Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 289–294

УДК 517.9:533.6

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Ю. А. Казакова

Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

E-mail: kazakovaua@mail.ru

Предложен метод построения параметрических решений полиномиального вида для систем дифференциальных уравнений с частными производными и рассмотрено его применение к уравнениям аэрогидромеханики. В качестве примера построены параметрические решения и проведена их классификация для системы уравнений, описывающей плоские течения идеального газа с постоянной энтропией. В частности, указаны решения типа «простая волна». Получены также решения трансзвуковых уравнений, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с частными производными, аэрогидромеханика, трансзвуковые течения, сверхзвуковые зоны, сопла Лаваля.*

1. Описание метода построения параметрических решений. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_k\left(x,\, y,\, t,\, u_1,\, \ldots,\, u_n,\, \frac{\partial u_1}{\partial x},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial x},\, \frac{\partial u_1}{\partial y},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial y},\, \frac{\partial u_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)=0, \quad (1)$$

где $u_k(x,\, y,\, t)$ — функции переменных $x,\, y,\, t$; $k=1,2,\ldots,n$.

При переходе от переменных $x,\, y$ к новым переменным ξ,η, которые являются функциями переменных $x,\, y,\, t$, решение системы (1) отыскивается в параметрическом виде:

$$u_k=U_k(\xi,\,\eta,\,t),\quad k=1,2,\ldots,n;\qquad x=X(\xi,\,\eta,\,t),\quad y=Y(\xi,\,\eta,t). \quad (2)$$

Производные находятся по формулам

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \xi}\frac{\partial Y}{\partial \eta}-\frac{\partial U_k}{\partial \eta}\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right),\quad \frac{\partial u_k}{\partial y}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \eta}\frac{\partial X}{\partial \xi}-\frac{\partial U_k}{\partial \xi}\frac{\partial X}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{\partial U_k}{\partial t}+\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial Y}{\partial \eta}\frac{\partial X}{\partial t}\right)+\frac{\partial U_k}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)\right),$$

где $\Delta=(\partial X/\partial\xi)(\partial Y/\partial\eta)-(\partial X/\partial\eta)(\partial Y/\partial\xi)\neq 0$ — якобиан преобразования. Система уравнений (1) преобразуется к виду

$$F_k\left(\xi,\eta,t,X,Y,U_1,\ldots,U_n,\frac{\partial X}{\partial \xi},\frac{\partial X}{\partial \eta},\frac{\partial X}{\partial t},\frac{\partial Y}{\partial \xi},\frac{\partial Y}{\partial \eta},\frac{\partial Y}{\partial t},\frac{\partial U_1}{\partial \xi},\ldots,\frac{\partial U_n}{\partial t}\right)=0. \quad (3)$$

В этой системе X, Y так же, как и U_k ($k=1,2,\ldots,n$), являются функциями переменных ξ, η, t. Поэтому имеется n уравнений для $(n+2)$ функций, две из

Юлия Александровна Казакова, аспирант, каф. высшей математики.

которых можно выбрать произвольным образом. Решение системы (3) можно искать в виде многочленов по степеням η:

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi,\, t)\eta^i, \quad X = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi,\, t)\eta^k, \quad Y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi,\, t)\eta^k, \tag{4}$$

где α_k, γ, $\omega \in \mathbb{N}$; u_{ki}, x_k, y_k — искомые функции, зависящие от ξ, t. Для некоторых типов уравнений (например, для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых и независимых переменных) несложно получить соотношения для параметров α_k, γ, $\omega \in \mathbb{N}$, позволяющие выяснить, при каких значениях α_k, γ, $\omega \in \mathbb{N}$ система дифференциальных уравнений для $x_k(\xi,\, t)$, $y_k(\xi,\, t)$, $u_{ki}(\xi,\, t)$ является определённой или недоопределённой, т. е. $s = r + j$ (s — число неизвестных функций, зависящих от ξ, t; r — число уравнений; j — степень недоопределённости). Если r_k — максимальная степень переменной η, возникающая в уравнении $F_k = 0$ при подстановке в него выражений (4), то параметры s и r находятся следующим образом:

$$r = \sum_{k=1}^{n} r_k + n, \quad s = \gamma + \omega + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + n + 2.$$

Преимущество перехода к новым переменным ξ, η состоит в том, что он позволяет находить параметрические решения в виде (2), которые в общем случае невозможно получить в явном виде $u_k = u_k(x,\, y,\, t)$ на плоскости переменных $(x,\, y)$, точно так же, как функцию, заданную параметрически ($v = \varphi(\xi)$, $z = \psi(\xi)$), не всегда можно представить в явном виде ($v = f(z)$). Параметрическая запись удобна также тем, что зависимые и независимые переменные становятся равноценными, что позволяет любые три из них (в их числе t) считать независимыми, а остальные — функциями. Это позволяет в некоторых случаях упростить исходную систему уравнений, например, сделать ее линейной. Решения вида (2), (4) удобно использовать в случаях, когда граничные условия задаются на линиях $\xi = \xi_0$, $\eta = 0$. Например, в задачах газовой динамики уравнение $\xi = \xi_0$ может быть уравнением обтекаемой поверхности, а уравнение $\eta = 0$ — уравнением ударной волны, взаимодействующей с поверхностью.

2. Применение метода к уравнениям газовой динамики. Система уравнений аэрогидромеханики для идеального газа в плоском случае адиабатического процесса имеет вид

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(p/\rho^\chi)}{\partial t} + u\frac{\partial(p/\rho^\chi)}{\partial x} + v\frac{\partial(p/\rho^\chi)}{\partial y} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где $u(t,\, x,\, y)$, $v(t,\, x,\, y)$ — проекции вектора скорости, $\rho(t,\, x,\, y)$ — плотность, $p(t,\, x,\, y)$ — давление, $\chi = c_p/c_\nu = \mathrm{const}$, c_p, c_ν — коэффициенты теплоемкости при постоянном объёме и постоянном давлении. Если течение изэнтропическое ($p/\rho^\chi = c = \mathrm{const}$, $c = p_0/\rho_0{}^\chi$, где p_0, ρ_0 — некоторые постоянные значения давления и плотности), то система (5) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-c\chi\rho^{\chi-2}\frac{\partial\rho}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-c\chi\rho^{\chi-2}\frac{\partial\rho}{\partial y},\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\zeta\frac{\partial w}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\zeta\frac{\partial w}{\partial y},\\ w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0,\end{gathered}\tag{7}$$

которая получается из системы (6), если положить $w(t,\,x,\,y)=\rho^{\chi-1}$, $\zeta = c\chi/(\chi-1)$, $\mu=1/(\chi-1)$. После перехода к переменным ξ, η, t система (7) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial u}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\\ +u\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\zeta\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)=0,\\[2ex]
\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial v}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial v}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\\ +u\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\zeta\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)=0,\\[2ex]
w\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\mu\left[\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\right.\\ +\frac{\partial w}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial w}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+u\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\\ \left.+v\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]=0.\end{gathered}\tag{8}$$

Решение системы (8) ищется в виде многочленов по степеням η:

$$\begin{gathered}u=\sum_{k=0}^{\alpha}u_k(\xi,t)\eta^k,\quad v=\sum_{k=0}^{\beta}v_k(\xi,t)\eta^k,\quad w=\sum_{k=0}^{\theta}w_k(\xi,t)\eta^k,\\ x=\sum_{k=0}^{\gamma}x_k(\xi,t)\eta^k,\quad y=\sum_{k=0}^{\omega}y_k(\xi,t)\eta^k.\end{gathered}\tag{9}$$

Здесь α, β, θ, γ, ω — натуральные числа. При подстановке выражений (9) в систему (8) получим следующие максимальные степени переменной η:

$$J_1=\alpha+\gamma+\omega-1,\quad J_2=2\alpha+\omega-1,\quad J_3=\beta+\alpha+\gamma-1,\quad J_4=\theta+\omega-1,$$

$$J_5 = \beta + \gamma + \omega - 1, \quad J_6 = \alpha + \beta + \omega - 1, \quad J_7 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_8 = \theta + \gamma - 1,$$
$$J_9 = \alpha + \omega + \theta - 1, \quad J_{10} = \beta + \theta + \gamma - 1, \quad J_{11} = \theta + \gamma + \omega - 1.$$

Параметры J_1, J_2, J_3, J_4 соответствуют первому уравнению системы (8), J_5, J_6, J_7, J_8 — второму уравнению системы (8), J_9, J_{10}, J_{11} — третьему уравнению системы (8). Число коэффициентов в (9) $s = \alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega + 5$, а число уравнений в системе (8) определяется соотношением $r = I_1 + I_2 + I_3 + 3$, где $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4)$, $I_2 = \max(J_5, J_6, J_7, J_8)$, $I_3 = \max(J_9, J_{10}, J_{11})$. Максимальные значения I_1, I_2, I_3 можно выбрать 48 способами.

С помощью программы, описанной в [1], получены возможные значения переменных α, β, θ, γ, $\omega \in \mathbb{N}$, для которых система уравнений (7) будет определённой или недоопределённой (j — степень недоопределённости). Результаты классификации представлены в сводной таблице ниже.

№	α	β	θ	γ	ω	j	№	α	β	θ	γ	ω	j	№	α	β	θ	γ	ω	j
1	0	0	0	0	1	3	21	1	0	2	1	0	1	41	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	2	1	22	1	0	2	1	1	0	42	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	3	23	2	0	1	2	0	0	43	0	1	2	1	0	0
4	0	1	0	0	2	1	24	0	0	1	1	0	2	44	0	2	0	0	1	0
5	0	2	0	0	2	1	25	0	0	1	2	0	0	45	0	2	1	0	1	0
6	1	0	0	1	0	3	26	1	0	1	2	0	0	46	1	1	0	1	0	0
7	1	0	0	1	1	1	27	1	0	0	0	1	0	47	1	1	1	1	0	0
8	1	0	1	1	1	1	28	1	0	1	0	1	0	48	1	1	2	1	0	0
9	1	1	0	1	1	1	29	1	0	2	0	1	0	49	0	0	1	0	1	2
10	1	1	1	1	1	1	30	1	1	0	0	1	0	50	0	0	1	0	2	0
11	1	1	2	1	1	1	31	1	1	1	0	1	0	51	0	1	1	0	1	2
12	2	0	0	2	0	1	32	1	1	2	0	1	0	52	0	1	1	0	2	0
13	0	0	0	1	0	3	33	1	2	0	0	1	0	53	0	1	2	0	1	1
14	0	0	0	2	0	1	34	1	2	1	0	1	0	54	0	2	1	0	2	0
15	0	1	0	1	1	1	35	1	2	2	0	1	0	55	0	1	2	1	1	0
16	0	1	1	1	1	1	36	2	0	0	1	0	0	56	0	0	2	0	1	0
17	1	0	0	2	0	1	37	2	0	1	1	0	0	57	0	0	2	1	0	0
18	0	0	0	1	1	1	38	2	1	0	1	0	0							
19	0	0	1	1	1	1	39	2	1	1	1	0	0							
20	1	0	1	1	0	2	40	2	1	2	1	0	0							

В качестве примера построим для системы (8) решение типа «простая волна». Рассмотрим вариант 18, когда $\gamma = \omega = 1$, $\alpha = \beta = \theta = 0$:

$$\begin{gathered} x = x_0(\xi, t) + x_1(\xi, t)\eta, \quad y = y_0(\xi, t) + y_1(\xi, t)\eta, \\ u = u(\xi, t), \quad v = v(\xi, t), \quad w = w(\xi, t). \end{gathered} \tag{10}$$

Если в (10) положить $x_0(\xi, t) = x_2(\xi)t + x_3(\xi)$, $y_0(\xi, t) = 0$, $y_1(\xi, t) = 1$, а функции x_1, u, v, w считать зависимыми от ξ, то получим решение системы (8) в виде простой волны:

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad w = w(\xi), \quad x = x_3(\xi) + x_2(\xi)t + x_1(\xi)y, \quad y = \eta. \tag{11}$$

Подставив (11) в (8), получим систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений для четырех функций $x_1(\xi)$, $x_2(\xi)$, $v(\xi)$, $w(\xi)$, одна из которых может быть выбрана произвольно. Произвольной является также функция $x_3(\xi)$. Таким образом, получено решение, зависящее от двух произвольных функций.

Аналогичным образом проведены классификации решений вида (4) [2,3]:

а) для системы уравнений (5);
б) для системы из первых трех уравнений системы (5) при $\rho = \mathrm{const}$;
в) для системы уравнений (6) при $\chi = 2$ и $\chi = 1$;
г) для трансзвуковых уравнений [4, 5].

3. Трансзвуковые течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля. Рассмотрим нелинейную систему уравнений, описывающую один класс [6] трансзвуковых течений газа:

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 4nu - 4nx\frac{\partial u}{\partial x} - 2ny\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x, y; t — время, n — произольная константа.

Решение системы (12), записанной предварительно в параметрической форме, отыскивается в виде многочленов по степеням η:

$$u = \sum_{i=0}^{\alpha} u_i(t,\, \xi)\eta^i,\; v = \sum_{i=0}^{\beta} v_i(t,\, \xi)\eta^i,\; x = \sum_{i=0}^{\gamma} x_i(t,\, \xi)\eta^i,\; y = \sum_{i=0}^{\omega} y_i(t,\, \xi)\eta^i, \tag{13}$$

где α, β, γ, $\omega \in \mathbb{N}$. Проведена классификация решений вида (13), т. е. определены все значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{N}$, для которых система уравнений для u_i, v_i, x_i, y_i является определённой или недоопределённой.

Один из возможных вариантов: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\omega = 1$. В свою очередь, среди этих решений существуют решения, описывающие симметричные относительно оси Ox течения:

$$\begin{gathered} u = u_0(t,\, \xi) + u_2(t,\, \xi)\eta^2, \quad v = v_1(t,\, \xi)\eta + v_3(t,\, \xi)\eta^3, \\ x = x_0(t,\, \xi) + x_2(t,\, \xi)\eta^2, \quad y = \eta. \end{gathered} \tag{14}$$

Если u_2, v_3, x_2 — постоянные, то решение (14) соответствует течению с местными сверхзвуковыми зонами [7], т. е. область дозвукового течения ($u < 0$) будет иметь включения со сверхзвуковой скоростью ($u > 0$). Записывая систему уравнений для u_0, v_1 и полагая $x_0 = \xi$, можно показать, что в этом случае решение (14) принимает вид

$$u = U(\xi,\, t) + 4c^2y^2, \quad v = 2c(4c\xi - U)y + \frac{16}{3}c^3y^3, \quad x = \xi + cy^2.$$

Здесь c — произвольная постоянная, а функция $U(\xi,\, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению:

$$2\frac{\partial U}{\partial t} + (U - 4n\xi)\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2(2n + c)U - 8c^2\xi = 0. \tag{15}$$

Получено общее решение этого уравнения в случае $U = U(\xi)$, на основе которого исследованы течения с местными сверхзвуковыми зонами в соплах.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (гос. контракт № П1122).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Velmisov P. A., Todorov M. D., Kazakova Yu. A.* Some classes of the solutions of aerohydromechanic equations, Proc. of the 34th Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE ′08) // *AIP Conf. Proc.*, 2009. Vol. 1067, no. 1. Pp. 427–441.
2. *Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., Васильева А. А.* Некоторые классы решений уравнений газовой динамики / В сб.: *Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании.* Ульяновск: УлГТУ, 2009. С. 232–242. [*Velmisov P. A., Kazakova Yu. A., Vasil'eva A. A.* Some classes of solutions of gas dynamics equations / In: *Matematicheskie metody i modeli: teoriya, prilozheniya i rol' v obrazovanii.* Ulyanovsk: UlGTU, 2009. Pp. 232–242].
3. *Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., Сагдеева Ю. К.* О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики / В сб.: *Прикладная математика и механика.* Ульяновск: УлГТУ, 2009. С. 285-291. [*Velmisov P. A., Kazakova Yu. A., Sagdeeva Yu. K.* On some classes of the solutions of aerohydromechanic equations / In: *Prikladnaya matematika i mehanika.* Ulyanovsk: UlGTU, 2009. Pp. 285–291].
4. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с. [*Ryzhov O. S.* Investigation of transonic flows in Laval nozzles. Moscow: VC AN SSSR, 1965. 238 pp.]
5. *Рыжов О. С.* О работе сопел Лаваля в нерасчетных режимах // *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, 1967. Т. 7, № 4. С. 859–866. [*Ryzhov O. S.* Operation of Laval nozzles in undesigned modes // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1967. Vol. 7, no. 4. Pp. 859–866].
6. *Velmisov P. A., Krupennikov A. V., Kazakova Yu. A.* On some classes of solutions of differential equations with partial derivatives; applications in gas dynamics (in Russian) / In: *Education, science and economics at universities. Integration to international educational area*: International conference (Płock, Poland, 20–25 September 2010). Płock: University in Płock, 2010. Pp. 384–394.
7. *Adamson T. C.* Unsteady transonic flows in two–dimensional channels // *J. Fluid Mech.*, 1972. Vol. 52, no. 3. Pp. 437–449.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 02/III/2011.

MSC: 35Q35

ON SOME CLASSES OF SOLUTIONS OF AEROHYDROMECHANIC EQUATIONS

Y. A. Kazakova

Ulyanovsk State Technical University,
32, Severny Venets st., Ulyanovsk, 432027, Russia.

E-mail: kazakovaua@mail.ru

The article gives a review of the method of constructing parametric solutions of polynomial form for systems of partial differential equations and its application to some aerohydromechanic equations. For example the parametric solutions are constructed and their classification is carried out for the system of equations, describing the plane flows of the ideal gas with the constant entropy. Particularly, the solutions of "simple wave" type are demonstrated. Also the solutions of transonic equations, describing flows of gas with local supersonic zones in Laval nozzles are obtained.

Key words: *partial differential equations, aerohydromechanics, transonic flows, supersonic zones, Laval nozzles.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 02/III/2011.

Yulia A. Kazakova, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics.