Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 117–124

УДК 539.376

ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОГО РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ОТКАЗА

Н. Н. Попов, Г. А. Павлова, М. В. Шершнева

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: ponick25@gmail.com

На основе обобщения детерминированных уравнений ползучести Ю. Н. Работнова с одним структурным параметром построены соответствующие стохастические уравнения, описывающие процесс ползучести материала вплоть до разрушения. Разработана методика расчёта вероятности безотказной работы и назначения по ней ресурса стохастически неоднородных стержневых элементов конструкций по критерию выбросов случайных функций. Предложен метод определения остаточного ресурса конкретного изделия по условной вероятности безотказной работы.

Ключевые слова: *ползучесть, стохастически неоднородный элемент конструкции, длительная прочность, вероятность безотказной работы, остаточный ресурс.*

При длительном действии нагрузок и повышенной температуре с некоторого момента времени скорость ползучести начинает возрастать (третья стадия ползучести), и процесс ползучести заканчивается разрушением. Материал стержня будем считать стохастически неоднородным, так что время до разрушения стержня будет являться случайной величиной.

Рассмотрим надёжность единичного стержня по критерию длительной прочности при одноосном растяжении.

Наиболее полно описывают процесс ползучести материала вплоть до разрушения кинетические уравнения Работнова [1], которые при постоянной температуре для одноосного нагружения имеют вид

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma, \omega); \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega), \tag{1}$$

где ε — деформация ползучести; σ — напряжение; ω — структурный параметр, характеризующий меру повреждённости материала, причём $\omega = 0$ соответствует неповреждённому материалу, а $\omega = 1$ — наличию макроскопической трещины. Точка означает дифференцирование по времени. Для описания ползучести в отсутствие стадии упрочнения чаще всего используют уравнения (1) в виде простых степенных зависимостей [2]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{a\sigma^n}{(1-\omega)^n}, \quad \dot{\omega} = \frac{b\sigma^k}{(1-\omega)^k}. \tag{2}$$

Николай Николаевич Попов (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Галина Александровна Павлова* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Мария Викторовна Шершнева*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

В силу стохастической неоднородности материала стержня предполагаем, что в формуле (2) постоянные n и k являются детерминированными, а a и b — случайными.

Деформации ползучести считаем малыми настолько, чтобы можно было пренебречь изменением площади поперечного сечения вплоть до разрушения, при этом напряжение σ не будет зависеть от времени.

Для оценки параметров уравнения (2) и расчёта на их основе вероятности безотказной работы изделия были использованы результаты испытаний на ползучесть 21 образца из стали 12Х18Н10Т при четырёх уровнях напряжения $\sigma = 40$, 50, 60, 80 МПа при температуре $\theta = 850\,^\circ$C, представленные в [2]. Значение параметра n в уравнении (1), вычисленное в [2], равно 3,2, а числовые характеристики случайной величины a оказались следующими: $\langle a\rangle = 9{,}922 \cdot 10^{-6}$, $\mathtt{D}[a] = 4{,}431 \cdot 10^{-12}$.

Для определения в (2) параметров длительной прочности b и k известным способом (см. подробности в [2]) было вычислено время до разрушения

$$t_p = \frac{1}{b(1+k)\sigma^k}. \tag{3}$$

После логарифмирования (3):

$$-\ln t_p = \ln(b(1+k)) + k\ln\sigma$$

к полученному уравнению был применён метод наименьших квадратов и найдена 21 пара значений k и b. По этим значениям были вычислены их математические ожидания: $\langle k\rangle = 2{,}989$, $\langle b\rangle = 11{,}478 \cdot 10^{-5}$, среднеквадратические отклонения: $S_k = 0{,}407$, $S_b = 11{,}145 \cdot 10^{-5}$ и коэффициенты вариации: $v_k = S_k/\langle k\rangle = 0{,}136$, $v_b = S_b/\langle b\rangle = 0{,}971$.

Так как коэффициент вариации является относительной характеристикой разброса и v_b в 7,14 раз больше v_k, то разбросом величины k можно пренебречь. Другими словами, величину k можно считать детерминированной и положить $k = \langle k\rangle = 2{,}989$. После этого, корректируя числовые характеристики случайной величины b, получаем $\langle b\rangle = 8{,}566 \cdot 10^{-5}$, $\mathtt{D}[b] = 7{,}281 \cdot 10^{-10}$. Далее закон распределения случайных величин a и b будем считать нормальным.

Исчерпание ресурса изделий связано с постепенным накоплением повреждений при пластическом деформировании, ползучести, усталости, износе и т. п. Для математического описания этого процесса используют параметрические модели отказов. Сущность этих моделей состоит в том, что исходя из условий работы изделия выделяются параметры, определяющие его работоспособность, и устанавливаются допустимые области, в которых эти параметры могут изменяться, при этом выход параметров за пределы допустимой области интерпретируется как отказ. При таком подходе вероятность безотказной работы определяется как вероятность того, что на заданном отрезке времени все параметры работоспособности пребывают в допустимой области.

Параметром работоспособности стержневых элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, будем считать накопленную деформацию ползучести $\varepsilon(t)$. Условие безотказной работы элемента конструкции возьмём в виде

$$\varepsilon(t)/\varepsilon^* < 1, \tag{4}$$

где ε^* — деформация ползучести в момент разрушения.

В работе [2] для $\varepsilon(t)$ и ε^* получены следующие соотношения:

$$\varepsilon(t) = \frac{a\sigma^{n-k}}{b\,(k+1-n)}\left[1 - \Bigl(1 - b(k+1)\sigma^k t\Bigr)^{(k+1-n)/(k+1)}\right], \tag{5}$$

$$\varepsilon^*(t) = \frac{a\sigma^{n-k}}{b\,(k+1-n)},$$

поэтом условие (4) можно записать так:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^*} = 1 - \Bigl(1 - b(k+1)\sigma^k t\Bigr)^{(k+1-n)/(k+1)} < 1,$$

что эквивалентно неравенству

$$0 < 1 - b(k+1)\sigma^k t < 1,$$

из которого следует, что $0 < c(t) < 1$, где $c(t) = b(k+1)\sigma^k t$.

Вероятность безотказной работы элемента конструкции на заданном отрезке $[0,\, t]$, когда его работоспособность определяется монотонной функцией $c(t)$, может быть вычислена исходя из [3]:

$$P(t) = P\{T > t\} = P\{0 < c(t) < 1\} = \int_0^1 f(x,\, t)dx, \tag{6}$$

где $f(x,\, t)$ — плотность распределения случайной функции $c(t)$ в момент времени t. Так как случайная величина b распределена по нормальному закону, то в силу линейности и случайная функция $c(t)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\langle c(t)\rangle = \langle b\rangle(k+1)\sigma^k t$, $\mathtt{D}[c(t)] = \mathtt{D}[b](k+1)^2\sigma^{2k}t^2$.

Заменяя $f(x,\, t)$ плотностью нормального закона распределения, для вероятности безотказной работы (6) имеем

$$P(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathtt{D}[c(t)]}}\int_0^1 \exp\Bigl[-\frac{(x - \langle c(t)\rangle)^2}{2\mathtt{D}[c(t)]}\Bigr]dx,$$

которую при помощи функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\bigl(-z^2/2\bigr)dz$$

можно привести к виду

$$P(t) = \Phi\Bigl(\frac{1 - \langle c(t)\rangle}{\sqrt{\mathtt{D}[c(t)]}}\Bigr) + \Phi\Bigl(\frac{\langle c(t)\rangle}{\sqrt{\mathtt{D}[c(t)]}}\Bigr). \tag{7}$$

Назначенный ресурс T_* определяют по заданному значению вероятности безотказной работы p_* как решение уравнения (7) относительно t. Отметим, что уравнения вида (7) удобно решать графически, для чего строим график функции $P(t)$ и прямую $P = p_*$. Абсцисса точки пересечения графика вероятности безотказной работы и прямой будет определять назначенный ресурс.

Ресурс T_* назначают до начала эксплуатации (на стадии проектирования) элемента конструкции одинаковый для всей генеральной совокупности элементов при $\sigma = \text{const}$.

На рис. 1 представлены графики вероятностей безотказной работы $P(t)$ элемента конструкции, построенные с помощью формулы (7) в зависимости от приложенного напряжения σ. Пунктирными линиями выделены значения вероятности $p_* = 0{,}95$ и соответствующие значения назначенного ресурса T_*, равные 31,5 ч при $\sigma = 40$ МПа; 16 ч при $\sigma = 50$ МПа; 9 ч при $\sigma = 60$ МПа.

Индивидуальные показатели ресурса элементов конструкций из-за естественного разброса свойств материала и различных условий эксплуатации конструкций лежат в широких пределах. Так, например, при $\sigma = 60$ МПа назначенный ресурс равен 9 ч, а фактический ресурс имеет разброс от 7 ч до 21 ч (максимальный фактический ресурс в 2,3 раза больше назначенного ресурса). Таким образом, если эксплуатировать элементы конструкций по назначенному ресурсу, то их значительная часть будет сниматься с эксплуатации задолго до исчерпания своего ресурса. В связи с этим используется подход, рассмотренный в [4], для определения остаточного ресурса конкретного изделия по условной вероятности безотказной работы.

Прежде чем переходить к оценке остаточного ресурса, найдём числовые характеристики случайной функции $\varepsilon(t)$ (см. (5)). Для этого непрерывно дифференцируемая функция $\varepsilon(t)$ приближённо заменяется линейной путём её разложения в ряд Тейлора в окрестности точки, соответствующей математическим ожиданиям её аргументов a и b. Приближённые значения математического ожидания и дисперсии при этом определяются следующим образом:

$$\langle\varepsilon(t)\rangle = \frac{\langle a\rangle\sigma^{n-k}\left(1 - c_1(t)^{(k+1-n)/(k+1)}\right)}{\langle b\rangle(k+1-n)}, \tag{8}$$

$$\mathtt{D}[\varepsilon(t)] = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\langle a\rangle}\right)^2\mathtt{D}[a] + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\langle b\rangle}\right)^2\mathtt{D}[b] + 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\langle a\rangle}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\langle b\rangle}r_{12}, \tag{9}$$

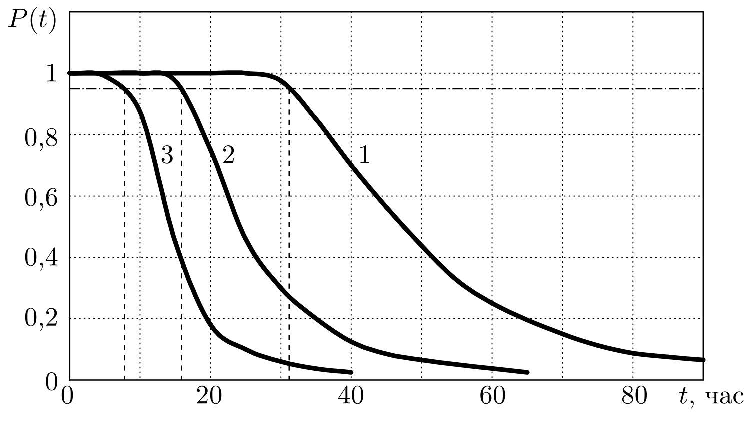

Рис. 1. Вероятность безотказной работы $P(t)$ в зависимости от приложенного напряжения: $1 - \sigma = 40$ МПа, $2 - \sigma = 50$ МПа, $3 - \sigma = 60$ МПа

где

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \langle a \rangle} = \frac{\sigma^{n-k}\left(1 - c_1(t)^{(k+1-n)/(k+1)}\right)}{\langle b \rangle (k+1-n)},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \langle b \rangle} = \frac{\langle a \rangle \sigma^{n-k}\left(1 - c_1(t)^{(k+1-n)/(k+1)}\right)}{\langle b \rangle^2 (k+1-n)} \times$$
$$\times \left(c_1(t)^{-n/(k+1)}(k+1-n)\sigma^k t \langle b \rangle - 1 + c_1(t)^{(k+1-n)/(k+1)}\right),$$

$$c_1(t) = 1 - \langle b \rangle (k+1)\sigma^k t,$$

$r_{12} = \langle ab \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle$ — ковариация между случайными величинами a и b. Величина r_{12} оценивается по опытным данным:

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{n^2} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{n^2} = 2{,}07 \cdot 10^{-11}.$$

Элементы конструкции, как было отмечено выше, эксплуатируют до момента выработки назначенного ресурса T_*, затем измеряют накопленную деформацию $\varepsilon(T_*) = \varepsilon_1$. Для определения нового индивидуального остаточного ресурса необходимо вычислить при $t > T_*$ условную вероятность безотказной работы [3]:

$$P(t \mid \varepsilon_1) = P\{0 < c(t) < 1 \mid \varepsilon(T_*) = \varepsilon_1\}, \tag{10}$$

где вертикальная черта означает знак условной зависимости. Для монотонной функции $c(t)$ вероятность безотказной работы (10) можно выразить через условную плотность распределения $f(x_2, t \mid x_1 = \varepsilon_1)$ в момент времени t при заданном значении $\varepsilon(T_*) = \varepsilon_1$:

$$P(t \mid \varepsilon_1) = \int_0^1 f(x_2, t \mid x_1 = \varepsilon_1) dx_2. \tag{11}$$

Для нормального случайного процесса $c(t)$ условная плотность $f(x_2, t \mid x_1)$ также определяет нормальное распределение [6] с параметрами

$$m_{x_2|x_1} = m_{x_2} + \rho_{12}\frac{S_{x_2}}{S_{x_1}}\left(\varepsilon_1 - m_{x_1}\right), \tag{12}$$

$$S_{x_2|x_1} = S_{x_2}\sqrt{1 - \rho_{12}^2}, \tag{13}$$

где $m_{x_1} = \langle \varepsilon(T_*) \rangle$, $m_{x_2} = \langle c(t) \rangle = \langle b \rangle (k+1)\sigma^k t$, $S_{x_1}^2 = \mathtt{D}[\varepsilon(T_*)]$, $S_{x_2}^2 = \mathtt{D}[c(t)] = \mathtt{D}[b](k+1)^2\sigma^{2k}t^2$,

$$\rho_{12} = \frac{\langle c(t)\varepsilon(T_*) \rangle - \langle c(t) \rangle \langle \varepsilon(T_*) \rangle}{S_{x_1} S_{x_2}}. \tag{14}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной функции $\varepsilon(t)$ в момент времени T_* вычисляются по формулам (8), (9) при $t = T_*$.

Величина ρ_{12} вычисляется приближенно. Если для вычисления числителя в формуле (14) использовать метод линеаризации, то числитель будет равен нулю, поэтому в разложении числителя в ряд необходимо учитывать квадратичные члены. Тогда, если числитель дроби (14) обозначить через $\langle\varphi\rangle$, то согласно [5] получим

$$\langle\varphi\rangle = 0{,}5\left[\frac{\partial^2\left(c(t)\varepsilon(T_*)\right)}{\partial\langle b\rangle^2} - \langle c(t)\rangle\frac{\partial^2(\varepsilon(T_*))}{\partial\langle b\rangle^2}\right]\mathtt{D}[b] + \\ + \left[\frac{\partial^2\left(c(t)\varepsilon(T_*)\right)}{\partial\langle a\rangle\partial\langle b\rangle} - \langle c(t)\rangle\frac{\partial^2(\varepsilon(T_*))}{\partial\langle a\rangle\partial\langle b\rangle}\right] r_{12}. \quad (15)$$

Вычисляя частные производные и подставляя их в формулу (15), после преобразования получим

$$\langle\varphi\rangle = \Big[\frac{\langle a\rangle(k+1)t\sigma^n}{(k+1-n)\langle\sigma\rangle^2}\left(1 - \langle c_1(T_*)\rangle^{(k+1-n)/(k+1)}\right) - \\ -\langle a\rangle(k+1)t\sigma^{n+k}T_*\langle c_1(T_*)\rangle^{-n/(k+1)}\Big]\mathtt{D}[b] + \\ + \frac{\sigma^k t(k+1)}{(k+1-n)\langle b\rangle}\left(1 - \langle c_1(T_*)\rangle^{(k+1-n)/(k+1)}\right) r_{12}. \quad (16)$$

Отсюда, используя функцию Лапласа, условную вероятность безотказной работы (11) конкретного элемента можно записать в виде

$$P(t \mid \varepsilon_1) = \Phi\left(\frac{1 - m_{x_2|x_1}}{S_{x_2|x_1}}\right) + \Phi\left(\frac{m_{x_2|x_1}}{S_{x_2|x_1}}\right), \quad (17)$$

где величины $m_{x_2|x_1}$, $S_{x_2|x_1}$, вычислены с помощью формул (12)–(14) и (16).

Теперь, беря прежнее значение вероятности безотказной работы p_*, при $p_* = P(t \mid \varepsilon_1)$ из уравнения (17) находим новое значение ресурса T_{**}. Если к моменту выработки уточненного ресурса T_{**} элемент конструкции не вышел из строя и не исчерпал свой фактический ресурс, то вычисляется условная вероятность безотказной работы по известным значениям накопленной деформации для двух моментов времени T_* и T_{**} и назначается новый ресурс. В случае необходимости этот процесс последовательного уточнения ресурса продолжается.

Для уточнения ресурса из [2] были выбраны образцы, для которых фактическое время безотказной работы намного превышает среднюю наработку до отказа. На рис. 2 представлены графики условных вероятностей безотказной работы выбранных образцов (№№ 11, 30, 32) с учётом информации о накопленной деформации ε в момент времени T_* при разных значениях напряжений σ. Задавая прежнее значение времени безотказной работы $p_* = 0{,}95$, графически (на рис. 2 показано пунктирными линиями) были найдены для каждого образца в отдельности новые значения назначенного ресурса T_{**}. Результаты вычислений сведены в таблицу, где приводятся номер образца, уровень напряжения σ, назначенный ресурс T_*, уточнённый ресурс T_{**} и фактический ресурс t_p. Как видно из таблицы, для образцов 30, 32 необходимо уточнить ресурс ещё раз.

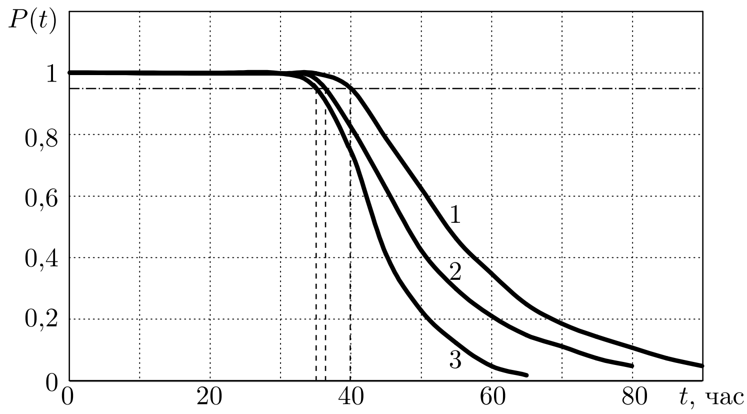

Рис. 2. Графики условных вероятностей безотказной работы для образцов при $\sigma = 40$ МПа: 1 — образец 32, 2 — образец 30, 3 — образец 11

№№ образцов	σ, МПа	T_*, ч	T_{**}, ч	t_p, ч
11	40	31,5	34,5	40
30	40	31,5	36,5	66
32	40	31,5	39,5	68
29	50	16	18	27
28	50	16	22,5	30
14	60	9	12	20
31	60	9	13,5	13,5
7	60	9	15	15,5

Таким образом, разработанный метод определения остаточного ресурса конкретного изделия по условной вероятности безотказной работы позволяет эксплуатировать изделие каждый раз вплоть до исчерпания его фактического ресурса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00644-а)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
2. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / ред. С. А. Шестериков. — М.: Машиностроение, 1983. — 101 с.
3. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1984. — 312 с.
4. *Самарин Ю. П., Павлова Г. А., Попов Н. Н.* Оценка надёжности стержневых конструкций по критерию деформационного типа // *Проблемы машиностроения и надёжности машин*, 1990. — № 4. — С. 53–60.
5. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.
6. *Вентцель Е. С., Овчаров В. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.

Поступила в редакцию 05/VII/2010;
в окончательном варианте — 12/VIII/2010.

MSC: 74E35, 74K20

RELIABILITY ESTIMATION OF STOCHASTIC HETEROGENEOUS ROD CONSTRUCTIONAL ELEMENTS BY THE USE OF PARAMETRIC FAILURE CRITERION

N. N. Popov, G. A. Pavlova, M. V. Shershneva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: ponick25@gmail.com

Methodology of calculation of probability of no-failure working life with one structural parameter was investigated on the basis of extension of Rabotnov's determinate creep equations. Residual working life method using conditional probability of no-failure operation for specific product is introduced.

Key words: *creep, stochastic heterogeneous constructional element, stress-rupture strength, probability of no-failure operation, residual working life.*

Original article submitted 05/VII/2010;
revision submitted 12/VIII/2010.

Nikolay N. Popov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Galina A. Pavlova* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Marija V. Shershneva*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.