Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 306–312

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДИСКА НА РЕОЛОГИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Г. В. Павлов, М. А. Кальмова, Е. С. Вронская, И. Н. Игнатов

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: ignatov63@gmail.com, kalmova@inbox.ru

Построена математическая модель движения диска на реологическом основании типа тела Кельвина. На основе гипотезы о точечном контакте диска с основанием получена система дифференциальных уравнений движения диска в форме модифицированных уравнений Чаплыгина, включающих обобщённую реологическую силу реакции, а также три стационарных уравнения связи, два из которых — неголономные. Проведён анализ устойчивости перманентных движений диска. Показано, что прямолинейное движение диска неустойчиво по углу нутации θ и циклическим координатам ζ_c и η_c.

Ключевые слова: *неголономные связи, кривая релаксации, годограф Михайлова.*

Качение твёрдых тел по основанию, моделируемому реологическим телом Кельвина, вызывает определённый интерес. Однако, как показывает обзор литературы [1–10], вопросы устойчивости диска на реологическом основании наследственного стандартного тела остаются неосвещёнными. При составлении уравнений Лагранжа в такого рода системах обычно вводят функцию Релея с полной или неполной диссипацией или поправку на рассеяние энергии в форме нелинейной функции, учитывающей гистерезисные потери. В монографии [1] автор приводит широкую выборку работ, посвященных, в частности, вопросам устойчивости движения тяжелых твердых тел на горизонтальной плоскости. Классифицируя эти работы, автор [1] рассматривает три вида взаимодействия тела с плоскостью:

1) полное отсутствие трения в точке касания с опорной плоскостью (абсолютно гладкая поверхность);
2) полное отсутствие скольжения в точке касания (шероховатая плоскость);
3) в точке касания тела с плоскостью действует сила реакции плоскости, пропорциональная скорости точки касания тела (сила вязкого трения); в этом случае тело представляет собой диссипативную голономную систему.

Таким образом, как показывает обзор литературы, математический анализ устойчивости диска на основании тела Кельвина отсутствует. Всё это остро ставит вопрос об анализе устойчивости движения диска на реологическом основании Кельвина.

Рассматривается движение однородного кругового жёсткого диска массой M и радиусом r по вязкоупругому основанию, наделённому деформационно-демпфирующими свойствами, отвечающими физической модели Кельвина, и работающему совместно с безмассовой оболочкой-мембраной с конечной жесткостью c_1 на растяжение. Предполагается, что основание имеет точеч-

Георгий Васильевич Павлов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики. *Мария Александровна Кальмова*, аспирант, каф. сопротивления материалов и строительной механики. *Елена Сергеевна Вронская* (к.т.н., доц.), доцент, каф. сопротивления материалов и строительной механики. *Игорь Николаевич Игнатов*, магистрант, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

ный контакт с диском, причём силы взаимодействия сводятся к силе, приложенной в точке касания и направленной вертикально плоскости качения. Силовое взаимодействие между диском и основанием, вообще говоря, сводится к реологической реакции P и моменту трения $M_{\text{тр}}$, так как контакт колеса и основания с учётом их деформаций осуществляется по некоторой малой поверхности контакта. Но, как показано в работах [2, 3], модуль момента трения убывает по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к постоянной, близкой к нулю, а деформация, параллельная оси ζ основания, при надлежащем выборе эксплуатационных параметров основания может быть пренебрежимо малой. Поэтому задача решается в предположении, что кривизна линии контакта основания и диска меньше кривизны диска. Тогда справедлива гипотеза о точечном контакте диска с основанием.

Движение диска отнесем к неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 1) с началом в точке O в опорной плоскости. Ось ς направлена вертикально вверх. С точкой касания диска D свяжем полуподвижные оси Кёнига $D\xi^*\eta^*\zeta^*$ — параллельные осям $0\xi\eta\zeta$ и движущиеся поступательно. Неизменно с центром диска свяжем систему координат $Cxyz$, ось z направлена по нормали к плоскости диска. За обобщенные координаты приняты координаты центра диска ξ_c, η_c, ζ_c, углы Эйлера ψ, θ, φ, а также ζ — вертикальная координата точки касания диска с основанием. Имеет место соотношение $\zeta_c = \zeta + r\sin\theta$.

Получим уравнения связей из равенства скоростей точки диска и точки основания в точке касания:

$$\overline{V}_D = \overline{V}_C + \overline{\omega} \times \overline{CD}, \tag{1}$$

где $\overline{V}_D = (V_\xi,\, V_\eta,\, V_\zeta)$ — вектор скорости деформации точки основания, совпадающей с точкой касания диска, в рассматриваемом случае: $V_\xi = V_\eta = 0$, $V_\zeta = \dot{\zeta}$.

Проецируя векторное равенство (1) на неподвижные оси координат, получим

$$\dot{\xi}_c = r[\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\cos\theta)],$$

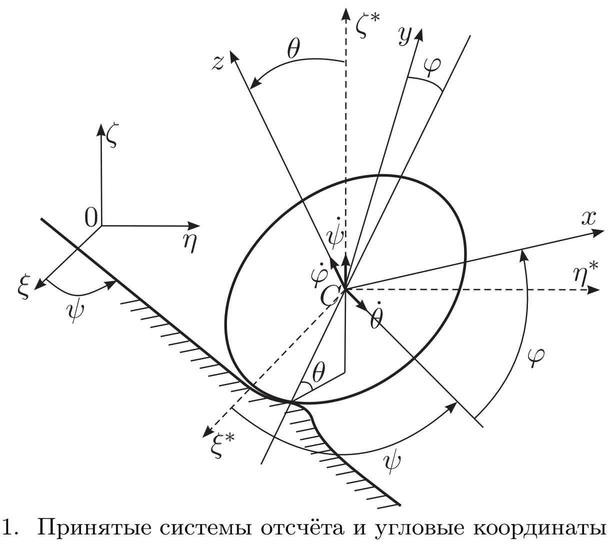

Рис. 1. Принятые системы отсчёта и угловые координаты диска

$$\dot{\eta}_c = -r[\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\cos\theta)],$$
$$\dot{\zeta}_c = \dot{\zeta} + r\dot{\theta}\cos\theta. \qquad (2)$$

Два первых уравнения (2) представляют уравнения неголономных связей, последнее уравнение — голономная связь и может быть проинтегрировано. Кинетическая и потенциальная энергии диска имеют вид:

$$T = \frac{M}{2}(\dot{\xi}_c^2 + \dot{\eta}_c^2 + (\dot{\xi} + r\dot{\theta}\cos\theta)^2) + \frac{1}{2}\left(A\left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) + C\omega_z^2\right),$$
$$\Pi = Mg(r\sin\theta + \zeta) + \frac{c_1\zeta^2}{2}.$$

Здесь $A = Mr^2/4$, $C = Mr^2/2$ — экваториальный и аксиальный центральные моменты инерции диска; ω_x, ω_y, ω_z задаются кинематическими уравнениями Эйлера; g — ускорение свободного падения. Учитывая склерономность связей и то, что кинетическая, потенциальная энергии и уравнения связей не содержат обобщенных координат ξ_c, η_c, целесообразно записать уравнения движения диска в форме модифицированных уравнений Чаплыгина, когда уравнения движения диска можно исследовать независимо от уравнений связей:

$$L_j(q,\, \dot{q},\, t) + \sum_{j=1}^{K} b_{kj}P_k = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m-\nu. \qquad (3)$$

Здесь $L_j(q,\, \dot{q},\, t) = (d/dt)(\partial\bar{T}/\partial\dot{q}_j) - (\partial\bar{T}/\partial q_j) - Q'_j$; $q_j = (\zeta,\, \psi,\, \theta,\, \varphi)$ — лагранжиан индекса j, описывающий движение диска на реологическом основании; $\bar{T}$ — кинетическая энергия, выраженная через независимые обобщенные скорости; Q'_j — обобщенные силы с исключенными вариациями зависимых координат; B_j — гироскопические силы, порождаемые неголономностью связей, причём $B_\psi = -mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta$, $B_\theta = 0$, $B_\varphi = mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta$; K — число реологических элементов; $b_{kj} = \sum\limits_{j=1}^{3N} e_{ik}(\partial x_i)/(\partial q_j)$, e_{ik} — направляющие косинусы реакции P_k в i-той точке; x_i — координаты точки приложения реологической силы P_k; m — число обобщенных координат; ν — число неголономных связей. Координата φ является циклической, так как не содержится в уравнениях движения; координата ψ — псевдоциклической ввиду вхождения её в коэффициенты неголономных связей. Напряжённо-деформированное состояние реологического основания по координате ζ определяется уравнением

$$n_k\dot{P}_k + P_k = n_k c\dot{\zeta} + \bar{c}\zeta,$$

где n_k — время релаксации k-того элемента; c, $\bar{c}$ — соответственно мгновенный и длительный модули упругости основания.

Уравнения движения (3) допускают частные решения вида

$$\theta = \theta_0,\ \dot{\theta} = 0,\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \omega,\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \Omega,\ \zeta = \zeta_0,\ \dot{\zeta} = 0,\ P = P_0,\ \dot{P} = 0, \qquad (4)$$

описывающие стационарные невозмущенные движения диска.

Уравнения невозмущенного движения диска запишутся следующим образом:

$$Mg + P_0 + C_1\zeta_0 = 0, \quad P_0 - \bar{c}\zeta_0 = 0,$$

$$Mgr\cos\theta_0 + (c + Mr^2)\omega\Omega\sin\theta_0 - (A - C - Mr^2)\Omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0. \qquad (5)$$

При фиксированных значениях $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ эти уравнения допускают семейство установившихся решений относительно θ.

Из (5) следует, что размерность многообразия стационарных движений диска равна двум. На рис. 2 приведены графические иллюстрации невозмущенных движений. На интервале значений $0 < \theta < \pi/2$ точки кривой (рис. 2, *а*) обозначают движение диска с различными нутационными угловыми скоростями $\Omega > \Omega_{\text{кр}}$ по эллиптическим орбитам с постоянным углом отклонения плоскости диска от основания; при $\theta = \pi/2$, $\Omega = 0$ диск совершает прямолинейное движение и при $\theta = \pi/2$, $\Omega = \omega = 0$ (рис. 2, *б*) — происходит вращение вокруг неподвижного вертикального диаметра. На всех графиках нижняя ветвь физически не реализуется.

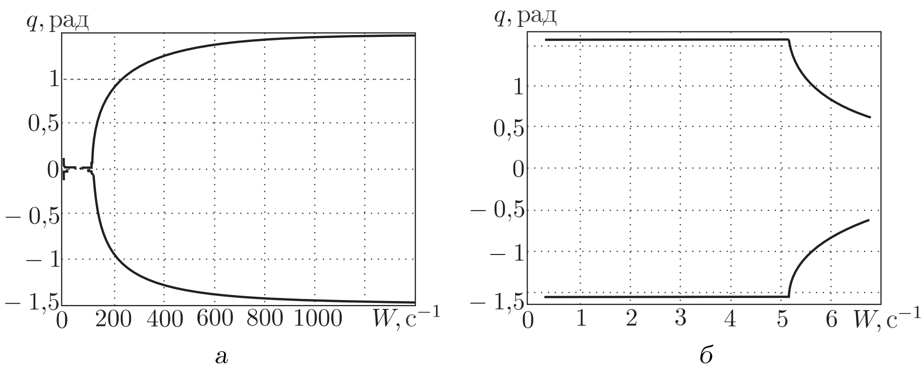

Рис. 2. Семейство стационарных решений

Исследуем устойчивость невозмущенного движения по уравнениям первого приближения. Положив $\dot\psi = \Omega + x_1$, $\dot\varphi = \omega + \dot x_2$, $\theta = \theta_0 + x_3$, $\dot\theta = \dot x_3$, $\zeta = \zeta_0 + x_4$, $\dot\zeta = \dot x_4$, $P = P_0 + x_5$, $\dot P = \dot x_5$, линеаризуя уравнения движения диска в окрестности стационарного движения (4) и ограничиваясь первыми степенями возмущений, получим уравнения возмущенного движения первого приближения:

$$k_1x_4 + k_2x_5 + k_3\ddot x_3 + k_4\ddot x_4 = 0, \quad l_1\dot x_1 + l_2\dot x_2 + l_3\dot x_3 = 0,$$
$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4\ddot x_3 + m_5\ddot x_4 = 0, \quad n_1\dot x_1 + n_2\dot x_2 + n_3\dot x_3 = 0,$$
$$P_1x_4 + P_2x_5 + P_3\dot x_4 + P_4\dot x_5 = 0.$$

Здесь $k_1 = c_1$, $k_2 = 1$, $k_3 = Mr\cos\theta_0$, $k_4 = M$,

$$l_1 = \frac{1}{2}[(A + C + Mr^2) - (A - C - Mr^2)\cos 2\theta_0], \quad l_2 = (C + Mr^2)\Omega\sin\theta_0,$$
$$l_3 = [(A\Omega\cos\theta_0 - C\omega) - 2(C + Mr^2)\Omega\cos\theta_0]\sin\theta_0,$$
$$m_1 = [(C + Mr^2)\omega - 2(A - C - Mr^2)\Omega\cos\theta_0]\sin\theta_0, \quad m_2 = (C + Mr^2)\Omega\sin\theta_0,$$
$$m_3 = [(C{+}Mr^2)\omega\Omega\cos\theta_0 - (A{-}C{-}Mr^2)\Omega^2\cos^2\theta_0 + (A{-}C{-}Mr^2)\Omega^2\sin^2\theta_0],$$
$$m_4 = A + Mr^2, \qquad m_5 = Mr\cos\theta_0, \qquad n_1 = (C + Mr^2)\cos\theta_0,$$
$$n_2 = C + Mr^2, \qquad n_3 = -(C + 2Mr^2)\Omega\sin\theta_0,$$
$$P_1 = -\bar c, \qquad P_2 = 1, \qquad P_3 = -c\cdot n, \qquad P_4 = n.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2\left(a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5\right) = 0. \tag{6}$$

Нулевым корням соответствуют простые элементарные делители. Два нулевых корня характеристического уравнения обусловлены двумерностью многообразия стационарного движения диска. Необходимые условия устойчивости имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ a_3 = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0(a_3^2 - a_5a_4) > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_5 = a_5 > 0. \tag{7}$$

Ввиду необозримости коэффициентов a_i, анализ условий (7) затруднителен. В работе рассмотрены условия устойчивости в двух частных случаях, соответствующих перманентным вращениям диска. Случай $\theta_0 = \pi/4$ исследован численно.

1. Прямолинейное движение ($\boldsymbol{\theta_0 = \pi/2,\ \dot\psi = \Omega = 0}$). В этом случае уравнения движения диска принимают наиболее простой вид:

$$M\ddot\zeta + P + Mg = 0, \quad n\dot P + P - nc\dot\zeta - \bar c\zeta = 0. \quad \ddot\varphi = 0.$$

Исключая реологическую реакцию P, запишем:

$$nM\dddot\zeta + M\ddot\zeta + nc\dot\zeta + \bar c\zeta + Mg = 0, \quad \ddot\varphi = 0. \tag{8}$$

Характеристическое уравнение $nM\lambda^3 + M\lambda^2 + nc\lambda + \bar c = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -\delta_1$, $\lambda_{2,3} = -\delta_2 \pm i\omega$. Выражения δ_1 и δ_2 ввиду их громоздкости не выписаны. Для общего решения уравнения (8) имеем

$$\zeta = Ae^{-\delta_1 t} + Be^{-\delta_2 t}\cos\omega t + De^{-\delta_2 t}\sin\omega t. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что диск на реологическом основании движется по инерции с постоянной скоростью и совершает вертикальные затухающие колебания, которые накладываются на медленное экспоненциальное движение. Поэтому можно утверждать, что координаты ζ и P являются устойчивыми. Но прямолинейное движение диска неустойчиво. Это следует из последнего уравнения системы (5). Преобразуем его к следующему виду:

$$(C - A + mr^2)\Omega^2 z + (C + mr^2)\omega\Omega\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} + mgr = 0,$$

где $z = \sin\theta$. Определяя отсюда величину Ω, находим её критическое значение из уравнения

$$-Az\sqrt{1 - z^2} + Cz\sqrt{1 - z^2} + Mz^2\sqrt{1 - z^2} = 0.$$

Критическим значениям Ω соответствуют углы $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -\pi/2$, что и доказывает неустойчивость прямолинейного движения диска.

2. Вращение диска вокруг вертикального диаметра. Уравнения движения диска имеют следующий вид:

$$m\ddot{\zeta} + P + mg = 0, \quad n\dot{P} + P - nc\dot{\zeta} - \bar{c}\zeta = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Этот режим не может быть реализован, так как согласно предшествующим выкладкам угол $\theta = \pi/2$ — неустойчив.

Условия устойчивости движения диска при $\theta = \theta_0 \neq \pi/2$ исследованы численно при следующих данных: $\theta = \pi/4$, $\dot{\varphi}_0 = \omega = 100$ с$^{-1}$, $M = 0{,}2$ кг, $g = 9{,}8$ м/с^2, $A = Mr^2/4$, $C = Mr^2/2$, $\dot{\psi}_0 = \Omega = 20$ с$^{-1}$, $c = 150$ Н/м, $\bar{c}/c = 0{,}7$, $n = 50$ с.

Применяя критерий Михайлова, в уравнении (6) делаем замену $\lambda = i\omega$, где ω — угловая скорость диска на границе устойчивости. Отделяя вещественную и мнимую части, приходим к уравнениям

$$u = a_5 - a_3\omega^2 + a_1\omega^4, \quad v = a_4\omega - a_2\omega^3 + a_0\omega^5.$$

На рис. 3 видим, что годограф Михайлова [10] образует угол $5\pi/2$ рад. Следовательно, режим движения диска, соответствующий заданным эксплуатационным и начальным условиям, будет устойчив.

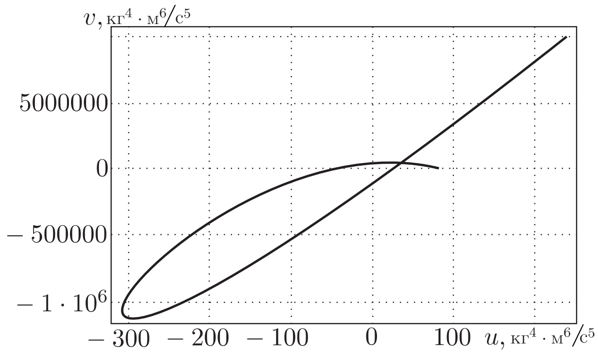

Рис. 3. Годограф Михайлова

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем / Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 126 с.; англ. пер.: *Karapetyan A. V., Rumyancev V. V.* / Applied Mechanics. Soviet Rewiews. Vol. 1: Stability and Analytical Mechanics. New York: Hemisphere. 3–144 pp.
2. *Павлов Г. В., Игнатов И. Н.* Динамика диска на вязкоупругом основании / В сб.: *III Международн. научн.-технич. конф-ция.* Пенза: ПГУ, 2008. С. 222–225. [*Pavlov G. V., Ignatov I. N.* Dynamics of the disc on a viscoelastic foundation / In: *III Mezhdunarodn. nauchn.-tehnich. konf-tsiya.* Penza: PGU, 2008. Pp. 222–225].
3. *Павлов Г. В., Кальмова М.А.* Эффект влияния полосы контакта упруговязкого основания на динамику диска // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. Т. 2(19). С. 186–192. [*Pavlov G. V., Kal'mova M. A.* Contact line influence effect of viscoelastic sub-base on the disk dynamics // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. Vol. 2(19). Pp. 186–192].
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с. [*Rabotnov Yu. N.* Elements of continuum mechanics of materials with memory. Moscow: Nauka, 1977. 383 pp.]

5. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 483 с. [*Neimark Yu. I., Fufaev N. A.* Dynamics of nonholonomic systems. Moscow: Nauka, 1967. 483 pp.]
6. *Вильке В. Г.* Теория качения твердого колеса по деформируемому рельсу // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат., мех.*, 1997. №1. С. 48–55. [*Vil'ke V. G.* The theory of the rolling of a rigid wheel on a deformable rail // *Vestn. Mosk. univ. Ser. 1, Mat., Mekh.*, 1997. no. 1. Pp. 48–55].
7. *Вильке В. Г.* О качении вязкоупругого колеса // *Изв. РАН. МТТ*, 1993. №6. С. 11–15. [*Vil'ke V. G.* Rolling of a viscoelastic wheel // *Izv. RAN. MTT*, 1993. no. 6. Pp. 11–15].
8. *Ишлинский А. Ю.* Механика: идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 623 с. [*Ishlinskii A. Yu.* Mechanics: ideas, problems, applications. Moscow: Nauka, 1985. 623 pp.]
9. *Павлов Г. В., Бородин В. С., Алимов А. В.* Динамика диска, катающегося по балке на упруго-вязком основании // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2007. №9/1(59). С. 165–171. [*Pavlov G. V., Borodin V. S., Alimov A. V.* Dynamics of a rigid disk on a beam on viscoelastic ground // *Vestn. Sam. gos. un-ta. Ectestvennonauchn. ser.*, 2007. no. 9/1(59). Pp. 165–171].
10. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с. [*Merkin D. R.* Introduction to the theory of the stability of motion. Moscow: Nauka, 1987. 304 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 19/I/2011.

MSC: 70F25; 70E50

STABILITY OF DISK MOTION ON THE RHEOLOGICAL GROUND

G. V. Pavlov, M. A. Kal'mova, E. S. Vronskaya, I. N. Ignatov

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: ignatov63@gmail.com, kalmova@inbox.ru

In this paper a new mathematical model of the disk motion on the basis of the Kelvin body is constructed. Accepting the hypothesis of a point contact with the drive base, a system of differential equations of the disk motion is derived in the form of modified Chaplygin equations involving generalized rheological response force, as well as three stationary constraint equations, two of which are nonholonomic. The analysis of the drive permanent movements stability was carried out. It is shown that the rectilinear motion of the disk and spinning around a vertical diameter are unstable in relation to the nutation angle θ.

Key words: *nonholonomic connection, relaxation curve, Mikhailov hodograph.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 19/I/2011.

Georgiy V. Pavlov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics. *Mariya A. Kal'mova*, Postgraduate Student, Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics. *Elena S. Vronskaya* (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics. *Igor' N. Ignatov*, Master Student, Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics.