Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 85–95

УДК 539.3

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЁЛОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЫ С ЖЁСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. В. Зайцев, А. А. Фукалов

Пермский государственный технический университет
(национальный исследовательский университет),
614990 Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

E-mails: zav@pstu.ru

С использованием разложения компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координатам в тригонометрические и обобщенные степенные ряды получено новое точное аналитическое решение задачи о равновесии толстостенного полого тяжёлого трансверсально-изотропного тела с центральной симметрией, жёстко скрепленного по внутреннему контуру и находящегося под действием равномерного внешнего давления. Из полученного решения в частном случае следуют выражения для напряжений, деформаций и перемещений в точках полой тяжёлой изотропной сферы. В качестве примера на основе многокритериального подхода, описывающего различные реальные механизмы разрушения анизотропных тел с центральной симметрией, проведена оценка начальной прочности монолитной железобетонной сферы.

Ключевые слова: *толстостенные тяжёлые упругие трансверсально-изотропные сферы, точные аналитические решения, многокритериальная оценка начальной прочности.*

Введение. Конструкции и сооружения в виде массивных толстостенных сфер, изготавливаемых из анизотропных материалов, находят широкое применение в различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях нефтегазохимического комплексов. Наиболее распространенными видами нагрузки этих объектов являются статическое внешнее и/или внутреннее давление и собственный вес.

Проблема исследования напряжённо-деформированного состояния анизотропных массивных центрально-симметричных тел от действия собственного веса недостаточно изучена: в отечественной и зарубежной литературе практически отсутствуют монографии и статьи, посвященные этой проблеме. Вместе с тем этот вопрос не нов, и решение частных задач по оценке влияния гравитационных сил на характер распределения напряжений и деформаций в изотропных массивных полых толстостенных центрально-симметричных телах содержится в ограниченном числе работ [1–3]. Поэтому важными и актуальными являются задачи получения новых точных аналитических решений о равновесии жёстко закрепленных по внутренней поверхности тяжёлых толстостенных анизотропных упругих тел с центральной симметрией, находящихся под действием равномерно распределенного внешнего давления, и разработка на основе этих решений инженерных методов уточненного прочностного анализа. Кроме того, получение аналитических зависимостей важно еще и для тестирования численных алгоритмов решения более сложных

Зайцев Алексей Вячеславович (к.ф.-м.н., доцент), докторант, каф. механики композиционных материалов и конструкций. *Фукалов Антон Александрович,* магистрант, каф. механики композиционных материалов и конструкций.

задач, в которых отдельные элементы конструкций и сооружений имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжёлыми телами простейшей геометрии.

1. Тяжёлая трансверсально-изотропная сфера. Рассмотрим задачу о равновесии толстостенного линейно-упругого трансверсально-изотропного тяжёлого сферического тела, ограниченного поверхностями радиусов ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) и находящегося под действием нагрузки, симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через геометрический центр, в который поместим начало сферической ортогональной системы координат ρ, θ и φ. Будем считать, что материал сферы однородный, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра тела в рассматриваемую точку. Радиальные и меридиональные перемещения (u_ρ и u_θ), радиальные ($\sigma_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\rho\rho}$), окружные ($\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$), меридиональные ($\sigma_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$) нормальные напряжения и осевые деформации, а также касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и сдвиговые деформации $\gamma_{\rho\theta}$ в силу симметрии тела и приложенной внешней нагрузки не зависят от окружной координаты и удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\theta}{\rho}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_\rho}{\rho}, \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\end{gathered} \tag{1}$$

и уравнениям равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\left(2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta\right) + F_\rho = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\left[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\rho\theta}\right] + F_\theta = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $F_\rho = -\gamma\cos\theta$ и $F_\theta = \gamma\sin\theta$ — компоненты вектора массовых сил, γ — удельный вес материала.

Определяющие соотношения

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tau_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta}\end{gathered} \tag{3}$$

для сферически трансверсально-изотропного тяжёлого тела можно записать с помощью технических постоянных:

$$\begin{gathered}A_{11} = \frac{\hat{E}\,(1-\nu)}{m}, \quad A_{12} = \frac{E\hat{\nu}}{m}, \quad A_{22} = \frac{E}{(1+\nu)\,m}\Big(1 - \hat{\nu}^2\frac{E}{\hat{E}}\Big), \\ A_{23} = \frac{E}{(1+\nu)\,m}\Big(\nu + \hat{\nu}^2\frac{E}{\hat{E}}\Big), \quad A_{44} = \hat{G}, \quad m = 1 - \nu - 2\hat{\nu}^2\frac{E}{\hat{E}}.\end{gathered}$$

Здесь $\hat{E}$ и E — модули Юнга вдоль координаты ρ и в ортогональном к ней направлении; $\hat{G}$ — модуль сдвига для диаметральной плоскости; $\hat{\nu}$ и ν — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение тела в направлениях θ

и φ при растяжении вдоль радиальной координаты ρ, и поперечные деформации в плоскости, нормальной радиус-вектору ρ, при растяжении в той же самой плоскости соответственно.

Пусть толстостенная сфера жёстко закреплена по внутренней поверхности и находится в равновесии под действием внешнего равномерного давления p. Тогда для рассматриваемого случая граничные условия запишем следующим образом:

$$u_\rho\big|_{\rho=\rho_1}=0,\quad u_\theta\big|_{\rho=\rho_1}=0,\quad \sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=\rho_2}=-p,\quad \tau_{\rho\theta}\big|_{\rho=\rho_2}=0. \tag{4}$$

Для любых граничных условий, не нарушающих осевой симметрии задачи, решение системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
\gamma\cos\theta=A_{11}\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\left[2A_{11}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+H_3\left(\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho}\operatorname{ctg}\theta\right)\right]+\\
+\frac{1}{\rho^2}\left[A_{44}\left(\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\right)+(H_1-A_{44})\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\operatorname{ctg}\theta\right)+2H_1u_\rho\right],\\
-\gamma\sin\theta=A_{44}\frac{\partial^2u_\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\left[2A_{44}\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho}+H_3\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\rho\partial\theta}\right]+\\
+\frac{1}{\rho^2}\left\{A_{22}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\rho\right)+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\operatorname{ctg}\theta\right)\operatorname{ctg}\theta\right]+H_2\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}-u_\theta\right)\right\},
\end{gathered}\tag{5}$$

полученных путем последовательной подстановки геометрических соотношений (1) в определяющие соотношения (3), а затем полученного результата — в уравнения равновесия (2), можно представить в виде тригонометрических рядов [1–3]:

$$u_\rho=\sum_{n=0}^{\infty}u_\rho^{(n)}(\rho)\cos n\theta,\quad u_\theta=\sum_{n=0}^{\infty}u_\theta^{(n)}(\rho)\sin n\theta. \tag{6}$$

Здесь $H_1=A_{12}-H_4$, $H_2=A_{23}+2A_{44}$, $H_3=A_{12}+A_{44}$ и $H_4=A_{22}+A_{23}$.

Подставляя выражения (6) в систему (5) и приравнивая коэффициенты при соответствующих функциях аргумента θ, получим n систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
a_1^{(n)}u_\rho''^{(n)}+\frac{1}{\rho}\left(a_2^{(n)}u_\rho'^{(n)}+a_3^{(n)}u_\theta'^{(n)}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(a_4^{(n)}u_\rho^{(n)}+a_5^{(n)}u_\theta^{(n)}\right)=A^{(n)},\\
b_1^{(n)}u_\theta''^{(n)}+\frac{1}{\rho}\left(b_2^{(n)}u_\theta'^{(n)}+b_3^{(n)}u_\rho'^{(n)}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(b_4^{(n)}u_\rho^{(n)}+b_5^{(n)}u_\theta^{(n)}\right)=B^{(n)},
\end{gathered}\tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}
a_1^{(n)}=\frac{1}{2}a_2^{(n)}=A_{11},\quad a_3^{(n)}=H_3H_5,\quad a_4^{(n)}=2H_1-nA_{44}H_5,\\
a_5^{(n)}=H_5\left(H_1-A_{44}\right),\quad b_1^{(n)}=\frac{1}{2}b_2^{(n)}=A_{44},\quad b_3^{(n)}=-H_3n,\\
b_4^{(n)}=-n\left(A_{22}+H_2\right),\quad b_5^{(n)}=-H_2-A_{22}\left[n\left(n-\operatorname{ctg}\theta\operatorname{ctg}n\theta\right)+\operatorname{ctg}^2\theta\right],
\end{gathered}$$

$$H_5 = n + \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg} n\theta,$$
$$A^{(n)} = \begin{cases} \gamma, & n = 1; \\ 0, & n = 0,\ n > 1; \end{cases} \qquad B^{(n)} = \begin{cases} -\gamma, & n = 1; \\ 0, & n = 0,\ n > 1. \end{cases}$$

Эти системы для каждого n должны быть дополнены граничными условиями, которые получаются разложением заданных на поверхностях тела перемещений, напряжений или их комбинаций в тригонометрические ряды по меридиональной координате θ. Поэтому вычисление перемещений, деформаций и напряжений связано с решением n самостоятельных задач.

Итак, при $n = 0$ система дифференциальных уравнений (7) значительно упрощается, а ее общее решение выглядит следующим образом:

$$u_\theta^{(0)} \equiv 0, \quad u_\rho^{(0)} = C_1^{(0)} \rho^{-1/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-1/2+k},$$

где $k = \sqrt{1/4 - 2H_1/A_{11}}$ — показатель анизотропии, а $C_1^{(0)}$ и $C_2^{(0)}$ — константы интегрирования.

При $n = 1$ будем иметь неоднородную систему дифференциальных уравнений (7), решение которой можно представить суперпозицией общих решений $\hat{u}_\rho^{(1)}$ и $\hat{u}_\theta^{(1)}$ и любых частных решений $\tilde{u}_\rho^{(1)}$ и $\tilde{u}_\theta^{(1)}$ соответствующих однородной и неоднородной систем. Последние, например, определим в виде:

$$\tilde{u}_\rho^{(1)} = H_\rho \rho^2, \quad \tilde{u}_\theta^{(1)} = H_\theta \rho^2,$$
$$H_\rho = \gamma H_6 \left(H_4 - 2H_3\right), \quad H_\theta = \gamma H_6 \left[2\left(A_{11} - A_{44}\right) - H_4\right],$$
$$H_6 = \frac{1}{2}\left[A_{11}\left(H_4 - 4A_{44}\right) + 2A_{44}\left(H_4 - 3A_{12}\right) - 2A_{12}^2\right]^{-1}.$$

Общее решение однородной системы будем искать в форме обобщенных степенных рядов

$$\hat{u}_\rho^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i^{(1)} \rho^{i+z}, \quad \hat{u}_\theta^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(1)} \rho^{i+z}$$

с характеристическими числами

$$z_1 = -i, \quad z_2 = -i - 1, \quad z_3 = -i - \frac{1}{2} - t, \quad z_4 = -i - \frac{1}{2} + t,$$

где $t = \sqrt{9/4 + \left[\left(A_{11} + 2A_{44}\right) H_4 - 2A_{12}\left(H_4 + 2A_{44}\right)\right] / \left(A_{11} A_{44}\right)}$ — показатель анизотропии для центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерно распределенной вертикальной осесимметричной нагрузки. Обратим внимание на то, что в отличие от показателя k для центрально-симметричного тела, находящегося под действием центрально-симметричной нагрузки, t зависит от модуля сдвига для диаметральной плоскости. Эта зависимость является следствием появления сдвиговых деформаций, которые отсутствуют в случае, когда и нагрузка, и само тело обладают центральной симметрией.

При $n>1$ системы дифференциальных уравнений (7) являются однородными, а их решения также находятся в виде степенных рядов. В рассматриваемом случае для любого n четыре характеристических числа $z_j^{(n)}$ $(j\in\{1,2,3,4\})$ являются корнями нелинейного уравнения четвертой степени

$$\left[\omega+\beta_2^{(n)}\left(i+z\right)+\beta_3^{(n)}\right]\left[\omega+\alpha_2^{(n)}\left(i+z\right)+\alpha_3^{(n)}\right]= \\ =\left[\alpha_4^{(n)}\left(i+z\right)+\alpha_5^{(n)}\right]\left[\beta_4^{(n)}\left(i+z\right)+\beta_5^{(n)}\right],$$

где $\omega=\left(i+z\right)\left(i+z-1\right)$.

По известным $z_j^{(n)}$ и $c_1^{(n)}=c_2^{(n)}=c_3^{(n)}=c_4^{(n)}=1$ коэффициенты $d_j^{(n)}$ могут быть определены следующим образом:

$$d_j^{(n)}=\frac{\lambda_j^{(n)}\big(\lambda_j^{(n)}-1+\beta_2^{(n)}-\alpha_4^{(n)}\big)-\alpha_5^{(n)}+\beta_3^{(n)}}{\lambda_j^{(n)}\big(\lambda_j^{(n)}-1+\alpha_2^{(n)}-\beta_4^{(n)}\big)+\alpha_3^{(n)}-\beta_5^{(n)}},$$

$$\alpha_j^{(n)}=\frac{a_j^{(n)}}{a_1^{(n)}},\quad \beta_j^{(n)}=\frac{b_j^{(n)}}{b_1^{(n)}},\quad \lambda_j^{(n)}=i+z_j^{(n)}.$$

Тогда общее решение системы (7) записывается так:

$$u_\rho^{(n)}=d_1^{(n)}C_1^{(n)}\rho^{\lambda_1^{(n)}}+d_2^{(n)}C_2^{(n)}\rho^{\lambda_2^{(n)}}+d_3^{(n)}C_3^{(n)}\rho^{\lambda_3^{(n)}}+d_4^{(n)}C_4^{(n)}\rho^{\lambda_4^{(n)}},$$
$$u_\theta^{(n)}=C_1^{(n)}\rho^{\lambda_1^{(n)}}+C_2^{(n)}\rho^{\lambda_2^{(n)}}+C_3^{(n)}\rho^{\lambda_3^{(n)}}+C_4^{(n)}\rho^{\lambda_4^{(n)}},$$

а постоянные интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$ и $C_4^{(n)}$ для каждого n определяются из граничных условий (4). Однако при разложении заданных на поверхностях тела перемещений и напряжений (4) в тригонометрические ряды по меридиональной координате θ получим при $n>1$ однородные системы дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями. Все эти системы имеют единственное тривиальное решение: $u_\rho^{(n)}=0$ и $u_\theta^{(n)}=0$.

Таким образом, общее решение системы (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_\rho&=C_1^{(0)}\rho^{-1/2-k}+C_2^{(0)}\rho^{-1/2+k}+\\ &+\Big(d_1C_1^{(1)}+\frac{1}{\rho}d_2C_2^{(1)}+d_3C_3^{(1)}\rho^{-1/2+t}+d_4C_4^{(1)}\rho^{-1/2-t}+H_\rho\rho^2\Big)\cos\theta,\\ u_\theta&=\Big(C_1^{(1)}+\frac{1}{\rho}C_2^{(1)}+C_3^{(1)}\rho^{-1/2+t}+C_4^{(1)}\rho^{-1/2-t}+H_\theta\rho^2\Big)\sin\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$d_1=-1,\quad d_2=\frac{A_{22}+H_2}{H_1-A_{44}},\quad d_3=\frac{A_{44}}{L}\left(B+2H_3t\right),\quad d_4=\frac{A_{44}}{L}\left(B-2H_3t\right),$$
$$B=M-3A_{44},\quad L=2H_3^2-A_{11}\left(A_{22}+H_2\right),\quad M=H_1-H_4.$$

Постоянные интегрирования при $n = 0$ в равенствах (8) могут быть определены из граничных условий (4):

$$C_1^{(0)} = -2\rho_1^{2k} C_2^{(0)} = 2\rho_1^{2k} \frac{p\rho_2^{3/2+k}}{H_7\rho_1^{2k} + H_8\rho_2^{2k}},$$
$$H_7 = A_{11}(2k+1) - 4A_{12}, \quad H_8 = A_{11}(2k-1) + 4A_{12}.$$

Группа слагаемых с постоянными интегрирования $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_3^{(1)}$ и $C_4^{(1)}$, соответствующая $n = 1$, отражает в общем решении (8) вклад массовых сил. Эти постоянные находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$d_1 C_1^{(1)} + \frac{1}{\rho_1} d_2 C_2^{(1)} + d_3 C_3^{(1)} \rho_1^{-1/2+t} + d_4 C_4^{(1)} \rho_1^{-1/2-t} = -H_\rho \rho_1^2,$$
$$C_1^{(1)} + \frac{1}{\rho_1} C_2^{(1)} + C_3^{(1)} \rho_1^{-1/2+t} + C_4^{(1)} \rho_1^{-1/2-t} = -H_\theta \rho_1^2,$$
$$4C_1^{(1)} A_{12}(d_1+1)\rho_2^{1/2+t} + H_{12}\rho_2^{-1/2+t} + H_9\rho_2^{2t} + H_{11} = -H_{10}\rho_2^{5/2+t},$$
$$2C_1^{(1)}(d_1+1)\rho_2^{1/2+t} + 2C_2^{(1)}(d_2+2)\rho_2^{-1/2+t} + C_3^{(1)}(2d_3 - 2t + 3)\rho_2^{2t} +$$
$$+ C_4^{(1)}(2d_4 + 2t + 3) = 2(H_\theta - H_\rho)\rho_2^{5/2+t},$$

где

$$H_9 = C_3^{(1)}\left[4A_{12}(d_3+1) + A_{11}d_3(2t-1)\right],$$
$$H_{10} = C_4^{(1)}\left[4A_{12}(d_4+1) - A_{11}d_4(2t+1)\right],$$
$$H_{11} = 4\left[H_\rho(A_{11}+A_{12}) + H_\theta A_{12}\right], \quad H_{12} = 2C_2^{(1)}\left[2A_{12}(d_2+1) - A_{11}d_2\right],$$

и не приводятся из-за громоздкости их выражений.

Подставляя найденные выражения для перемещений (8) последовательно в геометрические (1) и определяющие (3) соотношения, получим компоненты тензоров деформации

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\rho\rho} = -\frac{1}{2}\Big[H_{13} + 2k\Big(C_1^{(0)}\rho^{-3/2-k} - C_2^{(0)}\rho^{-3/2+k}\Big) + H_{17}\cos\theta\Big],\\
&\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = H_{13} + H_{15}\cos\theta,\\
&\gamma_{\rho\theta} = \big[(5/2-t)H_{16} - H_{15} - 2H_\theta\rho\big]\sin\theta
\end{aligned} \tag{9}$$

и напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{2}\Big\{&C_2^{(0)}H_8\rho^{-3/2+k} - C_1^{(0)}H_7\rho^{-3/2-k} +\\
&+\Big[\frac{1}{\rho^2}H_{12} + (H_9 + H_{10})\rho^{-3/2-t} + H_{11}\rho\Big]\cos\theta\Big\},\\
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = &\,kA_{12}\Big(C_2^{(0)}\rho^{1/2-k} - C_1^{(0)}\rho^{-3/2-k}\Big) +\\
&+\frac{1}{2}\Big[(2H_4H_{14} - A_{12}H_{17})\cos\theta - M\Big(C_2^{(0)}\rho^{1/2-k} + C_1^{(0)}\rho^{-3/2-k}\Big)\Big],\\
\tau_{\rho\theta} = &\,A_{44}\big[(5/2-t)H_{16} - H_{15} - 2H_\theta\rho\big]\sin\theta,
\end{aligned} \tag{10}$$

при записи которых были использованы следующие обозначения:

$$H_{13} = C_1^{(0)} \rho^{-3/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-3/2+k},$$

$$H_{14} = \frac{1}{\rho^2} d_2 C_2^{(1)} + d_3 C_3^{(1)} \rho^{-3/2+t} + d_4 C_4^{(1)} \rho^{-3/2-t},$$

$$H_{15} = H_{14} + \frac{1}{\rho^2} C_2^{(1)} + (H_\rho + H_\theta)\, \rho + H_{16},$$

$$H_{16} = C_3^{(1)} \rho^{-3/2+t} + C_4^{(1)} \rho^{-3/2-t},$$

$$H_{17} = \frac{2}{\rho^2} d_2 C_2^{(1)} + (1-2t) \left(d_3 C_3^{(1)} \rho^{-3/2+t} + d_4 C_4^{(1)} \rho^{-3/2-t} \right) - 4 H_{\rho\rho}.$$

В частном случае, когда при определении напряжённо-деформированного состояния можно пренебречь вкладом массовых сил, из полученных уравнений следует классическое аналитическое решение задачи Ламе для трансверсально-изотропной сферы [4]. Из этого решения для закрепленной по внутренней поверхности трансверсально-изотропной сферы со свободной от нагрузок внешней границей следует тривиальный результат: рассматриваемое тело находится в ненапряжённом состоянии.

2. Тяжёлая изотропная сфера. Из уравнений (8)–(10) может быть получено решение задачи о равновесии толстостенного тяжелого жёстко закрепленного по внутренней поверхности изотропного центрально-симметричного тела, находящегося под действием внешнего давления p. Действительно, осуществляя замену материальных констант $\hat{E} = E$, $\hat{\nu} = \nu$ и $\hat{G} = G = E/[2\,(1+\nu)]$, запишем выражения, определяющие распределение перемещений, следующим образом:

$$u_\rho = \left[\frac{1}{\rho} \left(d_2 C_2^{(1)} + \frac{2}{\rho^2} C_4^{(1)} \right) - C_1^{(1)} + \left(d_3 C_3^{(1)} + H_\rho \right) \rho^2 \right] \cos\theta + {} + C_2^{(0)} \rho + \frac{1}{\rho^2} C_1^{(0)}, \quad (11)$$

$$u_\theta = \left[C_1^{(1)} + \frac{1}{\rho} \left(C_2^{(1)} + \frac{1}{\rho^2} C_4^{(1)} \right) + \left(C_3^{(1)} + H_\theta \right) \rho^2 \right] \sin\theta.$$

Обратим внимание на то, что соотношения (11) следуют, как частный случай, из равенств (8) при подстановке в последние показателей анизотропии $k = 3/2$, $t = 5/2$ и коэффициентов $d_1 = -1$, $d_4 = 2$. Постоянные интегрирования при $n = 0$ и $n = 1$:

$$C_1^{(0)} = -p \rho_1^3 C_2^{(0)} = \rho_1^3 \rho_2^3 \frac{p\left(1 - \nu - 2\nu^2\right)}{E\left[2\,(1-2\nu)\,\rho_1^3 + (1+\nu)\,\rho_2^3\right]},$$

$$C_1^{(1)} = \frac{\gamma\,(\nu+1)}{3NP\rho_1} \Big\{ 2\left[9\rho_1^8 \left(2\nu^2 - 3\nu + 1\right) - \rho_2^8 \left(6\nu^2 + \nu - 5\right) \right] - {} - \rho_1^3 \rho_2^3 \left[\rho_2^2 \left(6\nu^2 + \nu - 2\right) + 9\rho_1^2 \left(8\nu^2 - 12\nu + 5\right) \right] \Big\},$$

$$C_2^{(1)} = -\rho_2^3 \frac{\gamma}{N}\left(4\nu^2+\nu-3\right), \quad N = 6E(\nu-1), \quad P = 2(3\nu-2)\rho_1^5 - (\nu+1)\rho_2^5,$$

$$C_3^{(1)} = \frac{\gamma(2\nu-3)}{NP}\left[2\rho_1^5\left(3\nu^2-4\nu+1\right) - (1+\nu)\left(\nu\rho_2^2+\rho_1^2\right)\rho_2^3\right],$$

$$C_4^{(1)} = \rho_1^2\rho_2^5\frac{\gamma(1+\nu)}{3NP}\left[2\rho_1^3(2\nu-1) - \rho_2^3(1+\nu)\right],$$

а также множители

$$H_\rho = \frac{\gamma(1-\nu)}{3E}, \quad H_\theta = -\frac{2\gamma\nu}{3E}, \quad d_2 = \frac{4(1-\nu)}{4\nu-3}, \quad d_3 = \frac{4\nu-1}{2\nu-3},$$

входящие в (11), значительно упрощаются.

Деформации и напряжения в точках, отстоящих от центра симметрии сферы на расстояние ρ, вычисляются при помощи следующих соотношений:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = H_{20} - (H_{18} - 2H_{19})\cos\theta,$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = H_{21} + \left[H_{18} + H_{19} + H_{22} + \frac{1}{\rho^2}\left(C_2^{(1)} - \frac{3}{\rho^2}C_4^{(1)}\right)\right]\cos\theta,$$

$$\gamma_{\rho\theta} = -\left(H_{18} + H_{19} - H_{22} + \frac{2}{\rho^2}C_2^{(1)}\right)\sin\theta,$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[H_{20} + \nu\left(\frac{3}{\rho^3}C_1^{(0)} + H_{21}\right)\right] +$$

$$+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{2\left[H_{19} + \nu(H_{22}+H_{23})\right] + (3\nu-1)H_{18}\right\}\cos\theta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(H_{21} + \nu H_{20}) +$$

$$+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)H_{18} + (1+2\nu)H_{19} + H_{22} + H_{23}\right]\cos\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{E}{2(1+\nu)}\left(H_{18} + H_{19} - H_{22} + \frac{2}{\rho^2}C_2^{(1)}\right)\sin\theta.$$

Здесь

$$H_{18} = \frac{2}{\rho^2}\left[\frac{2(1-\nu)}{4\nu-3}C_2^{(1)} + \frac{3}{\rho^2}C_4^{(1)}\right], \quad H_{19} = \left(\frac{4\nu-1}{2\nu-3}C_3^{(1)} + H_\rho\right)\rho,$$

$$H_{20} = C_2^{(0)} - \frac{2}{\rho^3}C_1^{(0)}, \quad H_{21} = C_2^{(0)} + \frac{1}{\rho^3}C_1^{(0)}, \quad H_{22} = \left(C_3^{(1)} + H_\theta\right)\rho,$$

$$H_{23} = \frac{1}{\rho^2}\left(C_2^{(1)} - \frac{3}{\rho^2}C_4^{(1)}\right).$$

3. Оценка начальной прочности тяжёлой железобетонной сферы. В качестве примера, используя полученные выражения (10), проанализируем вклад массовых сил в напряженное состояние анизотропной толстостенной тяжёлой сферы. В работе [5] были введены независимые величины

$$J_\sigma^{I} = \sigma_{\theta\theta}, \quad J_\sigma^{II} = \sigma_{\rho\rho}, \quad J_\sigma^{III} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\varphi\theta}^2}, \quad J_\sigma^{IV} = \sqrt{\tau_{\varphi\rho}^2 + \tau_{\theta\rho}^2},$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным однородным телом, которые могут быть применены для описания различных механизмов разрушения (от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлениях, от сдвигов по поверхности изотропии и в диаметральной плоскости соответственно) и оценки начальной прочности по совокупности критериев [6].

На рис. 1 показано распределение приведенных к безразмерному виду инвариантов тензора напряжений $\hat{J}^{\aleph}_{\sigma} = J^{\aleph}_{\sigma}/(\gamma r)$ вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной координаты $\hat{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ в тяжёлой железобетонной сфере ($\gamma = 40{,}0$ кН/м^3) со свободной от нагрузок внешней ($p = 0$) и жёстко закрепленной внутренней поверхностью. Параметры геометрии тела и упругие постоянные железобетона были выбраны следующими: $\delta = \rho_1/\rho_2 = 0{,}5$; $E = 40{,}0$ ГПа, $\hat{E} = 25{,}0$ ГПа, $\hat{G} = 11{,}0$ ГПа, $\nu = 0{,}075$ и $\hat{\nu} = 0{,}15$.

Как видим, на внешней, свободной от нагрузок поверхности тяжёлого железобетонного центрально-симметричного тела ненулевым является только первый инвариант $\hat{J}^{I}_{\sigma}$, который в верхней полусфере всюду возрастает вдоль $\hat{\rho}$, а в нижней – всюду убывает, принимая нулевое значение при $\hat{\rho} = 0{,}11$. Наибольшие по абсолютной величине значения $\hat{J}^{I}_{\sigma}$ принимает в точках, лежащих на вертикальной оси, проходящей через геометрический центр. Для верхней полусферы эти точки являются наиболее опасными из-за возможности по-

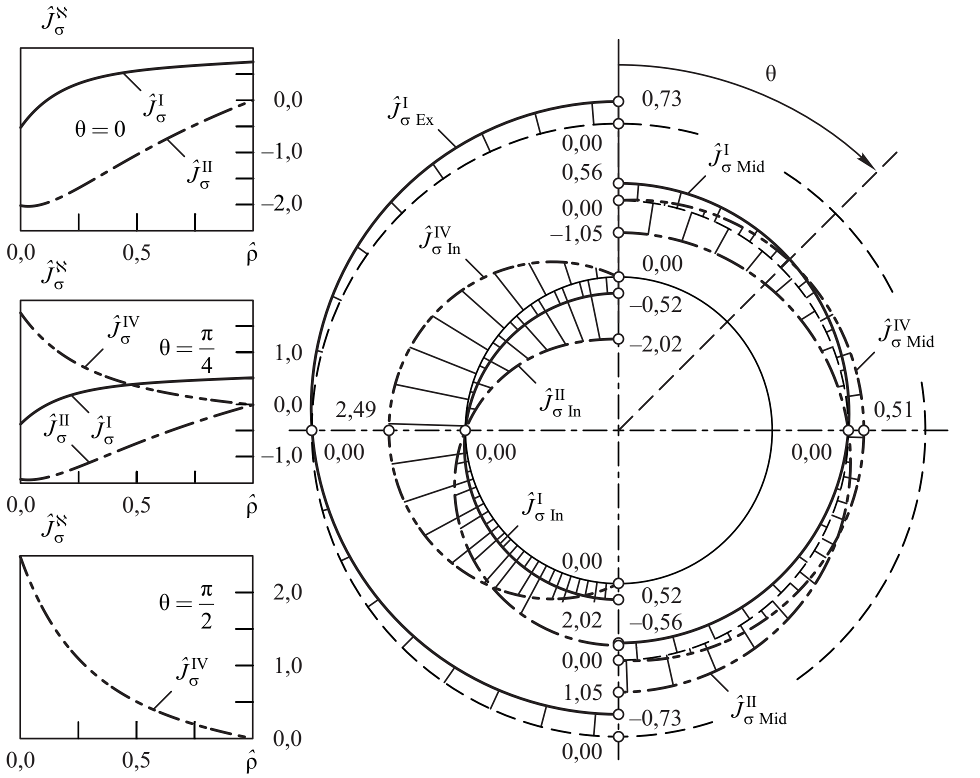

Рис. 1. Распределение обезразмеренных инвариантов тензора напряжений на закрепленной внутренней ($\hat{J}^{\aleph}_{\mathrm{In}}$), свободной от нагрузок внешней ($\hat{J}^{\aleph}_{\mathrm{Ex}}$) и серединной ($\hat{J}^{\aleph}_{\mathrm{Mid}}$) поверхностях железобетонной сферы

тери способности сопротивляться растяжению (при $\hat{\rho} < 0{,}11$) или сжатию (при $0{,}11 < \hat{\rho} \leqslant 1$) в окружном и меридиональном направлении, для нижней полусферы — сжатию (при $\hat{\rho} < 0{,}11$) или растяжению (при $0{,}11 < \hat{\rho} \leqslant 1$) соответственно. Второй инвариант $\hat{J}^{II}_\sigma$ нелинейно распределен вдоль радиальной координаты, имеет при $\hat{\rho} = 0{,}03$ локальный минимум в верхней и локальный максимум в нижней полусферах соответственно. Обратим внимание на то, что начало разрушения верхней полусферы от сжатия, а нижней — от растяжения в радиальном направлении возможно в точках, принадлежащих вертикальной центральной оси.

Третий инвариант $\hat{J}^{III}_\sigma$ во всех точках принимает нулевые значения. Последнее связано с тем, что $\tau_{\varphi\theta} \equiv 0$, а при $n = 0$ и $n = 1$ имеет место равенство окружных и меридиональных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$. Следовательно, механизмы разрушения от сдвига по поверхности изотропии для рассматриваемых условий нагружения тяжёлой сферы и деформационных свойств материала не реализуются. Четвертый инвариант $\hat{J}^{IV}_\sigma$ равен нулю в точках, расположенных на вертикальной оси и возрастает по мере увеличения угла θ, достигая своих максимальных значений при $\theta = \pi/2$. Вместе с тем при изменении радиальной координаты от внутренней закрепленной границы бетонной сферы к внешней $\hat{J}^{IV}_\sigma$ всюду убывает до нулевых значений на свободной поверхности.

На рис. 2 проиллюстрировано влияние толщины сферы $\delta = \rho_1/\rho_2$ на характер распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений вдоль радиальной координаты $\hat{\rho}$, показавшее, что с ростом δ увеличивается наклон кривых и возрастают (по абсолютной величине) значения $\hat{J}^{\aleph}_\sigma$ в точках закрепления. Кроме того, точка, в которой происходит смена знака первого инварианта $\hat{J}^{I}_\sigma$, при увеличении толщины железобетонной сферы смещается к внутренней закрепленной поверхности.

Заключение. Таким образом, на основе полученого нового точного аналитического решения задачи о равновесии находящегося под действием внешне-

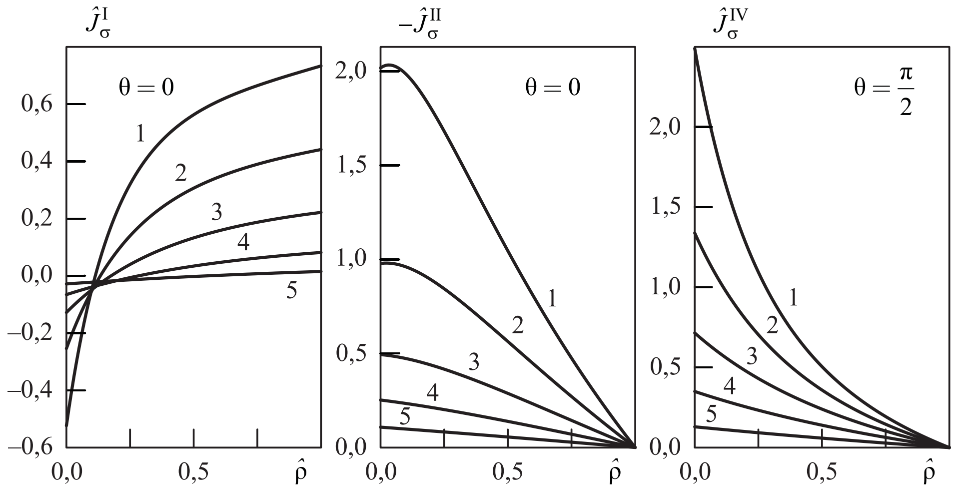

Рис. 2. Распределение $\hat{J}^{\aleph}_\sigma$ в характерных сечениях толстостенной железобетонной сферы: $1 - \delta = 0{,}5$, $2 - \delta = 0{,}6$, $3 - \delta = 0{,}7$, $4 - \delta = 0{,}8$, $5 - \delta = 0{,}9$

го равномерного давления тяжёлого трансверсально-изотропного централь-но-симметричного тела с жёстко закрепленной внутренней поверхностью проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние, исследовано влияние геометрии, проведена оценка начальной прочности монолитной железобетонной сферы.

Авторы признательны профессору И. Н. Шардакову за обсуждение полученных результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект РФФИ-Урал* № 07–01–96056–а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кожевникова Л. Л., Кузнецов Г. Б., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.* Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жёстко закрепленной по внешнему контуру // *Пробл. прочности*, 1974. — № 9. — С. 20–23.
2. *Кузнецов Г. Б.* Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. — М.: Наука, 1979. — 112 с.
3. *Кожевникова Л. Л., Кузнецов Г. Б., Роговой А. А.* Равновесие тел вращения под действием массовых сил. — М.: Наука, 1983. — 102 с.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
5. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
6. *Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — М.: Наука, 1997. — 288 с.

Поступила в редакцию 16/V/2010;
в окончательном варианте — 18/VIII/2010.

MSC: 74B05, 74G05

ELASTIC EQUILIBRIUM STATE OF THICK-WALLED HEAVY TRANSVERSALLY-ISOTROPIC SPHERES FIXED ON THE INTERIOR SURFACE

A. V. Zaitsev, A. A. Fukalov

Perm State Technical University (National Research University)
29, Komsomolskiy pr., Perm, 614990, Russia.

E-mails: zav@pstu.ru

Using decomposition of hoop and radial components of displacement vector to the trigonometrical and generalized power series, the new precise analytical solution to problem on equilibrium state of thick-walled heavy transversally-isotropic central-symmetric body, which is fixed on the interior surface and is subject to the action of uniform external lateral pressure, is obtained. This can set a pattern for precise solutions in particular cases of the relations for displacements, stresses and strains at the points inside thick-walled heavy isotropic sphere, the interior surface of which is fixed, while the exterior one being under the uniform pressure. The estimation of an initial strength of solid-cast reinforced concrete sphere is carried out on the basis of a multicriteria approach taking into account real damage mechanisms (i.e. damage from tension or compression in radial, hoop and axial directions, and from transversal and antiplane shear) of anisotropic central-symmetric bodies.

Key words: *thick-walled heavy transversally-isotropic, exact analytical solutions, multicriteria estimation of an initial strength.*

Original article submitted 16/V/2010;
revision submitted 18/VIII/2010.

Alexey V. Zaitsev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Mechanics of Composite Materials & Structures. *Anton A. Fukalov*, Master Student, Dept. of Mechanics of Composite Materials & Structures.