

УДК 539.375

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА

В. И. Астафьев

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), факультет летательных аппаратов (№ 1), 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

E-mail: vlast@ssu.samara.ru

Представлено автомодельное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта. Предполагается, что трещина ориентирована вертикально и исследование процесса ее развития проводится в рамках связанной задачи теории гидродинамики (течение вязких жидкостей) и линейной теории упругости (движение хрупких трещин). Найдены асимптотики автомодельного решения при больших и малых расстояниях от вершины трещины, предложены простые аппроксимации решения во всем диапазоне изменения переменных.

Ключевые слова: трещина гидроразрыва пласта, автомодельное решение, асимптотический анализ.

Введение. В настоящее время большинство нефтегазовых месторождений России находится на стадии завершающей разработки. Новые месторождения, вовлекаемые в разработку, содержат трудноизвлекаемые запасы углеводородов, коллекторы характеризуются низкой проницаемостью и слабым дренированием. В течение длительного срока эксплуатации скважин параметры призабойной зоны значительно ухудшаются. Это связано с изменением проницаемости, выпадением парафинов и асфальтенов и значительной обводненностью скважин. Эффективность работы таких скважин за время эксплуатации значительно уменьшается. Одним из основных методов интенсификации разработки сложных и проблемных нефтегазовых месторождений является гидравлический разрыв пласта (ГРП). В настоящее время около трети запасов углеводородов можно извлечь только с использованием этой технологии.

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) представляет собой процесс закачки жидкости в пласт при давлении, превосходящем предел прочности породы, при котором происходит ее разрушение и образование трещины. При повышении давления в породах пласта образуются новые и открываются уже имеющиеся трещины. Этот метод применяется для освоения скважин, для повышения продуктивности нефтяных и газовых месторождений, для повышения приемистости нагнетательных скважин, при изоляции пластовых вод и т. д.

1. Постановка задачи. Впервые модель вертикальной трещины ГРП в условиях плоской деформации (рис. 1) была предложена в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [1].

Процесс развития такой трещины описывается двумя группами уравнений. Первая группа описывает движение вязкой несжимаемой жидкости внут-

Владимир Иванович Астафьев (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. теоретической механики.

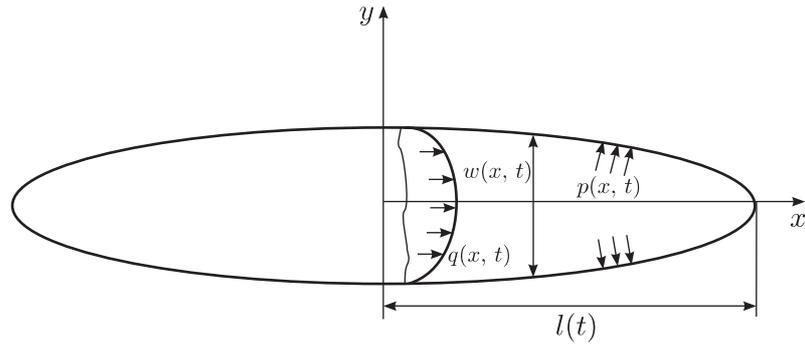


Рис. 1. Вертикальная трещина ГРП

ри трещины и имеет вид [2]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -12\mu \frac{q}{w^3}, \quad (2)$$

где $w(x, t)$ — раскрытие трещины, $q(x, t)$ — скорость потока жидкости в трещине, $p(x, t)$ — давление жидкости в трещине, μ — вязкость жидкости.

Вторая группа описывает деформирование упругого пласта при воздействии на него давления $p(x, t)$ со стороны трещины и сводится к уравнению [3]

$$p(x, t) - p_0 = -\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \int_0^{l(t)} \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} \frac{s ds}{s^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq l(t), \quad (3)$$

где p_0 — внешнее пластовое давление, E и ν — упругие модули, $l(t)$ — текущая длина трещины.

Таким образом, задача о развитии трещины ГРП описывается тремя уравнениями (1)–(3) для трёх неизвестных функций $q(x, t)$, $w(x, t)$ и $p(x, t)$. Для уравнений (1) и (2) необходимо ещё поставить начальные и граничные условия. В качестве начального условия будем считать, что при $t = 0$ нам известно начальное распределение давления $p_0(x)$ в трещине (или начальное смещение берегов трещины $w_0(x)$, связанное с $p_0(x)$ соотношением (3)), т. е.

$$w(x, t)|_{t=0} = w_0(x), \quad 0 \leq x \leq l_0. \quad (4)$$

Одним из граничных условий для уравнений (1) и (2) является условие закачки жидкости в трещину:

$$q(x, t)|_{x=0} = \frac{Q_0(t)}{2}, \quad t > 0, \quad (5)$$

где $Q_0(t)$ — заданная скорость закачки.

Вторым является условие непротекания жидкости через вершину трещины $x = l(t)$:

$$q(x, t)|_{x=l(t)} = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

Учитывая, что текущая длина трещины $l(t)$ также является неизвестной функцией, определяемой в процессе решения задачи, необходимо поставить ещё одно дополнительное условие для нахождения этой зависимости. В линейной механике разрушения таким условием является критерий разрушения [4]

$$K_I(t) = K_{IC}, \quad (7)$$

где $K_I(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений в упругом пласте с трещиной длины $l(t)$, K_{IC} — трещиностойкость пласта (характеристика способности материала пласта сопротивляться развитию в нем трещины нормального отрыва).

Величина $K_I(t)$ определяется по характеру раскрытия трещины $w(x, t)$ в её вершине как [4]

$$K_I(t) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{x \rightarrow l(t)} \frac{w(x, t)}{\sqrt{l(t) - x}} = K_{IC}. \quad (8)$$

Таким образом, четыре неизвестные функции — закон распространения трещины $l(t)$, величина раскрытия трещины $w(x, t)$, характер распределения давления жидкости в трещине $p(x, t)$ и скорость потока жидкости в трещине $q(x, t)$ при $t > 0$ находятся из трёх интегро-дифференциальных уравнений (1)–(3) в области $0 < x < l(t)$, начального условия (4), граничных условий (5), (6) и критерия распространения трещины (8).

2. Автомодельная постановка задачи. Полное решение начально-краевой задачи с неизвестной границей (1)–(8) может быть выполнено только численно [5]. При попытках аналитического решения сложных начально-краевых задач часто прибегают к использованию автомодельных переменных и поиску автомодельных решений [6].

Подробный анализ автомодельных решений в задаче о развитии трещины ГРП был представлен в работе [7]. Ряд автомодельных решений был получен в работах [8–10]. В настоящей работе автомодельное решение строится для случая полубесконечной трещины. Модель полубесконечной трещины обычно используется при исследовании особенностей поведения решения в окрестности вершины трещины, т. е. при $x \rightarrow l(t)$.

В случае полубесконечной трещины начало координат удобно поместить в вершину трещины (точка $x = l(t)$, $y = 0$), а ось ξ направить вдоль трещины в противоположном к оси x направлении. Тогда подвижная система координат (ξ, η) будет связана с неподвижной системой координат соотношениями $\xi = -x + l(t)$, $\eta = y$.

Предположим, что решение задачи (1)–(8) для полубесконечной трещины является автомодельным, т. е. $q(x, t) = q(\xi)$, $w(x, t) = w(\xi)$ и $p(x, t) = p(\xi)$. В этом случае соотношения (1)–(3) примут следующий вид:

$$\frac{dq}{d\xi} = V \frac{dw}{d\xi}, \quad (9)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = 12\mu \frac{q(\xi)}{w^3(\xi)}, \quad (10)$$

$$p(\xi) - p_0 = -\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial s} \frac{ds}{s - \xi}, \quad (11)$$

где V — скорость движения трещины.

Критерий распространения трещины (8) запишется как дополнительное условие на характер поведения функции $w(\xi)$ в окрестности вершины трещины при $\xi \rightarrow 0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{w(\xi)}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} K_{IC}. \quad (12)$$

Из уравнения (9) следует, что

$$q(\xi) = Vw(\xi). \quad (13)$$

Таким образом, автомодельная задача о развитии полубесконечной трещины ГРП сводится к решению уравнений (10) и (11) для функций $p(\xi)$ и $w(\xi)$ с условием ограниченности функции $p(\xi)$ на бесконечности и с дополнительным условием (12) на поведение функции $w(\xi)$ в окрестности вершины трещины.

Как видим, решение автомодельной задачи $p(\xi)$ и $w(\xi)$ зависит от четырех размерных параметров: μV , $E' = E/(1-\nu^2)$, K_{IC} и p_0 . Поэтому предварительно приведем уравнения (10)–(12) к безразмерному виду. Выберем в качестве масштаба длины величину $L = 12\mu VE'^2/p_0^3$, масштаба давлений — величину $P = p_0$ и масштаба смещений — величину $W = p_0L/E'$. Тогда безразмерные функции $\Pi = (p - p_0)/P$ и $\Omega = w/W$ будут зависеть от безразмерной переменной $\hat{\xi} = \xi/L$ и безразмерной трещиностойкости $k = 4\sqrt{2}K_{IC}/p_0\sqrt{\pi L}$ следующим образом [8]:

$$\frac{d\Pi}{d\hat{\xi}} = \frac{1}{\Omega^2(\hat{\xi})}, \quad (14)$$

$$\Pi(\hat{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Omega'(\eta) \frac{d\eta}{\hat{\xi} - \eta}, \quad (15)$$

$$\lim_{\hat{\xi} \rightarrow 0} \frac{\Omega(\hat{\xi})}{\sqrt{\hat{\xi}}} = k, \quad (16)$$

где за безразмерной переменной $\hat{\xi}$ сохранено прежнее обозначение ξ .

Таким образом, в безразмерном виде автомодельное решение $\Pi(\hat{\xi})$ и $\Omega(\hat{\xi})$ зависит лишь от одного автомодельного параметра задачи — величины безразмерной трещиностойкости

$$k = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{\frac{p_0}{\mu V} \frac{K_{IC}}{E'}}. \quad (17)$$

3. Решение автомодельной задачи.

3.1. Инверсия соотношения (15). При решении уравнений (14) и (15) при дополнительном условии (16) и условии ограниченности функции $\Pi(\hat{\xi})$ на бесконечности удобно обратить соотношение (15), т. е. представить его в виде интегральной зависимости функции $\Omega(\hat{\xi})$ от $\Pi(\hat{\xi})$.

В механике хрупкого разрушения инверсия соотношения (15) записывается в виде [4, 11]

$$\Omega'(\hat{\xi}) = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\eta}{\hat{\xi}}\right)^{1/2} \frac{\Pi(\eta) d\eta}{\hat{\xi} - \eta}. \quad (18)$$

Сходимость интеграла (18) накладывает на поведение функции $\Pi(\eta)$ на бесконечности определённое ограничение. Пусть $\Pi(\eta)$ ведёт себя на бесконечности как η^α . Тогда подынтегральное выражение в (18) $\eta^{1/2}\Pi(\eta)/(\xi - \eta)$ будет вести себя как $\eta^{\alpha-1/2}$. Для сходимости $\int \eta^{\alpha-1/2}d\eta$ на бесконечности необходимо, чтобы $\alpha < -1/2$. Следовательно, инверсию (18) можно использовать лишь в том случае, когда $\Pi(\eta)$ ведёт себя на бесконечности как η^α при $\alpha < -1/2$. Если в процессе решения (14)–(16) обнаружится, что характер убывания $\Pi(\eta)$ на бесконечности более слабый, чем $\eta^{-1/2}$, инверсия (18) будет приводить к расходящемуся интегралу. На это было обращено внимание еще в работе [4], где отмечалось, что инверсия (18) может использоваться, если функция $\Pi(\eta)$ задана лишь на некотором конечном интервале $(0, d)$ и равна нулю при $d < \eta < \infty$.

Инверсное соотношение с более слабыми требованиями, наложенными на поведение функции $\Pi(\eta)$ на бесконечности, было приведено в работе [5] и имело следующий вид:

$$\Omega'(\xi) = \frac{C}{2\sqrt{\xi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi + D}{\eta + D} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/2} \frac{\Pi(\eta)d\eta}{\xi - \eta}, \quad (19)$$

где $0 \leq D \leq \infty$.

При $D \rightarrow \infty$ из (19) вытекает формула (18), а при $D = 0$ соотношение (19) принимает вид

$$\Omega'(\xi) = \frac{C}{2\sqrt{\xi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2} \frac{\Pi(\eta)d\eta}{\xi - \eta}. \quad (20)$$

Вновь предполагая, что $\Pi(\eta)$ ведёт себя на бесконечности как η^α , из условия сходимости $\int \frac{\Pi(\eta)}{\sqrt{\eta}} \frac{d\eta}{\xi - \eta}$ на бесконечности получаем, что $\alpha < 1/2$. Как видим, соотношение (21) накладывает на характер поведения функции $\Pi(\eta)$ менее слабые условия, чем (18), и даже допускает возможность возрастания $\Pi(\eta)$ на бесконечности, но не быстрее, чем $\eta^{1/2}$. Из условия (16) следует, что константа C в соотношении (20) равна безразмерной трещиностойкости k , т.е. $C = k$.

Таким образом, искомую задачу (14)–(16) с учётом соотношения (20) можно записать как

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \frac{1}{\Omega^2(\xi)}, \quad (21)$$

$$\Omega'(\xi) = \frac{k}{2\sqrt{\xi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2} \frac{\Pi(\eta)}{\xi - \eta} d\eta. \quad (22)$$

Соотношение (22) можно проинтегрировать и записать в виде

$$\Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty F(\xi, \eta)\Pi(\eta)d\eta, \quad (23)$$

где $F(\xi, \eta) = \ln \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}} \right| - 2\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$.

Граничным условием для функции $\Pi(\xi)$ будет условие её затухания на бесконечности:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Pi(\xi) = 0. \quad (24)$$

3.2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРИ $\xi \rightarrow 0$ И $\xi \rightarrow \infty$. Определим характер асимптотического поведения решения при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Поведение функции $\Omega(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ заложено в дополнительном условии (16), которое учтено в (22) после замены константы C на безразмерный параметр трещиностойкости k . Таким образом, при $\xi \rightarrow 0$ можно записать, что

$$\Omega(\xi) = \Omega_0(\xi) + o(\xi^{1/2}), \quad (25)$$

где $\Omega_0(\xi) = k\sqrt{\xi}$, а $o(\xi^{1/2})$ является малой более высокого порядка, чем $\xi^{1/2}$ при $\xi \rightarrow 0$.

Для поиска асимптотики $\Omega(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ перепишем (22) в виде

$$\Omega'(\xi) = \frac{k}{2\sqrt{\xi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \Pi(\xi z) \frac{dz}{\sqrt{z}(1-z)}. \quad (26)$$

Пусть $\Omega(\xi) \rightarrow \Omega_\infty(\xi) = c\xi^\alpha$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда из (21) следует, что $\Pi(\xi) \rightarrow \Pi_\infty(\xi) = \xi^{1-2\alpha}/c^2(1-2\alpha)$. Условие (24) накладывает на α ограничение $\alpha > 1/2$, т.е. на бесконечности функция $\Omega(\xi)$ растёт быстрее, чем $\Omega_0(\xi) = k\sqrt{\xi}$. Для нахождения c и α разделим левую и правую части (26) на $\Omega_\infty' = c\alpha\xi^{\alpha-1}$ и найдём предел при $\xi \rightarrow \infty$. Получим, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{c\alpha\xi^{\alpha-1}} \left(\frac{k}{2\sqrt{\xi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \Pi(\xi z) \frac{dz}{\sqrt{z}(1-z)} \right) = 1. \quad (27)$$

Заменяя в (27) $\Pi(\xi z)$ при $\xi \rightarrow \infty$ функцией $\Pi_\infty(\xi z) = \xi^{1-2\alpha} z^{1-2\alpha}/c^2(1-2\alpha)$ и учитывая, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{k}{2c\alpha\xi^{\alpha-1/2}} = 0,$$

условие (27) перепишем в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\Pi_\infty(\xi z)}{\Omega_\infty'(\xi)} \frac{dz}{\sqrt{z}(1-z)} = -\frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Для того чтобы

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Pi_\infty(\xi z)}{\Omega_\infty'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(\xi z)^{1-2\alpha}}{c^3\alpha(1-2\alpha)\xi^{\alpha-1}}$$

был конечен, необходимо положить $\alpha = 2/3$. В этом случае

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Pi_\infty(\xi z)}{\Omega_\infty'(\xi)} = -\frac{9}{2c^3 z^{1/3}}.$$

Следовательно, для константы c из (28) получается значение

$$c^3 = \frac{18}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{5/6}(1-z)} = 18\sqrt{3}. \quad (29)$$

Таким образом, при $\xi \rightarrow \infty$ можно записать, что

$$\Omega(\xi) = \Omega_\infty(\xi) + o(\xi^{2/3}), \quad (30)$$

где $\Omega_\infty = c\xi^{2/3}$, $c = (18\sqrt{3})^{1/3}$, а $o(\xi^{2/3})$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\xi^{2/3}$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Учитывая, что $\Omega_\infty(\xi) = o(\xi^{1/2})$ при $\xi \rightarrow 0$, а $\Omega_0(\xi) = o(\xi^{2/3})$ при $\xi \rightarrow \infty$, из соотношений (25) и (30) можно записать простейшее приближенное представление решения системы (22):

$$\tilde{\Omega} = k\sqrt{\xi} + c\xi^{2/3}. \quad (31)$$

Это соотношение полностью описывает асимптотический характер поведения решения при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$. Функция $\tilde{\Pi}(\xi)$, соответствующая представлению (31), находится из уравнения (21) и может быть записана в виде

$$\tilde{\Pi}(\xi) = \int_\infty^\xi \frac{d\eta}{k^2\eta(1 + \alpha\eta^{1/6})^2} = \frac{6}{k^2} \left(\ln \frac{\alpha t}{\alpha t + 1} + \frac{1}{\alpha t + 1} \right), \quad (32)$$

где $\alpha = c/k$; $\xi = t^6$.

Асимптотическое поведение функции $\tilde{\Pi}(\xi)$, представленной в виде (32), получается следующим:

$$\Pi_0(\xi) = \frac{\ln \xi}{k^2}, \quad \Pi_\infty(\xi) = -\frac{3}{c^2\xi^{1/3}}.$$

3.3. Промежуточная асимптотика решения при $0 < \xi < \infty$. Сравнение приближенного асимптотического представления решения (31), (32) с результатами численного решения, представленного в работе [8], показывает, что выражение (31) не описывает поведение $\Omega(\xi)$ в промежуточной области $0 < \xi < \infty$, где численное решение не соответствует ни асимптотике $\Omega_0(\xi)$, ни асимптотике $\Omega_\infty(\xi)$. С целью нахождения аналитического характера поведения решения $\Omega(\xi)$ в промежуточной области будем искать решение $\Pi(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ в виде двухчленного представления

$$\Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + \Omega_1(\xi), \quad (33)$$

где $\Omega_1(\xi) = o(\xi^{1/2})$, т. е. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Omega_1(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0$;

$$\Pi(\xi) = \frac{\ln \xi}{k^2} + \Pi_1(\xi), \quad (34)$$

где $\Pi_1(\xi) = o(\ln \xi)$, т. е. $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Pi_1(\xi)}{\ln \xi} = 0$.

Подставляя двухчленные представления (33) и (34) в основные уравнения (21), (22), для функций $\Omega_1(\xi)$ и $\Pi_1(\xi)$ получаем уравнения:

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi} = -\frac{2\Omega_1(\xi)}{k\sqrt{\xi}}, \quad (35)$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\xi} = -\frac{4}{\pi k^2} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi \ln \eta + k^2 \Pi_1(\eta)}{\eta(\xi - \eta)}} d\eta. \quad (36)$$

Предположим, что второй член асимптотического разложения (33) (промежуточная асимптотика) имеет вид $\Omega_1(\xi) = a\xi^\alpha$. Тогда соотношение (36) будет выглядеть как

$$a\alpha\xi^{\alpha-1} = -\frac{4}{\pi k^2} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi \ln \eta + k^2 \Pi_1(\eta)}{\eta(\xi - \eta)}} d\eta. \quad (37)$$

Сделав замену $\eta = \xi z$ ($0 < z < \infty$), из соотношения (37) для величины a получаем

$$\frac{\pi k^2}{4} a\alpha = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{\ln \xi + \ln z + k^2 \Pi_1(\xi z)}{\sqrt{z}(1-z)} dz. \quad (38)$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}(1-z)} = 0,$$

из соотношения (38) получаем, что $\alpha = 1$, $a = 4S/(\pi k^2)$, где

$$S = \int_0^\infty \frac{\ln z dz}{\sqrt{z}(z-1)} = \pi^2.$$

Таким образом, в задаче о развитии трещины ГРП промежуточная асимптотика для функции $\Omega(\xi)$ будет иметь вид $\Omega_1(\xi) = a\xi$, что отличает её от традиционной асимптотики $\Omega_1(\xi) = O(\xi^{3/2})$ линейной механики разрушения [4, 11]. Величина $\Pi_1(\xi)$ в этом случае находится из (35) и имеет вид $\Pi_1(\xi) = -4a\sqrt{\xi}/k^3$.

Построим приближенную аналитическую аппроксимацию решения (22), имеющего асимптотики (33) и (34) при $\xi \rightarrow 0$ и $\Omega_\infty(\xi)$, $\Pi_\infty(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. В этом случае приём построения (31) и (32) не проходит, так как функция $\Omega_0(\xi) + \Omega_1(\xi)$ уже не является $o(\xi^{2/3})$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Будем искать в этом случае функцию $\tilde{\Omega}(\xi)$ в виде $\tilde{\Omega}(\xi) = k\sqrt{\xi}(1 + \omega(\xi))$. Из условий асимптотического поведения функции $\tilde{\Omega}(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ на функцию $\omega(\xi)$ накладываются следующие условия:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \omega(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\omega(\xi)}{\xi^{1/6}} = \frac{c}{k}.$$

Учитывая промежуточную асимптотику (33) для функции $\Omega(\xi)$, условие $\lim_{\xi \rightarrow 0} \omega(\xi) = 0$ можно заменить на условие $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi)}{\xi^{1/2}} = \frac{a}{k}$. В этом случае функцию $\omega(\xi)$, имеющую асимптотики $\omega_0 = \frac{a}{k}\xi^{1/2}$ и $\omega_\infty = \frac{c}{k}\xi^{1/6}$, можно аппроксимировать следующим образом:

$$\omega(\xi) = \frac{\omega_0(\xi)\omega_\infty(\xi)}{\omega_0(\xi) + \omega_\infty(\xi)} = \frac{ac}{k} \frac{\xi^{2/3}}{a\xi^{1/2} + c\xi^{1/6}}. \quad (39)$$

Таким образом, аппроксимация $\tilde{\Omega}(\xi)$ будет иметь вид

$$\tilde{\Omega}(\xi) = k\sqrt{\xi} + \frac{ac\xi}{c + a\xi^{1/3}}, \quad (40)$$

где $a = 4\pi/k^2$, $c = (18\sqrt{3})^{1/3}$.

Приближенное выражение для $\tilde{\Pi}$ найдём из (21) и представим его в виде

$$\tilde{\Pi} = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\eta}{\tilde{\Omega}^2(\eta)} = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\eta}{\left(k\sqrt{\eta} + \frac{ac\eta}{a\eta^{1/3}+c}\right)^2}. \quad (41)$$

Графики зависимостей $\tilde{\Omega}(\xi)$ и $\tilde{\Pi}(\xi)$ представлены на рис. 2 и 3. Сравнение этих зависимостей с результатами численного решения [5] показывает их полное соответствие, т. е. представление (40), (41) достаточно точно аппроксимирует поведение решения системы (21), (22) во всем диапазоне $0 < \xi < \infty$.

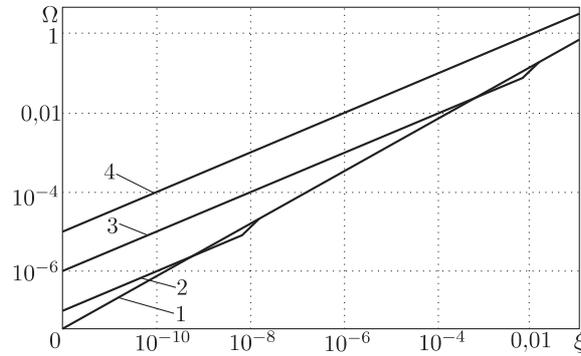


Рис. 2. График зависимости $\tilde{\Omega}(\xi)$

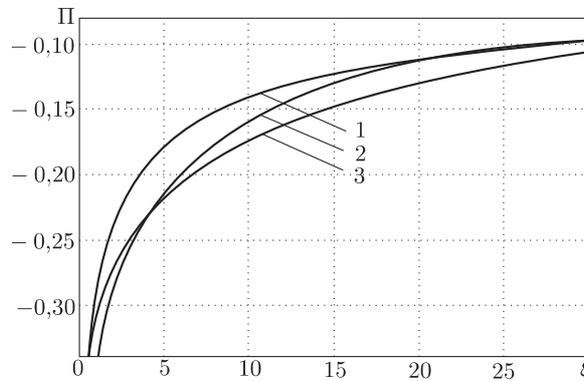


Рис. 3. График зависимости $\tilde{\Pi}(\xi)$

4. Анализ решения. Из полученного решения (40), (41) следует, что давление $p(x, t) = p_0(1 + \tilde{\Pi}(\xi))$ начиная с некоторого расстояния $x = x_0(t)$ становится отрицательным, и $p(x, t) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow l(t)$. Однако отрицательные давления в жидкости физически недопустимы, т. е. полученное решение (40), (41) в некоторой окрестности вершины распространяющейся трещины

$0 < \xi < d$ становится некорректным. Для устранения этой некорректности необходимо уточнить математическую модель (1)–(3).

Предположим, что жидкость заполняет не всю трещину $0 < \xi < \infty$, а только лишь часть её $d < \xi < \infty$, и перед вершиной трещины $0 < \xi < d$ находится сухая зона, не заполненная жидкостью разрыва (lag в англоязычной научной литературе [8 и др.]). Давление $p(x, t)$ в этой сухой зоне равно нулю, граница сухой зоны определяется из условия обращения в нуль давления $p(x, t)$ на границе «жидкость – сухая зона». Таким образом, уравнение (14) для безразмерной функции $\Pi(\xi)$ в автомодельной переменной $\xi = l(t) - x$ следует переписать в виде

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} -1, & 0 < \xi < d, \\ \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\eta}{\Omega^2(\eta)}, & d < \xi < \infty. \end{cases} \quad (42)$$

Уравнение (15) и условия (16), (17) разрушения линейного упругого тела при этом не меняются, и их можно сохранить в прежнем виде.

Безразмерный параметр k является единственным параметром данной автомодельной задачи, а неизвестная величина d находится из условия непрерывности функции $\Pi(\xi)$ при $\xi = d$, т. е.

$$\int_{\infty}^d \frac{d\eta}{\Omega^2(\eta)} = -1. \quad (43)$$

Если, подобно тому как это было сделано в п. 3.2, провести асимптотический анализ поведения решения при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$, то обнаружится, что наличие сухой зоны не меняет асимптотик $\Omega(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$, т. е. **ВНОВЬ**

$$\Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + o(\xi^{1/2}), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (44)$$

$$\Omega(\xi) = c\xi^{2/3} + o(\xi^{2/3}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (45)$$

В этом случае аппроксимация $\Omega(\xi)$ во всём диапазоне $0 < \xi < \infty$ функцией

$$\tilde{\Omega}(\xi) = k\sqrt{\xi} + c\xi^{2/3} \quad (46)$$

позволяет записать для $\Pi(\xi)$ следующее представление:

$$\tilde{\Pi}(\xi) = \begin{cases} -1, & 0 < \xi < d, \\ \frac{6}{k^2} \left(\ln \frac{\alpha t}{\alpha t + 1} + \frac{1}{\alpha t + 1} \right), & d < \xi < \infty, \end{cases} \quad (47)$$

где $\alpha = c/k$; $\xi = t^6$.

Таким образом, приближенная оценка размера сухой зоны d будет найдется из следующего уравнения:

$$\ln \frac{\alpha T}{\alpha T + 1} + \frac{1}{\alpha T + 1} = -\frac{k^2}{6}, \quad (48)$$

где $d = T^6$.

Уравнение (48) является трансцендентным уравнением, описывающим зависимость $d(k)$, и может быть решено только численно. Простые асимптотические решения этого уравнения легко находятся при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$. Так, при $k \rightarrow 0$, разлагая левую часть (48) в ряд по малой величине $(\alpha T)^{-1}$, получаем, что $(\alpha T)^{-1} = k/\sqrt{3}$, т. е. $T = \sqrt{3}/c$, или $d = (\sqrt{3}/(18\sqrt{3})^{1/3})^6 = 1/36$. Следовательно, при $k \rightarrow 0$ размер сухой зоны становится слабо зависящим от величины k и может быть оценен как $d \approx 0,03$.

Аналогично, при $k \rightarrow \infty$ величина αT становится малой и уравнение (48) будет иметь решение $T = (k/c)e^{-k^2/6}$ или $d = (k/c)^6 e^{-k^2} \approx 1,03 \cdot 10^{-3} k^6 e^{-k^2}$. Как видим, с возрастанием k величина $d(k)$ убывает и при больших значениях k становится пренебрежимо малой, т. е. наличием сухой зоны у вершины трещины можно пренебречь.

Полученная зависимость $d(k)$, определяемая из уравнения (48), изображена на рис. 4 и соответствует результатам численного анализа, выполненного в работе [8].

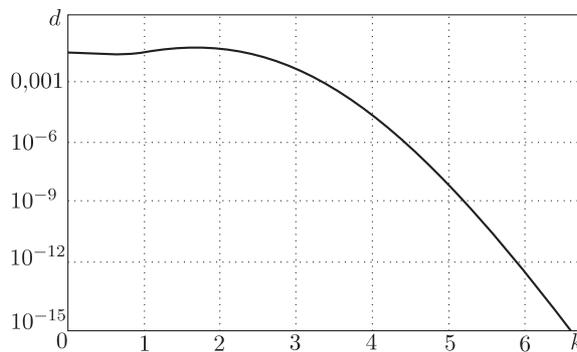


Рис. 4. Зависимость размера сухой зоны d от безразмерной трещиностойкости k

Заключение. Выполненный асимптотический анализ решения задачи о росте трещины ГРП показал, что рассмотрение полубесконечной трещины позволяет установить особенности поведения решения у вершины трещины, но не позволяет оценить влияние скорости закачки $Q_0(t)$ и давления $p_0(t)$ на характер роста трещин, так как в этом случае необходимо рассматривать трещину конечной длины. Из полученного решения для функции $w(x, t)$ видно, что особенности постановки данной задачи (по существу, это связанная задача «жидкость — твёрдое тело») уточняет форму раскрытия трещины по сравнению с традиционными подходами линейной механики разрушения.

Связанность постановки задачи проявилась ещё и в том, что в любой трещине ГРП обнаруживается наличие «сухой зоны», примыкающей к вершине трещины. При больших значениях параметра k её влияние несущественно, но по мере уменьшения k её значимость возрастает, и наличием этой «сухой зоны» нельзя пренебрегать в постановке задач о росте трещин ГРП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Желтов Ю. П. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // *Изв. АН СССР. ОН.*, 1955. — № 5. — С. 3-41.
2. Лойцянский А. Г. *Механика жидкости и газа.* — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
3. Партон В. З., Перлин П. И. *Интегральные уравнения теории упругости.* — М.: Наука,

1977. — 312 с.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
 5. Garagash D., Detournat E. The Tip Region of a Fluid-Driven Fracture in an Elastic Medium // *J. Appl. Mech.*, 2000. — Vol. 67, No. 1. — P. 183-192.
 6. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеоздат, 1982. — 256 с.
 7. Пергамент А. Х., Улькин Д. А. Автомодельные асимптотики в задаче о распространении трещины гидроразрыва в плоско-деформированной среде: Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. — М., 2007. — 31 с.
 8. Garagash D., Detournat E. Similarity solution of a semi-infinite fluid-driven fracture in a linear elastic solid // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 1998. — Vol. 326, No. 5. — P. 285-292.
 9. Астафьев В. И., Федорченко Г. Д. Автомодельное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2007. — № 4(54). — С. 34-41.
 10. Зазовский А. А., Одишария М. Г., Песляк Ю. А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1986. — № 5. — С. 92-100.
 11. Райс Д. Ж. Математические методы в механике разрушения / В сб.: *Разрушение*: Т. 2: Математические основы теории разрушения; ред. Г. Либовиц. — М.: Мир, 1975. — С. 204-335.

Поступила в редакцию 19/IV/2010;
в окончательном варианте — 19/VIII/2010.

MSC: 74R10, 74F10, 74B05, 74G70

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF HYDRAULIC FRACTURE CRACK PROCESS GROWTH

V. I. Astafiev

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University
(National Research University), Faculty of Aircraft Construction,
34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russia.

E-mail: vlast@ssu.samara.ru

In this work the self-similar solution of a problem of propagation of hydraulic fracture crack is presented. It is proposed that a crack is focused vertically and research of its development process is analyzed within the coupled problem of the hydrodynamics theory (flow of viscous fluids) and the linear theory of elasticity (fracture crack growth). Asymptotics of the self-similar solution at the long and small distances from tip of a crack were obtained. Simple approximations of the solution in all length range are offered.

Key words: hydraulic fracture crack, self-similar solution, asymptotical analysis.

Original article submitted 19/IV/2010;
revision submitted 19/VIII/2010.

Vladimir I. Astafiev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Theoretical Mechanics.