Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 179–189

УДК 539.219.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СПИРАЛЬНО-МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С УЧЁТОМ СИЛ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. В. Епишкин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: s133@yandex.ru

Построено замкнутое решение задачи об осесимметричных колебаниях спирально-многослойного неоднородного цилиндра с учётом сил вязкого сопротивления. Цилиндр формируется навивкой предварительно натянутой по произвольному закону металлической ленты на упругоподатливую оправку. Анализируется спектр круговых частот свободных осесимметричных колебаний.

Ключевые слова: *динамическая задача, нагрузка, неоднородный, цилиндр, спирально-многослойный, силы вязкого сопротивления, метод конечных интегральных преобразований.*

В работе построено замкнутое решение осесимметричной динамической задачи для спирально-многослойного цилиндра, который формируется путём навивки предварительно натянутой металлической ленты на упругоподатливую оправку. В отличие от [1] в настоящей работе учитываются силы вязкого сопротивления.

Рассматриваются случай плоской деформации, а также плоского напряжённого состояния при наличии осевой симметрии.

Полый цилиндр подвержен действию произвольной радиально-симметричной нагрузки, приложенной как на внешней, так и внутренней поверхностях.

Используя уравнения движения осесимметричной пространственной задачи теории упругости в перемещениях, краевую задачу осесимметричных колебаний спирально-многослойного неоднородного цилиндра можно сформулировать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U^{\text{н}}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r}\frac{\partial U^{\text{н}}(r,t)}{\partial r} - \frac{1-n\beta}{r^2}U^{\text{н}}(r,t) - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2 U^{\text{н}}(r,t)}{\partial t^2} = \\ = (\alpha+n\beta)\frac{T(r,t)}{E\delta r} - \frac{\beta}{E\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \qquad (1)$$

при начальных и граничных условиях соответственно:

$$U^{\text{н}}(r,0) = f^{\text{н}}(r), \quad \frac{\partial U^{\text{н}}(r,0)}{\partial t} = g^{\text{н}}(r), \quad \text{при} \quad t=0,\ a \leqslant r \leqslant b; \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &D\frac{\partial U^{\text{н}}(a,t)}{\partial r} + \frac{F}{a}U^{\text{н}}(a,t) = A^{\text{н}}(t), \quad \text{при } r=a; \\ &D\frac{\partial U^{\text{н}}(b,t)}{\partial r} + \frac{F}{b}U^{\text{н}}(b,t) = B^{\text{н}}(t), \quad \text{при } r=b. \end{aligned} \qquad (3)$$

Вячеслав Владимирович Епишкин, аспирант, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

Здесь a, b ($\bar{a} = a/b$, $\bar{b} = 1$) — внутренний и наружный радиусы цилиндра; $U^{н}(r,t)$ — радиальное перемещение цилиндра; $f^{н}(r)$, $g^{н}(r)$ — функции начальных перемещений и начальных скоростей перемещений; $C_1 = \sqrt{D/\rho^{н}}$ — скорость волн расширения; $\rho^{н} = \rho\bar{r}^{n}$ — плотность материала навитой части цилиндра; ρ — плотность материала ленты; $\bar{r} = r/b$; n — показатель неоднородности, зависящий от упругой податливости оправки и закона натяжения ленты; δ — толщина ленты; $T(r,t)$ — закон натяжения ленты;

$$A^{н}(t) = \frac{A(t)}{\bar{a}^{н}} - \frac{FT(a,t)}{E\delta}, \quad B^{н}(t) = \frac{B(t)}{b^{н}} - \frac{FT(b,t)}{E\delta}; \tag{4}$$

$A(t)$, $B(t)$ — динамическое радиальное давление на внутренней и внешней поверхностях цилиндра; $\beta = F/D$, $\alpha = 1 - \beta$ — безразмерные коэффициенты, причём F и D определяются следующими выражениями:

– в случае плоской деформации

$$D = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}, \quad F = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

– в случае плоского напряжённого состояния

$$D = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad F = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2},$$

где λ, μ — постоянные Ламе, а E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала ленты.

В соответствии с [2] начально-краевая задача (1)–(3) приводится к стандартной форме. Для этой цели для $U^{н}(r,t)$ вводим такое представление:

$$U^{н}(r,t) = g_1^{н}(r)A^{н}(t) + g_2^{н}(r)B^{н}(t) + W^{н}(r,t), \tag{5}$$

где $W^{н}(r,t)$, $g_1^{н}(r)$, $g_2^{н}(r)$ — дважды дифференцируемые функции определяемые ниже.

Подставляя выражение (5) в граничные условия (3) и требуя выполнения равенств

$$\begin{gathered} g_1^{н}(b) = g_2^{н}(a) = g_1^{н\prime}(a) = g_1^{н\prime}(b) = g_2^{н\prime}(a) = g_2^{н\prime}(b) = 0; \\ g_1^{н}(a) = a/F, \quad g_2^{н}(b) = b/F, \end{gathered} \tag{6}$$

приходим к однородным граничным условиям для функции $W^{н}(r,t)$:

$$\begin{aligned} D\frac{\partial W^{н}(a,t)}{\partial r} + \frac{F}{a}W^{н}(a,t) = 0, \quad &\text{при } r = a; \\ D\frac{\partial W^{н}(b,t)}{\partial r} + \frac{F}{b}W^{н}(b,t) = 0, \quad &\text{при } r = b. \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (5) дифференциальное уравнение (1) и начальные условия (2) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W^{н}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r}\frac{\partial W^{н}(r,t)}{\partial r} - \frac{1-n\beta}{r^2}W^{н}(r,t) - \frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2 W^{н}(r,t)}{\partial t^2} = p^{н}(r,t); \tag{8}$$

$$W^{\text{н}}(r{,}0) = G_1^{\text{н}}(r{,}0), \quad \frac{\partial W^{\text{н}}(r{,}0)}{\partial t} = G_2^{\text{н}}(r{,}0), \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} p^{\text{н}}(r,t) = \frac{1}{C_1^2}\left(g_1^{\text{н}}\ddot{A}^{\text{н}}(t) + g_2^{\text{н}}\ddot{B}^{\text{н}}\right) + \\ + \left(\frac{1-n\beta}{r^2}g_1^{\text{н}}(r) - \frac{n+1}{r}g_1^{\text{н}\prime}(r) - g_1^{\text{н}\prime\prime}(r)\right)A^{\text{н}}(t) + \\ + \left(\frac{1-n\beta}{r^2}g_2^{\text{н}}(r) - \frac{n+1}{r}g_2^{\text{н}\prime}(r) - g_2^{\text{н}\prime\prime}(r)\right)B^{\text{н}}(t) + \\ + (\alpha - n\beta)\frac{T(r,t)}{E\delta r}\frac{\beta}{E\delta r} - \frac{\beta}{E\delta}T'(r,t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} G_1^{\text{н}}(r{,}0) = f^{\text{н}}(r) - g_1^{\text{н}}(r)A^{\text{н}}(0) - g_2^{\text{н}}(r)B^{\text{н}}(0), \\ G_2^{\text{н}}(r{,}0) = g^{\text{н}}(r) - g_1^{\text{н}}(r)\dot{A}^{\text{н}}(0) - g_2^{\text{н}}(r)\dot{B}^{\text{н}}(0). \end{aligned} \tag{11}$$

В соотношениях (6)–(11) и далее штрих означает дифференцирование по r, а точка — по t.

Функции $g_1^{\text{н}}(r)$, $g_2^{\text{н}}(r)$ можно представить в виде полиномов третьей степени. Тогда, используя условия (6), выражения для $g_1^{\text{н}}(r)$, $g_2^{\text{н}}(r)$ можно получить в виде

$$\begin{aligned} g_1^{\text{н}}(r) = \tfrac{a}{F(a-b)^3}\left[b^2(3a-b) - 6bar + 3(b+a)r^2 - 2r^3\right], \\ g_2^{\text{н}}(r) = \tfrac{b}{F(b-a)^3}\left[a^2(3b-a) - 6abr + 3(a+b)r^2 - 2r^3\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, исходная начально-краевая (1)–(3) задача преобразуется к (7)–(9) для функции $W^{\text{н}}(r,t)$ с соответствующими однородными граничными условиями. Её решение осуществляется структурным алгоритмом метода конечных интегральных преобразований.

Вводим на сегменте $[a,b]$ конечное интегральное преобразование с весовой функцией r^{n+1} и неизвестным пока ядром $K(\xi_i r)$, т. е. умножаем все члены уравнения (8) и начальных условий (9) на $r^{n+1}K(\xi_i r)$ и интегрируем в пределах от a до b:

$$\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t) = \int_a^b r^{n+1}W^{\text{н}}(r,t)K(\xi_i r)dr, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b r^{n+1}W^{\text{н}}(r{,}0)K(\xi_i r)dr = \int_a^b r^{n+1}G_1^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr, \\ \frac{d}{dt}\int_a^b r^{n+1}W^{\text{н}}(r{,}0)K(\xi_i r)dr = \int_a^b r^{n+1}G_2^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr, \end{aligned} \tag{14}$$

где ξ_i — параметры, образующие счётное множество.

Выполняя теперь интегрирование по частям и используя условия

$$r^{n+1}\left[K(\xi_i r)\frac{\partial W^{\text{н}}(r,t)}{\partial r} - K'(\xi_i r)W^{\text{н}}(r,t)\right] = 0 \quad (r = a, b); \tag{15}$$

$$\int_a^b W^{\text{н}}(r,t)\Big[r^{n+1}K''(\xi_i r) + (n+1)r^n K'(\xi_i r) - (1-n\beta)r^{n-1}K(\xi_i r)\Big]dr =$$

$$= -\xi_i^2 \int_a^b r^{n+1} W^{\text{н}}(r,t) K(\xi_i r) dr \quad (16)$$

(условие равенства нулю билинейной формы на концах интервала $[a,b]$ и операционное свойство), получаем счётную систему задач Коши для трансформанты $\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t)$

$$\frac{d^2\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t)}{dt^2} + \omega_i^2 \bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t) = -C_1^2 \bar{p}^{\text{н}}(\xi_i,t) \quad (17)$$

и однородную краевую задачу для ядра преобразования $K(\xi_i r)$. Действительно, из (16) имеем

$$K''(\xi_i r) + \frac{n+1}{r}K'(\xi_i r) + \left(\xi_i^2 - \frac{1-n\beta}{r^2}\right)K(\xi_i r) = 0, \quad (18)$$

а равенства (15) в сочетании с однородными относительно функции $W^{\text{н}}(r,t)$ условиями (3) дают

$$DK'(\xi_i a) + \frac{F}{a}K(\xi_i a) = 0, \quad DK'(\xi_i b) + \frac{F}{b}K(\xi_i b) = 0. \quad (19)$$

В соответствии с методом квазинормальных координат [3] вводим в уравнение (17) силы упруговязкого сопротивления (внутреннего трения). Такой приём основан на экспериментально подтвержденном факте, согласно которому силы вязкого сопротивления практически не оказывают влияния на формы колебаний конструкции $K(\xi_i r)$, и их следует вводить в математическую модель после отделения пространственной переменной r. Обозначив через γ_i^* коэффициенты потерь для каждой моды колебаний i, силу внутреннего трения, следуя скорректированной частотно-независимой гипотезе Фойхта, можно представить в виде [3]

$$R(\xi_i,t) = \gamma_i^* \omega_i \frac{d\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t)}{dt}. \quad (20)$$

С учётом (20) уравнение (17) принимает вид

$$\frac{d^2\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t)}{dt^2} + \gamma_i^*\omega_i \frac{d\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t)}{dt} + \omega_i^2 \bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t) = -C_1^2 \bar{p}^{\text{н}}(\xi_i,t), \quad (21)$$

где $\omega_i = C_1\xi_i$ $(i \in \mathbb{N})$ — круговые частоты радиально-симметричных колебаний; $\bar{p}^{\text{н}}(\xi_i,t)$, $\bar{G}_1^{\text{н}}(\xi_i)$, $\bar{G}_2^{\text{н}}(\xi_i)$ — трансформанты (13) функций (10), (11).

Начальные условия (14) записываются следующим образом:

$$\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,0) = \bar{G}_1^{\text{н}}(\xi_i), \quad \frac{d\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,0)}{dt} = \bar{G}_2^{\text{н}}(\xi_i). \quad (22)$$

Решением уравнения (21) при начальных условиях (22) является выражение

$$\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i,t)=\exp\left(-\frac{\gamma_i^*}{2}\omega_i t\right)\left[\bar{G}_1^{\text{н}}(\xi_i)\cos(\omega_i\varepsilon_i t)\frac{\bar{G}_2^{\text{н}}(\xi_i)}{\omega_i}\sin(\omega_i\varepsilon_i t)-\right.$$
$$\left.-\frac{C_1^2}{\omega_i\varepsilon_i}\int\limits_0^t\bar{p}^{\text{н}}(\xi_i,\tau)\exp\left(\frac{\gamma_i^*}{2}\omega_i\tau\right)\sin\bigl(\omega_i\varepsilon_i(t-\tau)\bigr)d\tau\right],\quad(23)$$

где $\varepsilon_i=\sqrt{1-\frac{\left(\gamma_i^*\right)^2}{4}}$.

Разыскивая нетривиальные решения дифференциального уравнения (18) при граничных условиях (19), получаем общий интеграл в виде [4]

$$K(\xi_i r)=(\xi_i r)^{-\frac{n}{2}}\Bigl\{J_p(\xi_i r)\bigl[\xi_i Y_{p-1}(\xi_i a)-h_1Y_p(\xi_i a)\bigr]-$$
$$-Y_p(\xi_i r)\bigl[\xi_i J_{p-1}(\xi_i a)-h_1J_p(\xi_i a)\bigr]\Bigr\},\quad(24)$$

где $J_p(\xi_i r)$, $Y_p(\xi_i r)$ — цилиндрические функции I и II родов порядка

$$p=\sqrt{\frac{n^2}{4}-n\beta+1};$$

ξ_i — положительные корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\bigl(\xi_i J_{p-1}(\xi_i b)-k_1J_p(\xi_i b)\bigr)\bigl(\xi_i Y_{p-1}(\xi_i a)+h_1Y_p(\xi_i a)\bigr)=$$
$$=\bigl(\xi_i J_{p-1}(\xi_i a)+h_1J_p(\xi_i a)\bigr)\bigl(\xi_i Y_{p-1}(\xi_i b)+k_1Y_p(\xi_i b)\bigr).\quad(25)$$

Применяя формулу обращения обобщенного метода конечных интегральных преобразований [2]

$$W^{\text{н}}(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t)K(\xi_i r)}{\|K(\xi_i)\|^2},\quad(26)$$

представления (5) и (12), получим выражение для радиального перемещения спирально-многослойного неоднородного цилиндра с учётом сил вязкого сопротивления при действии произвольно изменяющейся во времени радиально-симметричной динамической нагрузки в виде разложения

$$U^{\text{н}}(r,t)=\frac{aA^{\text{н}}(t)}{F(a-b)^3}\bigl[b^2(3a-b)-6abr+3(a+b)r^2-2r^3\bigr]+$$
$$+\frac{bB^{\text{н}}(t)}{F(b-a)^3}\bigl[a^2(3b-a)-6abr+3(a+b)r^2-2r^3\bigr]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t)K(\xi_i r)}{\|K(\xi_i)\|^2}.\quad(27)$$

Здесь квадрат нормы $\|K\|^2$ в соответствии с [5] определяется выражением

$$\|K\|^2 = \int_a^b r^{n+1} K^2(\xi_i r) dr = \frac{2}{\pi^2 \xi_i^{n+2}} \left\{ \left[k^2 + \xi_i^2 \left(1 - \frac{p^2}{\xi_i^2 b^2} \right) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\xi_i J_{p-1}(\xi_i a) - h_1 J_p(\xi_i a)}{\xi_i J_{p-1}(\xi_i b) - k_1 J_p(\xi_i b)} \right)^2 - \left[h^2 + \xi_i^2 \left(1 - \frac{p^2}{\xi_i^2 a^2} \right) \right] \right\}, \quad (28)$$

где $h = (2F - nD)/(2Da)$, $k = (2F - nD)/(2Db)$, $h_1 = ((n+2p)D - 2F)/(2Da)$, $k_1 = ((n+2p)D - 2F)/(2Db)$.

Имея выражение (27), можно определить нормальные напряжения:

$$\sigma_r^{\text{н}}(r,t) = \bar{r}^n \left[D \frac{\partial U^{\text{н}}(r,t)}{\partial r} + \frac{F}{r} U^{\text{н}}(r,t) + \frac{F}{E\delta} T(r,t) \right] = \frac{\bar{r}^n F}{E\delta} T(r,t) +$$
$$+ \frac{\bar{r}^n a A^{\text{н}}(t)}{F(a-b)^3} \left\{ F \left[\frac{b^2}{r}(3a - b) - 6ab + 3(a+b)r - 2r^2 \right] + \right.$$
$$\left. + 6D \left[(a+b)r - ab - r^2 \right] \right\} +$$
$$+ \frac{\bar{r}^n b B^{\text{н}}(t)}{F(b-a)^3} \left\{ F \left[\frac{a^2}{r}(3b - a) - 6ab + 3(a+b)r - 2r^2 \right] + \right.$$
$$\left. + 6D \left[(a+b)r - ab - r^2 \right] \right\} +$$
$$+ \bar{r}^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t)}{N\left[K(\xi_i)\right]} \left[D \frac{dK(\xi_i r)}{dr} + \frac{F}{r} K(\xi_i r) \right], \quad (29)$$

$$\sigma_\theta^{\text{н}}(r,t) = \bar{r}^n \left[F \frac{\partial U^{\text{н}}(r,t)}{\partial r} + \frac{D}{r} U^{\text{н}}(r,t) + \frac{D}{E\delta} T(r,t) \right] = \frac{\bar{r}^n D}{E\delta} T(r,t) +$$
$$+ \frac{\bar{r}^n a A^{\text{н}}(t)}{F(a-b)^3} \left\{ D \left[\frac{b^2}{r}(3a - b) - 6ab + 3(a+b)r - 2r^2 \right] + \right.$$
$$\left. + 6F \left[(a+b)r - ab - r^2 \right] \right\} +$$
$$+ \frac{\bar{r}^n b B^{\text{н}}(t)}{F(b-a)^3} \left\{ D \left[\frac{a^2}{r}(3b - a) - 6ab + 3(a+b)r - 2r^2 \right] + \right.$$
$$\left. + 6F \left[(a+b)r - ab - r^2 \right] \right\} +$$
$$+ \bar{r}^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{W}^{\text{н}}(\xi_i t)}{N\left[K(\xi_i)\right]} \left[F \frac{dK(\xi_i r)}{dr} + \frac{D}{r} K(\xi_i r) \right], \quad (30)$$

$$\sigma_z^{\text{н}}(r,t) = \bar{r}^n F \left[\frac{\partial U^{\text{н}}(r,t)}{\partial r} + \frac{1}{r} U^{\text{н}}(r,t) + \frac{1}{E\delta} T(r,t) \right] = \frac{\bar{r}^n F}{E\delta} T(r,t) +$$

$$
+\frac{\bar r^n aA^{\text{н}}(t)}{(a-b)^3}\left[\frac{b^2}{r}(3a-b)-12ab+9(a+b)r-8r^2\right]+
$$
$$
+\frac{\bar r^n bB^{\text{н}}(t)}{(b-a)^3}\left[\frac{a^2}{r}(3b-a)-12ab+9(a+b)r-8r^2\right]+
$$
$$
+\bar r^n F\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar W^{\text{н}}(\xi_i t)}{N\left[K(\xi_i)\right]}\left[\frac{dK(\xi_i r)}{dr}+\frac{1}{r}K(\xi_i r)\right], \quad (31)
$$

здесь

$$
\frac{dK(\xi_i r)}{dr}=\xi_i^{\text{н}}(\xi_i r)^{-\frac{n}{2}}\Big\{\left[\xi_i^{\text{н}}Y_{p-1}(\xi_i a)-h_1Y_p(\xi_i a)\right]\times
$$
$$
\times\left[J_{p-1}(\xi_i r)-\frac{n+2p}{2r\xi_i^{\text{н}}}J_p(\xi_i r)\right]-
$$
$$
-\left[\xi_i^{\text{н}}J_{p-1}(\xi_i a)-h_1J_p(\xi_i a)\right]\left[Y_{p-1}(\xi_i r)-\frac{n+2p}{2r\xi_i^{\text{н}}}Y_p(\xi_i r)\right]\Big\}. \quad (32)
$$

Обобщённые трансформанты, входящие в равенство (23), определяются следующими выражениями:

$$
\bar G_1^{\text{н}}(\xi_i)=\int_a^b r^{n+1}f^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr+
$$
$$
+\frac{1}{F(b-a)^3}\left[A^{\text{н}}(0)ab^2(3a-b)-B^{\text{н}}(0)a^2b(3b-a)\right]I_{n+1}+
$$
$$
+\frac{6ab}{F(b-a)^3}\left[B^{\text{н}}(0)b-A^{\text{н}}(0)a\right]I_{n+2}+\frac{3(a+b)}{F(b-a)^3}\left[A^{\text{н}}(0)a-B^{\text{н}}(0)b\right]I_{n+3}+
$$
$$
+\frac{2}{F(b-a)^3}\left[B^{\text{н}}(0)b-A^{\text{н}}(0)a\right]I_{n+4}, \quad (33)
$$

$$
\bar G_2^{\text{н}}(\xi_i)=\int_a^b r^{n+1}g^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr+
$$
$$
+\frac{1}{F(b-a)^3}\left[\dot A^{\text{н}}(0)ab^2(3a-b)-\dot B^{\text{н}}(0)a^2b(3b-a)\right]I_{n+1}+
$$
$$
+\frac{6ab}{F(b-a)^3}\left[\dot B^{\text{н}}(0)b-\dot A^{\text{н}}(0)a\right]I_{n+2}+\frac{3(a+b)}{F(b-a)^3}\left[\dot A^{\text{н}}(0)a-\dot B^{\text{н}}(0)b\right]I_{n+3}+
$$
$$
+\frac{2}{F(b-a)^3}\left[\dot B^{\text{н}}(0)b-\dot A^{\text{н}}(0)a\right]I_{n+4}, \quad (34)
$$

$$
\bar p^{\text{н}}(\xi_i t)=\frac{a}{c_1^2F(b-a)^3}\big[b^2(b-3a)I_{n+1}+6abI_{n+2}-
$$
$$
-3(a+b)I_{n+3}+2I_{n+4}\big]\ddot A^{\text{н}}(t)+
$$
$$
+\frac{b}{c_1^2F(b-a)^3}\big[a^2(3b-a)I_{n+1}-6abI_{n+2}+3(a+b)I_{n+3}-2I_{n+4}\big]\ddot B^{\text{н}}(t)+
$$

$$+\frac{a}{F(b-a)^3}A^{\text{н}}(t)\Big\{\big[b^2(b-3a)I_{n-1}+9(a+b)I_{n+1}-16I_{n+2}\big]-$$
$$-n\big[\beta b^2(b-3a)I_{n-1}+(1+\beta)6abI_n+2(3+\beta)I_{n+2}-3(2+\beta)(a+b)I_{n+1}\big]\Big\}+$$
$$+\frac{b}{F(b-a)^3}B^{\text{н}}(t)\Big\{\big[a^2(3b-a)I_{n-1}-9(a+b)I_{n+1}+16I_{n+2}\big]-$$
$$-n\big[\beta a^2(3b-a)I_{n-1}-(1+\beta)6abI_n-2(3+\beta)I_{n+2}+3(2+\beta)(a+b)I_{n+1}\big]\Big\}-$$
$$-\frac{1-(n+1)\beta}{E\delta}\int_a^b T(r,t)r^nK(\xi_ir)dr-\frac{\beta}{E\delta}\int_a^b\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}r^{n+1}K(\xi_ir)dr. \quad (35)$$

В зависимостях (33)–(35) I_s — следующий определённый интеграл:

$$I_s=\int_a^b r^sK(\xi_ir)dr, \quad s=n-1,n,\dots,n+4. \quad (36)$$

Полагая $n=0$, получаем из равенств (24)–(36) соответствующие результаты для однородного цилиндра [6, 7].

Рассмотрим некоторые частные случаи натяжения ленты.

1. Рассмотрим степенную зависимость натяжения ленты, полагая $T(r,t)$ не зависящим от времени t:

$$T(r)=T_0\left(\frac{r}{a}\right)^m, \quad a\leqslant r\leqslant b, \quad (37)$$

где T_0 — постоянный коэффициент; $m\in\mathbb{R}$; в случае $m>0$ натяжение возрастает, а при $m<0$ — убывает. Согласно [8], зависимость (37) позволяет с достаточной точностью аппроксимировать законы натяжения ленты в большинстве случаев, встречающихся на практике.

Для (37) выражения (4) принимают вид

$$A^{\text{н}}(t)=\frac{A(t)}{\bar a^n}-\frac{FT_0}{E\delta}, \quad B^{\text{н}}(t)=\frac{B(t)}{\bar b^n}-\frac{FT_0}{E\delta}\frac{b^m}{a^m}.$$

Дифференцируя их, получаем

$$\dot A^{\text{н}}(t)=\frac{\dot A(t)}{\bar a^n}, \quad \ddot A^{\text{н}}(t)=\frac{\ddot A(t)}{\bar a^n}, \quad \dot B^{\text{н}}(t)=\frac{\dot B(t)}{\bar b^n}, \quad \ddot B^{\text{н}}(t)=\frac{\ddot B(t)}{\bar b^n}. \quad (38)$$

Выражения (27), (29)–(31) остаются справедливыми и в этом случае, однако с учётом (37), (38) они существенно упрощаются. Обобщённые трансформанты, входящие в соотношение (23), принимают вид

$$\bar p^{\text{н}}(\xi_it)=\frac{1}{(b-a)^3}\Bigg\{\left((b^3-3b^2a)\frac{a\ddot A(t)}{c_1^2F\bar a^n}+(3a^2b-a^3)\frac{b\ddot B(t)}{c_1^2F\bar b^n}\right)I_{n+1}+$$
$$+\big(6abI_{n+2}-3(a+b)I_{n+3}+2I_{n+4}\big)\left(\frac{a\ddot A(t)}{c_1^2F\bar a^n}-\frac{b\ddot B(t)}{c_1^2F\bar b^n}\right)+$$
$$+\left[(b^3-3b^2a)\left(\frac{aA(t)}{F\bar a^n}-\frac{aT_0}{E\delta}\right)+(3a^2b-a^3)\left(\frac{bB(t)}{F\bar b^n}-\frac{b^{m+1}T_0}{E\delta a^m}\right)\right](1-n\beta)I_{n-1}+$$

$$+\Big(\big(9(a+b)+3n(2+\beta)(a+b)\big)I_{n+1}-6n(1+\beta)abI_n-\big(16+2n(3+\beta)\big)I_{n+2}\Big)\times$$
$$\times\left[\frac{aA(t)}{F\bar{a}^n}-\frac{bB(t)}{F\bar{b}^n}-\frac{T_0}{E\delta}\left(a-\frac{b^{m+1}}{a^m}\right)\right]\Bigg\}+\frac{\alpha-(n+m)\beta}{E\delta a^m}T_0I_{m+n},$$

$$\bar{G}_1^{\text{н}}(\xi_i)=\int_a^b r^{n+1}f^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr+$$
$$+\frac{I_{n+1}}{F(b-a)^3}\left\{ab^2(3a-b)\left(\frac{A(0)}{\bar{a}^n}-\frac{FT_0}{E\delta}\right)-a^2b(3b-a)\left(\frac{B(0)}{\bar{b}^n}-\frac{FT_0b^m}{E\delta a^m}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{F(b-a)^3}\Bigg\{\big(-6abI_{n+2}+3(a+b)I_{n+3}-2I_{n+4}\big)\times$$
$$\times\left(\frac{aA(0)}{\bar{a}^n}-\frac{aFT_0}{E\delta}-\frac{bB(0)}{\bar{b}^n}+\frac{FT_0b^{m+1}}{E\delta a^m}\right)\Bigg\},$$

$$\bar{G}_2^{\text{н}}(\xi_i)=\int_a^b r^{n+1}g^{\text{н}}(r)K(\xi_i r)dr-$$
$$-\frac{I_{n+1}}{F(b-a)^3}\left(ab^2(3a-b)\frac{\dot{A}(0)}{\bar{a}^n}-a^2b(3b-a)\frac{\dot{B}(0)}{\bar{b}^n}\right)+$$
$$+\frac{1}{F(b-a)^3}\big(-6abI_{n+2}+3(a+b)I_{n+3}-2I_{n+4}\big)\left(\frac{a\dot{A}(0)}{\bar{a}^n}-\frac{b\dot{B}(0)}{\bar{b}^n}\right).$$

2. Лента навивается с постоянным натяжением: $T(r,t)=T_0=\text{const}$. Этот случай получается из первого, в котором необходимо принять $m=0$.

3. Натяжение ленты нарастает по линейному закону $T(r,t)=(T_0/a)r$. Этот случай получается из первого, в котором необходимо принять $m=1$.

В качестве примера приведём частоты собственных колебаний неоднородного спирально-многослойного стального цилиндра наружного радиуса $b=100$ см и различной толстостенности ($\bar{a}=0{,}5$, $\bar{a}=0{,}7$, $\bar{a}=0{,}9$), полученного путём навивки на толстостенную оправку $\bar{c}=c/a=0{,}5$ (c — внутренний радиус оправки). Коэффициент Пуассона ленты равен 0,3. Цилиндр навит при линейном законе натяжения ленты ($m=1$).

В таблицах приведены первые десять безразмерных корней $\bar{\xi}_i=\xi_i b$ трансцендентного уравнения (25) и соответствующие им частоты собственных колебаний цилиндров.

Вычисления производились при помощи пакета прикладных программ `MathCad`, при этом все расчётные соотношения были преобразованы к безразмерным величинам. Показатель неоднородности определяется согласно [9].

На основании приведенных в таблицах данных замечаем, что более плотный спектр частот отвечает плоскому напряжённому состоянию и большей толщине неоднородного многослойного цилиндра. Разница между величинами частот колебаний при одинаковой толщине стенки увеличивается в случае плоской деформации.

Частоты собственных колебаний цилиндра при плоской деформации

№	$\bar{a} = 0{,}5$		$\bar{a} = 0{,}7$		$\bar{a} = 0{,}9$	
	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}
1	1,221	116	1,045	99	0,942	89
2	6,545	619	10,78	1020	33,04	3125
3	12,70	1201	21,10	1996	63,66	6023
4	18,94	1792	31,52	2982	94,80	8969
5	25,20	2384	41,97	3870	126,1	11928
6	31,47	2977	52,42	4960	157,4	14892
7	37,74	3571	62,88	5949	188,8	17859
8	44,02	4165	73,35	6939	220,2	20828
9	50,30	4759	83,82	7930	251,5	23798
10	56,57	5353	94,28	8920	282,9	26768

Частоты собственных колебаний цилиндра в случае плоского напряжённого состояния

№	$\bar{a} = 0{,}5$		$\bar{a} = 0{,}7$		$\bar{a} = 0{,}9$	
	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}	$\bar{\xi}_i$	$\omega_i \cdot 10^6$, сек^{-1}
1	1,292	110	1,11	95	0,986	84
2	6,550	560	10,71	916	32,44	2773
3	12,70	1086	21,06	1801	63,34	5415
4	18,94	1619	31,50	2692	94,60	8086
5	25,20	2154	41,95	3586	125,9	10764
6	31,47	2690	52,41	4480	157,3	13445
7	37,74	3226	62,87	5374	188,7	16127
8	44,02	3763	73,33	6269	220,1	18816
9	50,30	4300	83,81	7164	251,5	21495
10	56,58	4836	94,28	8059	282,8	24179

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Скрябин В. М.* Расчёт спирально-многослойного неоднородного цилиндра на действие осесимметричной динамической нагрузки / В сб.: *Расчёт пространственных строительных конструкций. Вып. VII.* — Куйбышев, 1977. — С. 22–31.
2. *Сеницкий Ю. Э.* Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. — Саратов: Саратов. ун-т, 1985. — 176 с.
3. *Цейтлин А. И., Кусаинов А. А.* Методы учёта внутреннего трения в динамических расчётах конструкций. — Алма-Ата: Наука, 1987. — 283 с.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций: В 2-х ч. Ч. 1. — М.: Иностр. лит., 1949. — 799 с.
5. *Сеницкий Ю. Э.* О вычислении некоторых квадратур, содержащих цилиндрические функции / В сб.: *Расчёт пространственных строительных конструкций. Вып. 4*, 1974. — С. 102–104.
6. *Сеницкий Ю. Э., Скрябин В. М.* Исследование напряжённо-деформированного состояния длинных цилиндров при действии радиально-симметричной динамической нагрузки / В сб.: *Расчёт пространственных строительных конструкций. Вып. V.* — Куйбышев: 1975. — С. 43–60.
7. *Скрябин В. М.* Плоское напряжённое состояние цилиндра при радиально-симметричной динамической нагрузке / В сб.: *Расчёт пространственных строительных конструкций. Вып. VI.* — Куйбышев, 1976. — С. 58–64.
8. *Яблонский Б. В.* Прочность спирально-многослойного цилиндра с начальными напряжениями: Автореф. дис. . . . канд. наук. — Киев, 1974. — 18 с.
9. *Скрябин В. М.* Напряжённое состояние спирально-многослойного цилиндра при ста-

тическом давлении / В сб.: *Расчёт пространственных строительных конструкций. Вып. VII.* — Куйбышев, 1977. — С. 66–72.

Поступила в редакцию 27/XII/2009;
в окончательном варианте — 29/III/2010.

MSC: 74D05, 74S20

DYNAMIC PROBLEM FOR THE SPIRALLY-MULTILAYERED NON-UNIFORM CYLINDER TAKING INTO ACCOUNT FORCES OF VISCOUS RESISTANCE

V. V. Epishkin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: `s133@yandex.ru`

The structural algorithm of a method of final integral transformations constructs closed solution of the task on axes symmetrical oscillation of the spirally-multilayered non-uniform cylinder with the account of forces of viscous resistance. The cylinder is formed by winding of preliminary tense metal tape on elastic pliable tube. The spectrum of circular frequencies free axes symmetrical oscillations is analyzed.

Key words: *dynamic problem, loading, non-uniform, cylinder, spirally-multilayered, forces of viscous resistance, a method of final integrated transformations.*

Original article submitted 27/XII/2009;
revision submitted 29/III/2010.

Vyacheslav V. Epishkin, Postgraduate Student, Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics.