

УДК 539.3:517.95:534.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. П. Дьяченко¹, Э. Я. Еленицкий², Д. В. Петров¹

¹ Самарский государственный университет, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

² Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mails: dyachenko Yuri@yandex.ru, elenit@list.ru, den51413@gmail.com

Предлагается методика точного (в рамках сформулированных допущений) нестационарного динамического расчёта конструируемых систем ступенчато-переменной толщины. При этом расчётная схема учитывает смещения срединных поверхностей сопрягаемых элементов. Аналитическое решение иллюстрируется результатами расчётов фундаментной части водонапорной плотины ГЭС при действии гидравлического удара и динамической реакцией составной круговой оболочки вращения при её импульсном нагружении.

Ключевые слова: нестационарные задачи, метод начальных параметров, конечное интегральное преобразование, плита переменного сечения, цилиндрическая оболочка.

Введение. Одним из эффективных аналитических методов решения нестационарных задач динамики для составных конструкций в замкнутой форме является метод непосредственного интегрирования и, в частности, его реализация в форме метода начальных параметров. Важное теоретическое и практическое значение имеет случай, когда рассматриваемая конструкция имеет переменную толщину, изменяющуюся непрерывно или ступенчато. Однако возможность применения такого аналитического подхода для решения нестационарных задач связана, в первую очередь, с необходимостью обеспечения условия ортогональности разложений, получаемых в результате разделения переменных. Другая особенность применения метода начальных параметров заключается в том, что в процессе интегрирования дифференциальных уравнений движения отдельных элементов системы получаются общие решения, содержащие как быстро возрастающие, так и быстро убывающие функции. В результате разрешающая система алгебраических уравнений для определения собственных значений оказывается плохо обусловленной. Отмеченные трудности удается устранить, если использовать метод ортогонализации С. К. Годунова и различные варианты метода прогонки [1–3]. При этом применение этих методов ограничивалось исследованием только свободных колебаний симметричных систем.

Авторами предлагается подход, позволяющий получать в замкнутой форме решения нестационарных задач динамики пластин и оболочек вращения ступенчато-переменной толщины с конечной сдвиговой жёсткостью (теория

Дьяченко Юрий Петрович (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. математического моделирования в механике. *Еленицкий Эдуард Яковлевич* (к.т.н., доцент), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики. *Петров Денис Владиславович*, студент, каф. математического моделирования в механике.

типа С. П. Тимошенко). В отличие от традиционной схемы применения метода начальных параметров (когда начальные параметры имеют физический смысл перемещений и усилий), здесь в качестве последних используются произвольные константы одного из участков плиты (или оболочки) ступенчато-переменной толщины. Так же как и в [4], срединные плоскости соединяемых участков (пластин или оболочек) могут быть смещены относительно друг друга. При этом в математической модели учитывается механизм взаимного влияния компонент напряжённо-деформированного изгибного и мембранного состояний элементов. В предлагаемом алгоритме используются точные решения динамических задач для гладкой пластины и гладкой цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жёсткостью [5, 6].

1. Математическая формулировка задачи. Математическая формулировка задачи для составной конструкции аналогична задаче для отдельного её элемента. Эта постановка должна содержать дифференциальные уравнения движения каждого участка конструкции, начальные и граничные условия. При этом последние должны содержать как краевые условия на внешних кромках составной конструкции, так и условия сопряжения её участков.

Для иллюстрации предлагаемой методики расчёта рассмотрим два примера конструируемых систем.

Сначала рассмотрим плиту ступенчатого сечения, состоящую из n элементов и имеющую шарнирное опирание на краях $x = 0$, $x = l$ и произвольное — на гранях $y = 0$, $y = L$. Считаем, что конструкция лежит на упругом основании с коэффициентом постели γ и j -тый элемент плиты загружен произвольными динамическими нагрузками $\vec{P}_j(x, y, t)$ (рис. 1).

Напряжённо-деформированное состояние участков плиты определяются векторами

$$\vec{D}_j(x, y, t) = [U_j, V_j, W_j, \alpha_{xj}, \alpha_{yj}]^T, \quad \vec{F}_j(x, y, t) = [N_{xj}, S_j, Q_{xj}, M_{xj}, M_{yj}]^T,$$

$$\vec{\Lambda}_j(x, y, t) = [\vec{D}_j, \vec{F}_j]^T, \tag{1}$$

где \vec{D}_j , \vec{F}_j — соответственно вектор-функции перемещений и усилий, отнесённых к срединной поверхности j -того участка, $j = 1, 2, \dots, n$.

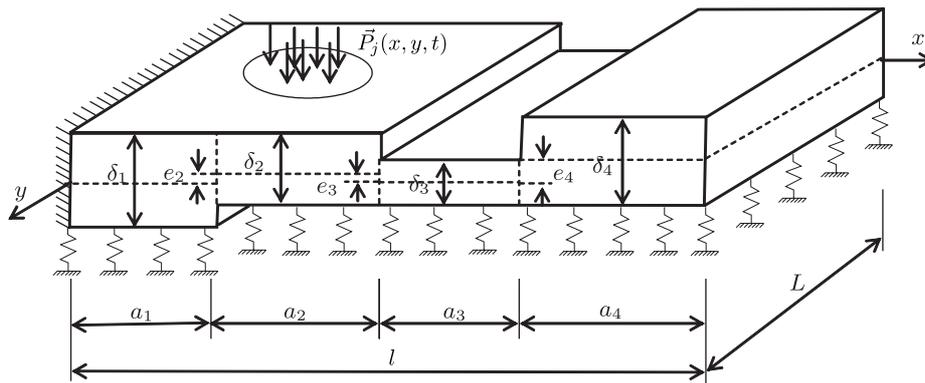


Рис. 1. Схема прямоугольной плиты ступенчато-переменной толщины

Математическая формулировка задачи для составной конструкции при нулевых начальных условиях в стандартной форме имеет вид

$$\left(L_j + G_j \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{D}_j(x, y, t) = \vec{P}_j(x, y, t), \quad (2)$$

$$\vec{D}_j(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{D}_j(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\Lambda}_{j-1}(x, a_{j-1}, t) = B_j \vec{\Lambda}_j(x, 0, t), \quad (4)$$

где Λ_j — матрица дифференциальных операторов в частных производных, G_j — диагональная матрица инерционных коэффициентов. Элементы этих матриц приведены в работе [5]. Равенства (4) представляют кинематические и статические условия сопряжения смежных элементов, взаимное смещение e_j которых учитывается матрицей B_j .

В качестве второго примера рассмотрим составную цилиндрическую круговую оболочку вращения ступенчатого сечения (рис. 2), состоящую из n элементов. Считаем, что e -тый участок оболочки загружен произвольными осесимметричными динамическими нагрузками $\vec{P}_e(x, t)$. Напряжённо-деформированное состояние цилиндра определяется следующими векторами:

$$\vec{V}_e(x, t) = [U_e, W_e, \Psi_e]^\top, \quad \vec{F}_e(x, t) = [N_{ex}, Q_{ex}, M_{ex}]^\top,$$

$$\vec{\Lambda}_e(x, t) = [\vec{V}_e, \vec{F}_e]^\top, \quad (5)$$

где U_e, W_e, Ψ_e — компоненты вектора перемещений \vec{V}_e ; N_{ex}, Q_{ex}, M_{ex} — компоненты вектора усилий \vec{F}_e .

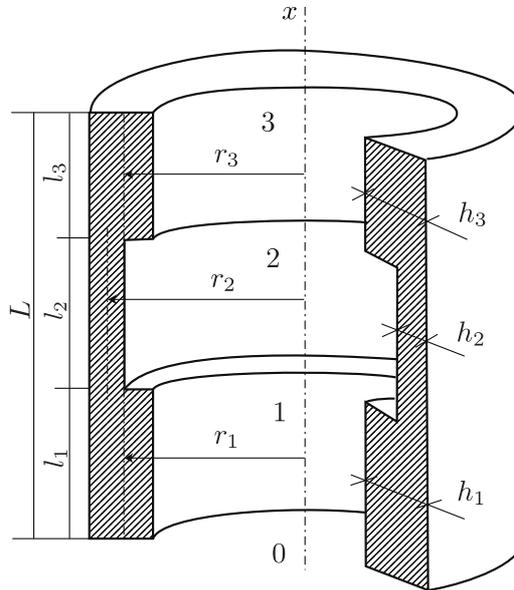


Рис. 2. Схема цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины

Математическая формулировка задачи для составной конструкции при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\left(L_e + G_e \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{V}_e(x, t) = \vec{P}_e(x, t), \quad (6)$$

$$\vec{V}_e(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{V}_e(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\Lambda}_e(0, t) = B_{e-1} \vec{\Lambda}_{e-1}(l_{e-1}, t), \quad (8)$$

где L_e, G_e — соответственно матрица линейных дифференциальных операторов в частных производных по x и диагональная матрица инерционных коэффициентов, которые определяются формулами [6]:

$$\begin{aligned} L_{e11} &= D_{e1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & L_{e12} &= D_{e1} \frac{\nu}{r_e} \frac{\partial}{\partial x}, & L_{e13} &= 0, \\ L_{e21} &= -D_{e1} \frac{\nu}{r_e} \frac{\partial}{\partial x}, & L_{e22} &= D_{e1} \left[\frac{\kappa(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r_e^2} \right], & L_{e23} &= -D_{e1} \frac{\kappa(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{e31} &= 0, & L_{e32} &= D_{e1} \frac{\kappa(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x}, & L_{e33} &= D_{e2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_{e1} \frac{\kappa(1-\nu)}{2}, \\ G_{e11} &= \rho_e J_{e1}, & G_{e12} &= G_{e13} = G_{e21} = 0, & G_{e22} &= \rho_e J_{e1}, \\ G_{e23} &= G_{e31} = G_{e32} = 0, & G_{e33} &= \rho_e J_{e2}. \end{aligned}$$

Здесь $D_{e1}, D_{e2}, J_{e1}, J_{e2}$ — соответственно жёсткость растяжения, цилиндрическая жёсткость, площадь сечения и момент инерции сечения оболочки; r_e — радиус цилиндра; ν, κ — коэффициенты Пуассона и сдвига.

Равенства (8) представляют кинематические и статические условия сопряжения смежных элементов с номерами $(e-1)$ и e , взаимное смещение ε_{e-1} которых учитывается матрицей B_{e-1} [4, 5].

Для замкнутой формулировки задачи к соотношениям (7)–(9) необходимо добавить условия, соответствующие конкретным способам закрепления торцевых концов цилиндрической оболочки ($x=0, x=L$).

2. Построение общего решения рассматриваемых задач для произвольного динамического воздействия. Сравнивая математические формулировки этих двух задач, видим, что визуально формулы (1)–(4) и (5)–(8) идентичны. Покажем возможность интегрирования начально-краевой задачи (1)–(4) путём применения метода начальных параметров в сочетании с методом конечных интегральных преобразований.

Принятые условия шарнирного опирания на краях $x=0, x=l$ позволяют использовать синус- и косинус-преобразования Фурье по переменной x :

$$\vec{\Lambda}_{jk}^f(y, t) = \int_0^{a_j} \Phi_k(x) \vec{\Lambda}_j(x, y, t) dx, \quad \vec{\Lambda}_j = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \vec{\Lambda}_{jk}^f, \quad (9)$$

где $\Phi_k(x)$ — диагональная матрица синусов и косинусов аргумента $k\pi x/l = \tau$.

В результате применения преобразования (9) к исходной начально-краевой задаче, соотношения (1)–(4) принимают вид

$$\vec{\Lambda}_{jk}^f(y, t) = \left[\vec{D}_{jk}^f, \vec{F}_{jk}^f \right]^T,$$

$$\left(L_{jk} + G_j \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{D}_{jk}^f(y, t) = \vec{P}_{jk}^f(y, t), \quad (10)$$

$$\vec{D}_{jk}^f(y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{D}_{jk}^f(y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

$$\vec{\Lambda}_{j-1,k}^f(a_{j-1}, t) = B_j \vec{\Lambda}_{jk}^f(0, t), \quad (12)$$

$$\vec{P}_{jk}^f(y, t) = \int_0^l \Phi_k(x) \vec{P}_j(x, y, t) dx.$$

Аналогичная процедура должна быть применена также для соответствующих граничных условий на рёбрах $y = a_0$ для первого участка, $y = a_n$ — для последнего участка конструкции.

С целью дальнейшего разделения переменных задачи (10)–(12) введём на сегментах $[0, a_j]$ конечное интегральное преобразование по переменной y :

$$\varphi(\lambda_{ki}, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{D}_{jki}^\top(\lambda_{ki}, y) G_j \vec{D}_{jk}^f(y, t) dy, \quad (13)$$

$$\vec{\Lambda}_{jk}(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ki}, t) \vec{\Lambda}_{jki}(\lambda_{ki}, y) \|Z_{ki}\|^{-2}. \quad (14)$$

Здесь выражение (13) — прямое преобразование, (14) — формула обращения, справедливая при выполнении обобщённого условия ортогональности:

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{\Lambda}_{jki}^\top(\lambda_{ki}, y) G_j \vec{\Lambda}_{jkm}(\lambda_{mk}, y) dy = \begin{cases} \|Z_{ik}\|^{-2}, & \text{при } i = m; \\ 0, & \text{при } i \neq m. \end{cases}$$

Применяя преобразование (13) к уравнениям (10) и начальным условиям (11), приходим к зависимостям

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{D}_{jki}^\top \left(L_{jk} + G_{jk} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{D}_{jk}^f dy = p(\lambda_{ki}, t), \quad (15)$$

$$\varphi(\lambda_{ki}, 0) = 0, \quad \dot{\varphi}(\lambda_{ki}, t)|_{t=0} = 0, \quad (16)$$

где $p(\lambda_{ki}, t)$ — трансформанта нагрузки, определяемая формулой

$$p(\lambda_{ki}, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^{a_j} \vec{D}_{jki}^\top \vec{P}_{jk}^f(y, t) dy.$$

Использование двух условий структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований [5] приводит зависимость (15) к следующему виду:

$$\ddot{\varphi}(\lambda_{ki}, t) + \lambda_{ki}^2 \varphi(\lambda_{ki}, t) = p(\lambda_{ki}, t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Уравнение (17) с учётом начальных условий (16) представляет счётную задачу Коши для каждого тона колебаний, решение которой записывается в форме определённого интеграла.

Использование особого приёма в преобразовании выражений для внеинтегральных членов, появляющихся при применении метода конечных интегральных преобразований, позволяет получить условия, при которых их сумма обращается в нуль. Эти условия в матричной форме имеют вид

$$\vec{\Lambda}_{j-1,ki}(a_{j-1}) = B_j \vec{\Lambda}_{jki}(0), \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (18)$$

Полученные равенства (18) являются инвариантными к исходным краевым условиям (4) и обеспечивают обобщённую ортогональность разложения (14).

В процессе преобразования выражения (15) также получены дифференциальные уравнения для форм колебаний системы, которые совместно с граничными условиями и представляют ядровую задачу по определению собственных функций разложения (14). Интегралы полученных дифференциальных уравнений могут быть представлены в матричной форме:

$$\vec{\Lambda}_{jki} = A_{jki} \vec{C}_{jki}, \quad (19)$$

где A_{jki} — матрица общих решений однородных уравнений, \vec{C}_{jki} — вектор-столбец произвольных постоянных. Подставляя (19) в (18) и выполняя стандартные процедуры метода начальных параметров, выражаем искомые векторы \vec{C}_{jki} произвольного j -того элемента плиты через аналогичный вектор первого участка, то есть

$$\vec{C}_{jki} = \left\{ \prod_{m=2}^j [B_m A_{mki}(0)]^{-1} A_{m-1ki}(a_{m-1}) \right\} \vec{C}_{1ki}. \quad (20)$$

Заметим, что при наличии соотношения (20), достаточно сформулировать краевые условия на границах плиты ($y = 0$ при $j = 1$, $y = a_n$ при $j = n$), что соответствует десяти граничным условиям задачи и обеспечивает замкнутую форму её решения.

При применении метода разделения переменных для интегрирования начально-краевой задачи (5)–(8) укажем другой путь, отличный от изложенного выше. С этой целью предварительно рассмотрим свободные колебания системы, полагая $\vec{P}_e(x, t) = 0$. Используя известные процедуры получения решения в форме стоячих волн, приходим к системе однородных дифференциальных уравнений

$$(\tilde{L}_{ei} - \omega_i^2 G_e) \vec{V}_{ei}(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Соотношения (21) получены в результате представления вектора (5) в виде

$$\vec{\Lambda}_e(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Lambda}_{ei}(x) T_i(t), \quad (22)$$

где T_i — скалярные функции времени, общие для всех участков цилиндра; $\vec{\Lambda}_{ei}(x)$ — функции форм перемещений и усилий свободных колебаний e -того

элемента, определяемые как линейные комбинации известных частных решений однородных уравнений (21). Подставляя разложение (22) в (6), получаем с учётом зависимостей (21) следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i) G_e \vec{V}_{ei} = \vec{P}_e(x, t). \quad (23)$$

Умножим каждую строку формул (23) соответственно на \vec{U}_{ei} , \vec{W}_{ei} , $\vec{\Psi}_{ei}$, проинтегрируем полученные равенства по длине каждого элемента и просуммируем отдельно левые и правые части. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i) R_{ij} = p_j(t), \quad (24)$$

где

$$R_{ij} = \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \vec{V}_{ej}^T G_e \vec{V}_{ei} dx, \quad p_j = \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \vec{V}_{ej}^T \vec{P}_e dx.$$

Применяя аналогичную процедуру к условиям (7), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_{ij} T_i(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} R_{ij} \dot{T}_i(t)|_{t=0} = 0. \quad (25)$$

Соотношение обобщённой ортогональности собственных форм колебаний конструкции в данном случае принимает вид

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) R_{ij} = 0, \quad i \neq j. \quad (26)$$

Левая часть равенства (26) с учётом (21) может быть представлена следующим образом:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) R_{ij} = \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} (\vec{V}_{ei}^T \tilde{L}_e \vec{V}_{ej} - \vec{V}_{ej}^T \tilde{L}_e \vec{V}_{ei}) dx. \quad (27)$$

Выполняя интегрирование по частям первого слагаемого в правой части (27), получим

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) R_{ij} = \sum_{e=1}^n (\vec{V}_{ei}^T \vec{F}_{ej} - \vec{V}_{ej}^T \vec{F}_{ei})|_0^{l_e}.$$

В результате подстановки пределов интегрирования и перегруппировки слагаемых приходим к зависимостям

$$\vec{\Lambda}_{ei}(0) = B_{e-1} \vec{\Lambda}_{ei}(l_{e-1}), \quad (28)$$

которые являются инвариантными по отношению к исходным краевым условиям (8) и обеспечивают ортогональность разложения (22). Подстановка равенства (26) в (24), (25) приводит к задаче Коши для каждого i -того тона колебаний. В результате имеем

$$\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i = p_i(t)/R_{ii}$$

с однородными условиями при $t = 0$:

$$T_i(0) = 0, \quad \dot{T}_i(t)|_{t=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, все компоненты разложения (22) определяются на основе интегрирования уравнений для линейного осциллятора и решения краевой задачи Штурма—Лиувилля (21), (28).

Частные интегралы дифференциальных уравнений (21) известны [6]. Представим эти результаты в матричной форме

$$\vec{\Lambda}_{ei}(x) = A_{ei}(x)\vec{C}_{ei}, \quad (29)$$

где A_{ei} — частные решения (21), записанные в элементарных функциях; \vec{C}_{ei} — вектор произвольных постоянных, имеющий вид

$$\vec{C}_{ei} = [C_{ei1}, C_{ei2}, C_{ei3}, C_{ei4}, C_{ei5}, C_{ei6}]^T.$$

Подставим соотношения (29) в условия сопряжения (28) и выполним стандартные процедуры метода начальных параметров, связанные с представлением вектора \vec{C}_{ei} произвольной ступени цилиндра через аналогичный вектор первого участка

$$\vec{C}_{ei} = \left[\prod_{m=2}^e B_m^{-1} A_{mi}(0) \right] \vec{C}_{1i}.$$

Заметим, что при наличии соотношений (29) достаточно сформулировать шесть краевых условий на торцах оболочки, что обеспечивает замкнутую форму решения задачи.

Предлагаемая интерпретация метода начальных параметров при решении нестационарных динамических задач конструируемых систем ступенчато-переменного сечения не приводит к появлению в решении функций, имеющих быстро возрастающие и быстро убывающие составляющие. В результате отпадает необходимость в процедуре ортогонализации решения, как это делается в рамках метода С. К. Годунова [2], А. А. Абрамова [3] и других авторов только для симметричных систем при их свободных колебаниях.

Из-за ограниченности объема статьи приведём результаты расчёта по предлагаемой методике для цилиндрической оболочки, представляющей собой матрицу взрывной штамповки (см. рис. 2), имеющей жёсткое закрепление по концам. Нагрузка моделировалась следующим выражением [7]:

$$P_e(t) = P_0 \exp(-\theta t), \quad e = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Расчёты выполнены в двух вариантах для следующих исходных данных: $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ м, $h_1 = h_3 = 0,2$ м, $h_2 = 0,1$ м, $r_1 = r_3 = 0,9$ м, $r_2 = 0,95$ м, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0,05$ м, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³, $\nu = 0,16$, $\kappa = 0,86$, $P_0 = 10^3$ кН, $\theta = 1200$ 1/с.

Вариант 1 соответствует конструкции с гладкой наружной поверхностью, вариант 2 — симметричному изменению поперечного сечения составного цилиндра. В таблице приведена низкочастотная часть спектра свободных колебаний сооружения для обоих случаев.

Спектр частот свободных колебаний конструкции

Номер тона	Частота, кГц (вариант 1)	Частота, кГц (вариант 2)
1	0,924	0,957
2	0,938	0,959
3	1,068	1,100
4	1,264	1,294
5	1,475	1,529
6	1,893	1,974
7	2,346	2,425
8	2,702	2,775
9	3,188	3,318
10	3,785	3,894

Сравнение результатов показывает, что учёт в расчётной схеме смещения срединных поверхностей цилиндрических оболочек (вариант 1) приводит к снижению всех собственных значений системы, которое для основного тона колебаний составляет 3,6%. В вычислениях напряжённо-деформированного состояния конструкции при действии нестационарной нагрузки (30) удерживалось двадцать тонов колебаний, что обеспечивало точность расчётов в $1 \div 3\%$.

На рис. 3 приведены формы основного тона и первого обертона колебаний системы \tilde{W}_{e1} и \tilde{W}_{e2} , эпюра прогибов W_e и перемещений вдоль образующей U_e срединных поверхностей элементов, а также эпюры усилий Q_{ex} , M_{ex} , $N_{e\theta}$, построенные вдоль образующей составного цилиндра в момент времени $t = t_1 = 4,3 \cdot 10^{-4}$ с. Сплошным и штриховым линиям соответствуют ре-

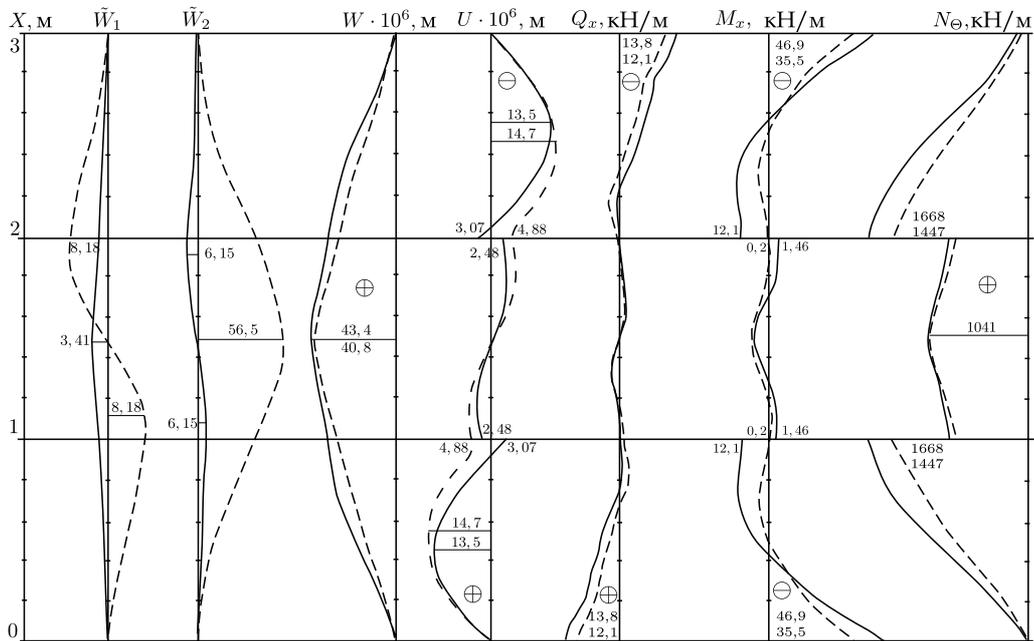


Рис. 3. Формы свободных колебаний, эпюры перемещений и усилий составного цилиндра

зультаты первого и второго вариантов расчёта. Как видно из первых двух графиков рис. 3, изгибные формы первых двух тонов колебаний системы для сравнительных случаев меняются местами. Поскольку все формы нормальных перемещений не имеют скачков на границах участков, на эюре W_e разрывы также отсутствуют. Однако эюра перемещений U_e существенным образом зависит от наличия смещений срединных поверхностей элементов. Эта особенность приводит к повышению уровня напряжённого состояния составной оболочки. Так, например, увеличение максимальных значений кольцевых усилий для сравниваемых вариантов составляет 13,25 %. Отмеченное обстоятельство следует учитывать при проектировании конструкции.

Анализ осциллограмм усилий и перемещений показал, что закон изменения этих функций во времени соответствует закону изменения давления на оболочку. После снятия нагрузки её уровень напряжённо-деформированного состояния значительно падает.

В заключение следует отметить, что описанные в статье подходы имеют достаточно универсальный характер и могут быть использованы для нестационарного динамического расчёта различных стержневых, пластинчатых и оболочечных систем ступенчатого сечения.

Авторы выражают благодарность за поддержку на конференции «Математическая физика и её приложения – 2010» лабораторией математической физики СамГУ, грантами АВЦП 3341 и 10854 и контрактом ФЦП 2173.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972. 416 с. [*Biderman V. L.* Applied Theory of mechanical vibrations. Moscow: Vyssh. shk., 1972. 416 pp.]
2. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *УМН*, 1961. Т. 16, №3(99). С. 171–174. [*Godunov S. K.* Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961. Vol. 16, no. 3(99). Pp. 171–174].
3. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // *Ж. вычисл. мат. и мат. физики*, 1961. Т. 1, №3. С. 542–545; англ. пер.: *Abramov A. A.* On the transfer of boundary conditions for systems of ordinary linear differential equations (a variant of the dispersive method) // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1962. Vol. 1, no. 3. Pp. 617–622.
4. *Еленицкий Э. Я., Дьяченко Ю. П.* Свободные колебания прямоугольной пластины ступенчатого сечения с конечной сдвиговой жёсткостью / В сб.: *Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений*; ред. Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. С. 17–20. [*Elenitskiy É. Ya., D'yachenko Yu. P.* Free vibrations of a rectangular plate stepped section with finite shear stiffness / In: *Problems with free boundaries and nonlocal problems for nonlinear parabolic equations*; eds. Yu. A. Mitropol'skiy, A. A. Berezovskiy. Kiev: In-t Matematiki NAN Ukrainy, 1996. Pp. 17–20].
5. *Дьяченко Ю. П.* Метод расчёта нестационарного воздействия на прямоугольные пластины ступенчато-переменной толщины // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонауч. сер.*, 2008. №2(61). С. 136–159. [*D'yachenko Yu. P.* A method for computing the unsteady action on rectangular plates of stepwise varying thickness // *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 2(61). Pp. 136–159].
6. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Итоги науки и техники. Механика твёрдых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с. [*Grigolyuk E. I., Selezov I. T.* Nonclassical theories of rod, plate, and

shell vibrations / Results in Science and Technology. Mechanics of Deformable Solids. Vol. 5. Moscow: VINITI, 1973. 272 pp.]

7. Динамический расчёт сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика / ред. Б. Г. Корнев, И. М. Рабинович. М.: Стройиздат, 1981. 215 с. [Dynamic calculation of structures for special actions: Designer's Handbook / eds. B. G. Korenev, I. M. Rabinovich. Moscow: Stroyizdat, 1981. 215 pp.]

Поступила в редакцию 21/XII/2010;
в окончательном варианте — 22/III/2011.

MSC: 35Q74; 74K20, 74K25

NON-STATIONARY PROBLEMS OF THE DYNAMICS OF STEPPED SECTION PLATES AND ROTATION CYLINDRICAL SHELLS

*Y. P. D'yachenko*¹, *É. J. Elenitskiy*², *D. V. Petrov*¹

¹ Samara State University,

1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

² Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mails: dyachenkoyuri@yandex.ru, elenit@list.ru, den51413@gmail.com

The technique of exact non-stationary dynamic calculation of compound designed systems of in steps-variable thickness a method initial parameters is offered. The settlement scheme considers displacement of median surfaces of interfaced elements. As an example calculation of base plate of a dam GES and matrices of explosive punching is resulted at pulse influence.

Key words: *non-stationary problems, method of initial parameters, plate of step section, cylindrical shells.*

Original article submitted 21/XII/2010;
revision submitted 22/III/2011.

Yuriy P. D'yachenko (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematical Methods in Mechanics. *Éduard J. Elenitskiy* (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Resistance of Materials and Constructional Mechanics. *Denis V. Petrov*, Student, Dept. of Mathematical Methods in Mechanics.