Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 300–305

УДК 539.374

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКИХ GNI-ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН МИКРОВРАЩЕНИЯ

Л. Н. Косыгина

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: fleur.lilia@gmail.com

В рамках линейной микрополярной теории термоупругости (CTMPE, GNI микрополярная термоупругость) с помощью связанной системы уравнений движения и теплопроводности проводится анализ плоских гармонических термоупругих волн микровращения. Основному исследованию предшествует изучение слабых разрывов решений связанных уравнений CTMPE-термоупругости с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса.

Ключевые слова: *GNI-термоупругость, микрополярность, гармоническая волна.*

Введение. Классическая теория упругости основана на идеализированной модели сплошной среды. Она довольно хорошо объясняет поведение реальных технических материалов под действием различных нагрузок, когда зернистость строения рассматриваемых тел не является характерной. Результаты этой теории обычно хорошо соответствуют тщательным экспериментам при напряжениях, меньших предела упругости материала, но во многих случаях наблюдается существенная несогласованность теории и практики и требуется введение новой модели твёрдого тела. Теория сред с микроструктурой (микрополярная теория) представляет собой развитие классической теории сплошной среды, учитывающее деформацию, движение, электромагнитное воздействие материальных частиц в микроскопических масштабах пространства и времени [1].

В микрополярной теории упругости конечная деформация тела, представляемая преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

положения $\mathbf{X}$ отсчётной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$, сопровождается ротационной микродеформацией

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t),$$

где $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения (полярный вектор, определяющий конечный поворот локального триэдра, связанного с микроэлементом).

1. Основные уравнения связанной CTMPE-термоупругости. Рассмотрим связанную систему уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого микрополярного (типа CTMPE, классическая моментная термоупругость) тела при отсутствии массовых сил, источников

Лилия Николаевна Косыгина, аспирант, каф. математического моделирования в механике.

(стоков) тепла [2]:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu-\eta)\,\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\mathbf{u}+(\mu+\eta)\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u}+2\eta\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-\alpha\boldsymbol{\nabla}\theta-\rho\ddot{\mathbf{u}}=\mathbf{0},\\ (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\phi}+2\eta\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}-4\eta\boldsymbol{\phi}-\alpha'\boldsymbol{\nabla}\theta-\jmath\ddot{\boldsymbol{\phi}}=\mathbf{0},\\ \boldsymbol{\nabla}^2\theta-\dfrac{\kappa'}{\Lambda'_*}\dot{\theta}-\dfrac{\alpha}{\Lambda'_*}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}}-\dfrac{\alpha'}{\Lambda'_*}\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Lambda'_*=\Lambda_*/\theta_0$; $\kappa'=\kappa/\theta_0$; ρ — плотность среды; λ, μ, η, γ, ε, β — материальные постоянные микрополярной упругой среды; $\jmath$ — мера инерции среды при вращении; $\boldsymbol{\nabla}$ — трёхмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона); $\boldsymbol{\nabla}^2=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Лапласа; θ — приращение температуры над отсчётной температурой; θ_0 — отсчётная температура; Λ_* — коэффициент теплопроводности (коэффициент термической диффузии); κ — теплоёмкость (на единицу объёма) при постоянной деформации; α, α' — термомеханические постоянные. У введённых выше величин Λ'_*, κ' в дальнейшем изложении штрихи будем опускать.

К уравнениям (1) следует добавить определяющий закон CTMPE-термоупругости

$$\begin{aligned} \mathbf{T}&=(\mu+\eta)\mathbf{e}+(\mu-\eta)\mathbf{e}^*+(\lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}-\alpha\theta)\,\mathbf{I},\\ \mathbf{M}&=(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\Gamma}+(\gamma-\varepsilon)\boldsymbol{\Gamma}^*+\beta\Gamma\mathbf{I} \end{aligned} \tag{2}$$

и соотношения, связывающие деформации с перемещениями и микровращениями

$$\mathbf{e}=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u})^{\top}-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\phi},\quad \boldsymbol{\Gamma}=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\phi})^{\top},$$

где $\mathbf{T}$ — несимметричный тензор силовых напряжений, $\mathbf{M}$ — тензор моментных напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{e}$ — несимметричный тензор деформации, $\boldsymbol{\Gamma}$ — тензор изгиба-кручения, $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор Леви—Чивита.

2. Волновые поверхности связанных полей перемещений, микровращений и температуры. Изучим, как в термоупругом микрополярном теле могут распространяться слабые разрывы перемещений $\mathbf{u}$, микровращений $\boldsymbol{\phi}$ и температуры θ. Заметим, что система дифференциальных уравнений в частных производных (1) содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в семимерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) слабых разрывов перемещений $\mathbf{u}$, микровращений $\boldsymbol{\phi}$ и температуры θ. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к волновой поверхности. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса будут иметь вид

$$\begin{gathered} [\boldsymbol{\nabla}\diamond\boldsymbol{\nabla}\circ\mathbf{u}]=\mathbf{n}\diamond\mathbf{n}\circ\mathbf{A},\quad [\boldsymbol{\nabla}\diamond\boldsymbol{\nabla}\circ\boldsymbol{\phi}]=\mathbf{n}\diamond\mathbf{n}\circ\mathbf{S},\\ [\boldsymbol{\nabla}\diamond\dot{\mathbf{u}}]=-G\mathbf{n}\diamond\mathbf{A},\quad [\boldsymbol{\nabla}\diamond\dot{\boldsymbol{\phi}}]=-G\mathbf{n}\diamond\mathbf{S},\\ [\boldsymbol{\nabla}\diamond\boldsymbol{\nabla}\theta]=\mathbf{n}\diamond\mathbf{n}B,\quad [\ddot{\mathbf{u}}]=G^2\mathbf{A}, \end{gathered} \tag{3}$$

где квадратные скобки [ ] обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва, а $\diamond$, $\circ$ принадлежат множеству возможных операций над векторами. B, $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — некоторые поля, определённые на этой поверхности, причём равенства $B=0$, $\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{S}=\mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность действительно является поверхностью слабого разрыва. Уравнения (1) в совокупности с (3) дают следующие соотношения, связывающие скачки производных второго порядка от перемещений $\mathbf{u}$, микровращений $\boldsymbol{\phi}$ и температуры θ при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu-\eta)\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A})+(\mu+\eta-\rho G^2)\mathbf{A}=\mathbf{0}, \\ (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{S})+(\gamma+\varepsilon-\jmath G^2)\mathbf{S}=\mathbf{0}, \\ B+\dfrac{\alpha G}{\Lambda_*}\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}+\dfrac{\alpha' G}{\Lambda_*}\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Возможны три следующих варианта: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}$, или $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{0}$, или $B\neq 0$. В первом случае на основании первого уравнения системы (4) заключаем, что

$$(c'^2_\perp-G^2)\mathbf{A}=\mathbf{0},$$

и поскольку $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$, получаем возможную нормальную скорость распространения волновой поверхности:

$$G_1=c'_\perp=\sqrt{\frac{\mu+\eta}{\rho}}.$$

Во втором случае анализ второго уравнения системы (4) позволяет сделать вывод, что

$$(c''^2_\perp-G^2)\mathbf{S}=\mathbf{0},$$

и поскольку $\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$, получаем следующую нормальную скорость распространения волновой поверхности:

$$G_2=c''_\perp=\sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{\jmath}}.$$

В третьем случае, умножив скалярно первое и второе уравнения системы (4) на вектор $\mathbf{n}$, находим

$$(c^2_\parallel-G^2)\mathbf{S}=\mathbf{0},\qquad (c''^2_\parallel-G^2)\mathbf{S}=\mathbf{0}.$$

Поскольку $B=0$, то из третьего уравнения (4) получаем $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$, и в результате имеем ещё две возможные скорости волновой поверхности ($c_\parallel=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ — скорость распространения чисто упругой продольной волны):

$$G_3=c_\parallel=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad G_4=c''_\parallel=\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{\jmath}}.$$

Никаких других скоростей быть не может, а это означает, что термический сигнал распространяется с бесконечно большой скоростью.

При $\mu=\gamma=\beta=0$ система (1) описывает движение классической термоупругой среды, и в этом случае получаем только две ненулевые нормальные скорости:

$$c_\parallel=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad c'_\perp=c_\perp=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

где $c_\perp$, $c_\parallel$ — поперечная и продольная скорости чисто упругой волны.

3. Волновые числа плоской гармонической связанной моментной GNI-термоупругой волны. Плоская гармоническая волна имеет следующий вид ($\mathbf{k}$ — волновой вектор, ω — циклическая частота, $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы поляризации волны):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{\imath(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}e^{\imath(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \theta = Be^{\imath(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{5}$$

Волновое число k (модуль волнового вектора $\mathbf{k}$)) может быть как вещественной, так и комплексной величиной. Ограничимся исследованием затухающих волн, фазовые поверхности которых распространяются в направлении вектора $\mathbf{k}$. Поэтому будем искать волновые числа, которые подчиняются условиям $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. Будем полагать, что волновой вектор совпадает по направлению с осью x_3, то есть $\mathbf{k} = (0, 0, k)$. Подставляя выражения (5) в систему (1) и учитывая соотношения $\boldsymbol{\nabla}\diamond = \imath\mathbf{k}\diamond$, $\dot{\square} = -\imath\omega\square$, получаем

$$\mathrm{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

где

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} c_{\perp}'^2k^2-\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{2\imath\eta k}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\perp}'^2k^2-\omega^2 & 0 & -\dfrac{2\imath\eta k}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{\parallel}^2k^2-\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\imath\alpha k}{\rho} \\ 0 & \dfrac{2\imath\eta k}{\mathcal{J}} & 0 & c_{\perp}''^2k^2-\omega^2+\dfrac{4\eta}{\mathcal{J}} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2\imath\eta k}{\mathcal{J}} & 0 & 0 & 0 & c_{\perp}''^2k^2-\omega^2+\dfrac{4\eta}{\mathcal{J}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\parallel}''^2k^2-\omega^2+\dfrac{4\eta}{\mathcal{J}} & \dfrac{\imath\alpha' k}{\rho} \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha\omega k}{\Lambda_*} & 0 & 0 & \dfrac{\alpha'\omega k}{\Lambda_*} & k^2-\dfrac{\imath\omega}{l_*^2} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$\mathbf{x} = (\mathbf{A}, \mathbf{S}, \theta)$, $1/l_*^2 = \kappa/\Lambda_*$. Нетривиальная разрешимость системы (6) требует того, чтобы определитель матрицы (7) равнялся нулю, что приводит к биквадратному и бикубическому уравнениям относительно волнового числа k.

Рассмотрим биквадратное уравнение

$$\frac{k^4}{k_{\perp}'^4} - \left[h_3^2 - \tilde{k}_{\perp}^2\, h_1^2\right] \frac{k^2}{k_{\perp}'^2} + \left(1 - h_1^2\right) \tilde{k}_{\perp}^2 = 0. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения $k''_\perp = \omega/c''_\perp$, $k'_\perp = \omega/c'_\perp$ и безразмерные параметры

$$h_1^2 = \frac{4\eta}{\mathcal{J}\omega^2}, \qquad h_2^2 = \frac{\eta}{\rho c''^2_\perp}, \qquad \tilde{k}^2_\perp = \frac{k''^2_\perp}{k'^2_\perp} = \frac{c'^2_\perp}{c''^2_\perp}, \qquad h_3^2 = 1 + \tilde{k}^2_\perp + h_1^2 h_2^2.$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\sqrt{2}\frac{k}{k'_\perp} = a_{1,2} \pm i b_{1,2},$$

где

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{h_3^2 - \tilde{k}^2_\perp\, h_1^2 + \sqrt{4\tilde{k}^2_\perp\,(1-h_1^2)}}{2}}, \qquad b_{1,2} = \frac{\sqrt{-D}}{2a_{1,2}},$$

D — дискриминант уравнения (8). Следует отметить, что D не может быть положительной величиной, так как в этом случае квадраты волновых чисел являются вещественными, а сами волновые числа должны быть либо чисто мнимыми, либо вещественными, что противоречит предположению о рассмотрении затухающих волн. Поскольку нас интересуют только корни с $\mathrm{Re}\, k > 0$, $\mathrm{Im}\, k > 0$, то остается единственный корень, удовлетворяющий этим ограничениям:

$$\sqrt{2}\frac{k}{k'_\perp} = a_1 + i b_1.$$

Теперь рассмотрим бикубическое уравнение

$$\frac{k^6}{k^6_\parallel} - \left(\tilde{k}_1^2 + iQ_2^2\right)\frac{k^4}{k^4_\parallel} + \left(\tilde{k}_1^2 + iQ_3^2\right)\frac{k^2}{k^2_\parallel} - i\tilde{k}_1^2 Q_1^2 = 0,$$

где

$$k''_\parallel = \frac{\omega}{c''_\parallel}, \quad k_\parallel = \frac{\omega}{c_\parallel}, \quad \tilde{k}_\parallel = \frac{k''_\parallel}{k_\parallel},$$

$$Q_1^2 = \frac{\omega}{l_*^2 k^2_\parallel}, \quad s_1^2 = \frac{\alpha^2}{\omega\Lambda_*\rho}, \quad s'^2_1 = \frac{\alpha'^2}{\omega\Lambda_*\mathcal{J}}, \quad \tilde{k}_1^2 = \tilde{k}^2_\parallel(1-h_1^2),$$

$$Q_2^2 = Q_1^2 + \tilde{k}^2_\parallel s'^2_1 + s_1^2, \quad Q_3^2 = Q_1^2\left(\tilde{k}_1^2 + 1\right) + \tilde{k}^2_\parallel\left[s'^2_1 + s_1^2(1-h_1^2)\right].$$

Замена $k^2/k^2_\parallel = y + (\tilde{k}_1^2 + iQ_2^2)/3$ сводит бикубическое уравнение к неполному кубическому

$$y^3 + py + q = 0,$$

решение которого согласно формулам Кордано имеет вид

$$y_1 = u_0 + v_0; \quad y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0);$$

где

$$u_0 = \sqrt[3]{|\, u_0^* \,|}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \qquad u_0^* = -\frac{q}{2} + \sqrt{D'}, \qquad \varphi = \arg u_0^*,$$

$$D' = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \qquad v_0 = -\frac{p}{3u_0}.$$

Значения волнового числа k, полученные в результате исследования бикубического и биквадратного уравнений, могут быть использованы при отделении многозначных ветвей квадратных корней на комплексной плоскости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Eringen A. C.* Microcontinuum Field Theories. Vol. I: Foundations and Solids. Berlin, Heidelberg, New York et al.: Springer-Verlag, 1999. 325 pp.
2. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 384 pp. (Transl. from the Polish by H. Zorski)

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 19/II/2011.

MSC: 74B99, 74A60; 74F05, 74J99

ON WAVENUMBERS OF PLANE HARMONIC TYPE I THERMOELASTIC WAVES OF MICROROTATION

L. N. Kosygina

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mail: fleur.lilia@gmail.com

The present paper is researching the propagation of plane harmonic GNI-thermoelastic waves of microrotation by the coupled system of linear micropolar equation of motion and heat transport. The study incorporates the investigation of weak discontinuities propagating in CTMPE media by the Thomas–Hadamard technique.

Key words: *micropolar GNI-thermoelasticity, plane wave, wavenumber.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 19/II/2011.

Liliya N. Kosygina, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics.