xi,x) - u_i(x)R_{ij}^{(0)}(\xi,x)\Big]\, d\Gamma, \quad \xi \in \Omega^+,$$

$$[\mathbf{\Delta}(x)]_i = \int\limits_{\partial\Omega} \Big[p_i(x)U_{ij}^{(0)}(\xi,x) - u_i(x)R_{ij}^{(0)}(\xi,x)\Big]\, d\Gamma, \quad \xi \in \Omega^- \quad (i,j \in \{1,2\}),$$

для которого [3]:

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(0)}(\xi,x) &= -\,1/\big(8\pi(1-\nu)\mu\big)\,[3-4\nu]\,\delta_{ij}\ln r - r,_i r,_j,\\ R_{ij}^{(0)}(\xi,x) &= -\,1/\left(4\pi(1-\nu)r\right)\Big\{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r,_i r,_j]\,\partial r/\partial n -\\ &\qquad -(1-2\nu)(r,_i n,_j - r,_j n,_i)\Big\}, \end{aligned}$$

где r — расстояние от неподвижной точки ξ до точки x, проходящей по периметру квадрата.

Для оценки отклонения было использовано значение модуля вектора $\mathbf{\Delta}$, т. е. $|\mathbf{\Delta}(\xi)| = \big(\Delta_1^2(\xi) + \Delta_2^2(\xi)\big)^{1/2}$. Согласно теореме 1 для однородного тела $\mathbf{\Delta} = 0$.

Для решения задачи была отлажена программа нахождения среднего интегрального значения $\mathbf{\Delta}$. Так, за основу было взято гладкое решение и на сторонах квадрата для него определялись значение векторов нагрузок и перемещений. Затем эти значения подставлялись в соотношение (3). По теореме 1 значения компонент вектора смещений u_1 и u_2 совпадают с найденными из (1), если неподвижная точка находится внутри области Ω, и равны 0, если — вне области. Вычисление интеграла было проверено на нескольких известных аналитических решениях. В итоге внутри области перемещения совпадали с теоретическими до 10^{-5}, а вне границы получился требуемый нуль. После отладки программы были рассмотрены решения для трещины.

Для трещины можно выделить три основные формы разрушений в зависимости от возникающих смещений: раскрытие трещины (нормальный отрыв 1), скольжение поверхностей трещины одна относительно другой в условиях плоской деформации (поперечный сдвиг 2) или антиплоское их скольжение (продольный (антиплоский) сдвиг 3).

Далее рассматривался только случай нормального отрыва. Распределения напряжений σ_{ij} и перемещений u_i, соответствующих комплексным потенциалам двумерной задачи о полубесконечной трещине, имеют вид [4] ((r,θ) — полярные координаты с центром в вершине трещины):

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{22}\end{array}\right\} = \frac{K_1\cos\theta/2}{\sqrt{2}\pi r}\left\{\begin{array}{c}1-\sin\theta/2\sin3\theta/2\\ \sin\theta/2\cos3\theta/2\\ 1+\sin\theta/2\sin3\theta/2\end{array}\right\} = \frac{K_1\sigma_{ij}^{\wedge}(\theta)}{\sqrt{2}\pi r}, \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{c}u_1\\ u_2\end{array}\right\} = \frac{K_1\sqrt{r}2\pi}{2\mu}\left\{\begin{array}{c}\cos n\theta/2\left[k-1+2\sin^2\theta/2\right]\\ \sin\theta/2\left[k+1-2\cos^2\theta/2\right]\end{array}\right\} = \frac{K_1\sqrt{r2\pi}u_i^{\wedge}(\theta)}{2\mu}, \tag{11}$$

где $k = 3 - 4\nu$, для плоской деформации K_1 — коэффициент интенсивности трещины нормального отрыва.

В общем случае решение от трещины можно представить в виде суммы аналитического решения в области и решения с особенностью. Аналитическое решение даёт значение $|\boldsymbol{\Delta}(\xi)| = \left(\Delta_1^2(\xi) + \Delta_2^2(\xi)\right)^{0,5}$, близкое к нулю. Поэтому для оценки наличия трещины по функции отклонения была использована особенность от трещины нормального отрыва (10), (11). Так, на сторонах квадрата выводились значения векторов перемещений $\boldsymbol{u}$ и нагрузки $\boldsymbol{p}$ от асимптотики вершины трещины (10), (11). Численный расчёт показал, что наличие трещины приводит к возрастанию среднего интегрального значения $|\boldsymbol{\Delta}(\xi)|$ от 10^{-5} до 10^{+2}. Численно было установлено, что чем ближе трещина находится к границе квадрата, тем больше значение отклонения $|\boldsymbol{\Delta}(\xi)|$.

Таким образом, интегральный критерий $H(\partial\Omega)$ о согласовании плотностей может быть использован для ответа на вопрос о существовании трещины в теле.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект* № 08–01–00168-а), *фонда СО РАН* (*проект* № 72)*, Совета по грантам Президента РФ* (*проект* № НШ-3066.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шваб А. А.* Существенно переопределенная задача теории упругости // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2001. — Т. 4, № 1. — С. 204–207.
2. *Almansi E.* Un Teorema Sulle Deformazioni Elastiche dei Solidi Isotropi // *Rend. Accad. Lincei. 5 ser.*, 1907. — Vol. 16. — P. 865–868.
3. *Навацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
4. *Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.* Нелинейная механика разрушения. — Самара: Самарск. ун-т, 2001. — 632 с.

Поступила в редакцию 01/IX/2009;
в окончательном варианте — 18/X/2010.

MSC: 74Rxx

THE ESSENTIALLY OVER DEFINE NONCLASSICAL PROBLEM FOR BODY WITH CRACK

A. A. Schwab

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russia.

E-mail: `schwab@ngs.ru`

One of the basic problems of the fracture mechanics is the initiation and propagation of the crack in a body. In spite of the variety of approaches to the modeling of such processes, the problem is still actual now. The problem of control is a modern one when for real surface data the different tapes of concentrators should be estimated. Here the problem of a crack finding is investigated for the asymptotic information in the tip a crack with the help of the integral of solidness. The problem is seen as essential to define the problem of the theory of elasticity. When for the boundary are given over define condition one to find out the surface fracture. The needed relations and numerical calculations are made.

Key words: *crack, nonclassical problem, elasticity.*

Original article submitted 01/IX/2009;
revision submitted 18/X/2010.

Albert A. Schwab (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist, Lab. of Static Strength.