

УДК 539.421.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ТРЕЩИНЫ В ЗЕРНИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

Е. О. Каракулина

Оренбургский государственный университет,
460018, Оренбург, пр-т Победы, 13.

E-mail: e1ok2004@yandex.ru

Разработана модель, описывающая процесс разрушения зернистых материалов. Установлены закономерности формирования и развития трещин в дискретных средах. Представлены результаты численного расчёта коэффициентов интенсивности напряжений первого рода с учётом упругих характеристик межзёрненного заполнителя.

Ключевые слова: трещина, коэффициент интенсивности напряжений первого рода, зернистый материал.

Введение. Горные породы представляют собой хрупкие, неоднородные зернистые материалы, которые отличаются по форме, размеру зёрен, а также прочности связывающего вещества. Одна из первых работ по моделированию горных пород в виде зернистого материала принадлежит Троллопу. Элемент зернистой структуры представлен им в виде произвольного набора зёрен круглой формы.

В упрощённой модели Троллопа участки контакта между зёрнами изображают в виде отрезков [1]. При этом зерно материала представляет собой гексагональный элемент. Границы зёрен занимают большую объёмную долю структуры материала и существенно влияют на процесс его разрушения при механической нагрузке. Одним из параметров, характеризующих упругое состояние тела, является модуль Юнга. Горные породы с разной степенью уплотнённости имеют разные модули упругости. Наибольшее влияние на модуль Юнга оказывают минералогический состав, структура, условия залегания породы и другое. Однако критериев роста трещин, учитывающих упругие характеристики материала, до настоящего времени получено не было.

Целью данной работы является разработка математической модели роста трещин в зернистом материале и установление зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от значения модуля Юнга межзёрненного заполнителя.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривался модельный зернистый материал, содержащий плоскую трещину AB длиной $2l = 0,0025$ м. Структура материала была представлена в виде сетки гексагональных зёрен (рис. 1). Диаметр зерна исследуемого материала $d = 1$ мм. Контакты между зёрнами заполнены линейно-упругим материалом с упругими характеристиками, отличающимися от характеристик зёрен. Упругие характеристики при моделировании полагались следующими: для зерна модуль Юнга $E_{\text{зер}} = 3 \cdot 10^4$ МПа; для межзёрненного заполнителя $E_{\text{зап}} = 3 \cdot 10; 3 \cdot 10^2; 3 \cdot 10^3; 3 \cdot 10^4; 3 \cdot 10^5; 3 \cdot 10^6$ МПа. Коэффициент Пуассона для зерна и заполнителя

Елена Олеговна Каракулина, старший преподаватель, каф. математического анализа.

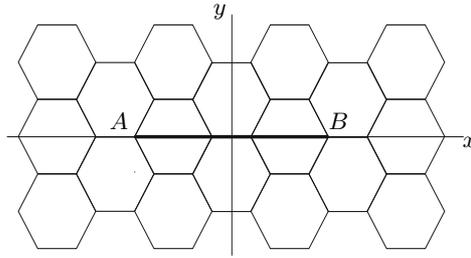


Рис. 1. Геометрическая модель зернистого материала

$\nu = 0,3$. Ширина заполнителя между зёрнами породы $h = 0,1$ мм. Жёсткость заполнителя определялась следующими равенствами:

$$K_n = E_{\text{зап}}/h, \quad K_s = G/h.$$

Численный расчёт выполнялся методом граничных элементов [2]. Граничные интегральные уравнения этого метода в процессе дискретизации границ представляются в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= K_{si}D_{si} + \sum_{j=1}^N [B_{ssij}D_{sj} + B_{sni}D_{nj}], \\ \sigma_n^i &= K_{ni}D_{ni} + \sum_{j=1}^N [B_{nsij}D_{sj} + B_{nnij}D_{nj}], \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; N — количество всех граничных элементов; σ_s^i, σ_n^i — касательные и нормальные напряжения на границе тела соответственно; K_{ni}, K_{si} — нормальная и касательная жёсткость заполнителя i -того элемента соответственно; $D_{nj} = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$, $D_{sj} = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$ — компоненты разрывов смещений j -того отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно; $u_n(x, 0_-)$, $u_n(x, 0_+)$ — нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины; $u_s(x, 0_-)$, $u_s(x, 0_+)$ — касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины; $B_{ssij}, B_{sni}, B_{nsij}, B_{nnij}$ — коэффициенты влияния.

При численном расчёте использовались следующие краевые условия на трещине AB : $\sigma_s = 0$, $\sigma_n = \sigma_n^0$, где σ_s, σ_n — соответственно касательные и нормальные напряжения; σ_n^0 — задаваемое нормальное напряжение. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений первого рода использовали критерий [3]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2(1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_n}{\sqrt{l-x}}, \quad (2)$$

где $2l$ — длина трещины AB , м; K_I — коэффициент интенсивности напряжений первого рода, Н/м^{3/2}; $G = E/(2(1+\nu))$ — модуль сдвига, Н/м².

2. Результаты моделирования. В результате решения системы линейных уравнений (1) были найдены значения величины D_{nj} . На рис. 2 показаны результаты численного решения задачи для сплошной и дискретной среды с различными упругими характеристиками межзёрненного заполнителя. Так

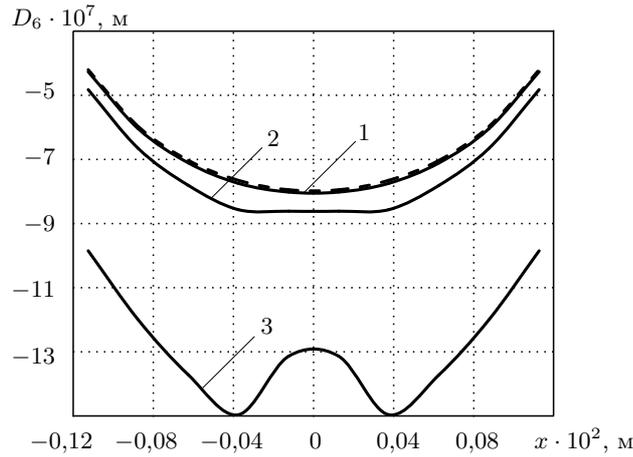


Рис. 2. Величина раскрытия трещины в сплошном (штриховая линия) и зернистом (сплошные линии) материалах: 1 – $E_{\text{зап}} = 3 \cdot 10^5$ МПа, 2 – $E_{\text{зап}} = 3 \cdot 10^4$ МПа, 3 – $E_{\text{зап}} = 3 \cdot 10^3$ МПа

как нормальные смещения верхнего и нижнего берегов трещины равны по величине, то на рисунке показана величина смещения только нижнего берега трещины, где $y = 0$ – линия симметрии. Из рисунка видно, что уменьшение упругих характеристик межзёрненного заполнителя приводит к увеличению разрывов смещений и к отличию формы трещины от эллиптического вида.

Для раскрытия берегов трещины в сплошной среде используют представление

$$D_n = -\frac{2(1-\nu)}{G} p \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Для разрывов смещений в зернистом материале были найдены аппроксимирующие функции вида $\tilde{D}_n = f(x) \cdot \sqrt{l - x}$, где $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ при $k = 6$. Коэффициенты a_i ($i = 0, 1, \dots, 6$) найдены методом наименьших квадратов. В таблице показана относительная погрешность значений аппроксимирующей функции в сравнении с численным расчётом D_n , которая подтверждает достоверность и точность полученных результатов.

После подстановки \tilde{D}_n в критерий (2) вычислялись значения коэффициентов интенсивности напряжений первого рода. В результате расчётов была установлена зависимость коэффициента интенсивности напряжений первого рода от величины модуля Юнга межзёрненного заполнителя:

$$K_I = p\sqrt{\pi l} \cdot \varphi \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right), \quad (3)$$

где p – нормальные напряжения, приложенные к берегам трещины, Па;

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) = & 1,212 \cdot \lg^5 \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) + 0,658 \cdot \lg^4 \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) - 4,427 \cdot \lg^3 \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) + \\ & + 0,418 \cdot \lg^2 \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) + 4,569 \cdot \lg \left(\frac{E_{\text{зер}}}{E_{\text{зап}}} \right) + 1,76. \end{aligned}$$

На рис. 3 показана зависимость коэффициента интенсивности напряжений первого рода от длины трещины при различных значениях модуля Юнга

межзеренного заполнителя при фиксированном значении $p = 1$ КПа в формуле (3). Полученные зависимости показывают, что значение коэффициента интенсивности напряжений первого рода увеличивается при уменьшении модуля упругости межзеренного заполнителя.

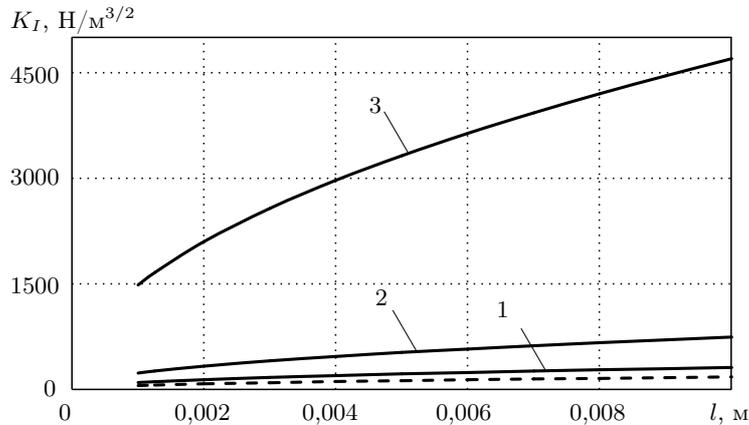


Рис. 3. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений первого рода от длины трещины в сплошном (штриховая линия) и зернистом (сплошные линии) материалах: 1 – $E_{зап} = 3 \cdot 10^4$ МПа, 2 – $E_{зап} = 3 \cdot 10^3$ МПа, 3 – $E_{зап} = 3 \cdot 10^2$ МПа

3. Выводы. Анализируя полученные результаты и зависимости, можно сделать следующие выводы:

- уменьшение упругих характеристик межзеренного заполнителя приводит к увеличению разрывов смещений берегов трещины и к отличию её формы от эллиптического вида;
- прочностные характеристики материала прямо пропорциональны значениям модуля Юнга межзеренного заполнителя;
- полученное аналитическое выражение для нахождения коэффициента интенсивности напряжений первого рода позволяет прогнозировать рост трещин в дискретных средах с различным модулем Юнга межзеренного заполнителя.

Относительная погрешность вычисления разрывов смещений

$E_{зап} = 30$ МПа			$E_{зап} = 3 \cdot 10^6$ МПа		
$D_n \cdot 10^4, м$	$\tilde{D}_n \cdot 10^4, м$	$\delta(\tilde{D}_n)$	$D_n \cdot 10^6, м$	$\tilde{D}_n \cdot 10^6, м$	$\delta(\tilde{D}_n)$
-1,03	-1,04	0,77%	-0,84	-0,84	0,24%
-1,04	-0,99	4,58%	-1,19	-1,19	0,54%
-1,05	-1,16	10,76%	-1,41	-1,41	0,16%
-1,05	-0,93	11,59%	-1,53	-1,53	0,33%
-0,66	-0,68	4,33%	-1,59	-1,58	0,47%
-0,66	-0,73	11,25%	-1,59	-1,59	0,07%
-1,05	-0,96	8,19%	-1,53	-1,53	0,02%
-1,05	-1,09	3,91%	-1,41	-1,4	0,54%
-1,04	-1,03	0,84%	-1,19	-1,19	0,06%
-1,03	-1,03	0,05%	-0,84	-0,84	0,21%

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Герике Б. Л., Полкунов Ю. Г., Герике П. Б.* Математические модели циклического разрушения крепких горных пород дисковым инструментом. Кемерово: Кузбассвузиздат, 2001. 171 с. [*Gerike B. L., Polkunov Yu. G., Gerike P. B.* Matematicheskie modeli tsiklicheskogo razrusheniya krepkikh gornyx porod diskovym instrumentom. Kemerovo: Kuzbassvuzizdat, 2001. 171 pp.]
2. *Crouch S. L., Starfield A. M.* Boundary element methods in solid mechanics: with applications in rock mechanics and geological engineering. London – Boston – Sydney: George Allen & Unwin, 1983. 322 pp.; русск. пер.: *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
3. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.; англ. пер.: *Linkov A. M.* Boundary integral equations in elasticity theory / Solid mechanics and its applications. Vol. 99. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. 268 pp.

Поступила в редакцию 20/XI/2010;
в окончательном варианте — 12/II/2011.

MSC: 74R10; 74S15

SIMULATION OF CRACK GROWTH IN A GRANULAR MATERIAL

E. O. Karakulina

Orenburg State University,
13, pr-t Pobedy, Orenburg, 460018, Russia.

E-mail: e1ok2004@yandex.ru

A model describing the process of destruction of granular materials was developed. The regularities of formation and development of cracks in discrete environment were determined. The results of numerical calculation of stress intensity factors of the first kind, taking into account the elastic characteristics of grain boundary core are presented.

Key words: *crack, stress intensity factor of the first kind, granular material.*

Original article submitted 20/XI/2010;
revision submitted 12/II/2011.