УДК 519.876.3, 519.857

СВОЙСТВА ГРАФОВ ЗАДАЧ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

А. В. Докучаев, А. П. Котенко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: docuhaevrud@gmail.com, ako1959@mail.ru

Рассмотрены свойства графа задачи оптимального вложения дополнительного ограниченного ресурса для сокращения критического пути сетевого проекта при неоднородном изменении разметки дуг орграфа проекта. Предложен алгоритм построения графа проекта по заданной матрице предшествования работ. Разработан алгоритм сокращения списков технологического предшествования работ проекта до списков непосредственного предшествования путём правильного упорядочивания. Приведены примеры добавления фиктивных работ и указан приём минимизации необходимого числа фиктивных работ для упрощения графа проекта. Показано, что, по крайне мере, с добавлением фиктивных работ граф проекта может быть построен.

Ключевые слова: *задача сетевого планирования и управления, списки предшественников, граф проекта, минимизация числа фиктивных работ.*

1. Постановка задачи. Продолжено [1–3] изучение задачи сетевого планирования и управления (СПУ) связным *проектом* $P = \{a(i)\}_{i=1}^{k\geqslant 1}$ из *проектных работ*

$$a(i) : i \neq j \Leftrightarrow a(i) \neq a(j)$$

с *предшественниками* $s(a(i)) \subset P$ и *временем выполнения*

$$t(a(i), x(i)) : P \times U(X) \to \mathbb{R}^+$$

при вложении *ресурса* $x(i) \in U(X)$ из *разбиения*

$$U(X) \overset{\text{def}}{=} \{x(i)\}_{i=1}^{k} : X = \bigcup_{i=1}^{k} x(i),\ x(i) \bigcap_{i\neq j} x(j) = \emptyset.$$

Здесь $s(a(i))$ — собственное (возможно, пустое) подмножество работ проекта P, требующих завершения до начала выполнения работы $a(i)$.

Ресурс X может быть вещественным числом с разбиением на неотрицательные слагаемые $0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} x(i) \leqslant X$ (энергетические затраты в химических или ядерных реакциях, зарядовые затраты в ядерных реакциях, финансы и т. п.) или множители $1 < \prod_{i=1}^{k} x(i) \leqslant X$ (передаточные числа в системе передач, коэффициенты усиления в каскадных системах управления, переменные процентные ставки, индексы роста и т. п.) дискретным множеством произвольных элементов $X = \{y_t\}_{t=1}^{L\geqslant 1}$ с разбиением на подмножества $U(X) \subseteq 2^X$ (признаки неколичественной природы, например, персоналии) и т. д.

Александр Владимирович Докучаев, аспирант, каф. прикладной математики и информатики. *Андрей Петрович Котенко* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

Оптимизируется распределение ресурса $\{x(i)\}_{i=1}^{k}$, минимизирующее *суммарное* время выполнения проекта $P : \sum_{i=1}^{k} t(a(i), x(i)) \to \min$. (Возможно неаддитивное (к примеру, мультипликативное) определение целевой функции).

2. Сокращение списков предшественников. Опишем *отношение* S *предшествования* $a_i S a_j$ проектных работ $a_i, a_j \in P$ *матрицей предшествования* $\mathbf{S} = \|s(i,j)\|_{i,j=1}^{k}$:

$$s(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(a(i), s(a(j))),$$

где

$$\chi(a(i), s(a(j))) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in s(a(j)), \\ 0, & \text{если } a_i \notin s(a(j)) \end{cases}$$

— *характеристическая функция.*

Таким образом, единицы в i-той строке матрицы $\mathbf{S}$ указывают на предшествование работы $a(i)$ работам соответствующих столбцов. Тогда транспонированная матрица $\mathbf{S}^\top$ опишет обратное *отношение* S^{-1} *следования* $a_j S^{-1} a_i$ проектных работ: единицы в i-том столбце соответствующих строк матрицы $\mathbf{S}^\top$ указывают на предшествование работы $a(i)$ работам соответствующих столбцов. Очевидно, отношения S и S^{-1} *транзитивны* ($S^2 \subseteq S$, $(S^{-1})^2 \subseteq \subseteq S^{-1}$), и в силу конечности множества проектных работ выполнены включения

$$\emptyset = S^{k-1} \subseteq S^{k-2} \subseteq \dots \subseteq S^3 \subseteq S^2 \subseteq S$$

и

$$\emptyset = (S^{-1})^{k-1} \subseteq (S^{-1})^{k-2} \subseteq \dots \subseteq (S^{-1})^3 \subseteq (S^{-1})^2 \subseteq S^{-1}.$$

Назовём работу $a(i) \in P$ *непосредственным предшественником* работы $a(j) \in P$, если $\chi(a(i), s(a(j))) = 1$ и нет другой работы:

$$a(l) \in P : \chi(a(i), s(a(l))) = \chi(a(l), s(a(j))) = 1.$$

В противном случае предшествование (следование) назовём *опосредованным.*

С помощью *списков непосредственных предшественников* $\{s^*(a(i))\}_{i=1}^{k}$ определим *отношение* S^* *непосредственного предшествования* $k \times k$*-матрицей непосредственного предшествования* $\mathbf{S}^* = \|s^*(i,j)\|_{i,j=1}^{k}$:

$$s^*(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(a(i), s^*(a(j))),$$

а транспонированной матрицей $\mathbf{S}^{*\top}$ — обратное *отношение* S^{*-1} *непосредственного следования* проектных работ. При этом отношения S^* и S^{*-1} в общем случае транзитивными не являются, так как

$$S^* = S - \bigcup_{t=2}^{k-1} S^t, \quad S^{*-1} = S^{-1} - \bigcup_{t=2}^{k-1} (S^{-1})^t.$$

Сократим списки предшествования $\{s(a(i))\}_{i=1}^{k}$ до списков непосредственного предшествования $\{s^*(a(i))\}_{i=1}^{k}$ и перестановкой строк и столбцов матрицы предшествования $\mathbf{S}$ *правильно упорядочим* проектные работы:

$$\chi(a(j), s^*(a(i))) = 0, \quad i < j.$$

В дальнейшем считаем исходную нумерацию проектных работ $\{(a(i))\}_{i=1}^{k}$ *правильной*, а исходные списки предшественников $\{s(a(i))\}_{i=1}^{k}$ *сокращёнными.* Матрица непосредственного предшествования правильно упорядоченных работ

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A}[i_1 \times j_1], \mathbf{A}[i_2 \times j_2], \ldots, \mathbf{A}[i_r \times j_r]), \quad 2 \leqslant r \leqslant k-1,$$

$$i_1 = j_1 = i_2, \quad j_2 = i_3, \quad , j_{r-1} = i_r = j_r, \quad \sum_{t=2}^{r} i_t = \sum_{t=1}^{r-1} j_t = k,$$

верхняя треугольная блочно-цепочная с нулевой главной диагональю, состоящая из нулевых элементов и непрерывной цепочки $i_t \times j_t$-блоков $\mathbf{A}[i_t \times j_t]$ $(1 \leqslant t \leqslant r)$, из которых первый и последний блоки квадратные нулевые:

$$\mathbf{A}[i_1 \times j_1] = 0, \quad \mathbf{A}[i_r \times j_r] = 0,$$

а остальные — ненулевые:

$$\mathbf{A}[i_t \times j_t] \neq 0, \quad 2 \leqslant t \leqslant r-1.$$

Пример 1. Матрица непосредственного предшествования правильно упорядоченных 9 проектных работ $\{a(i)\}_{i=1}^{9} = P$ может иметь вид

$$\mathbf{S} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle a(1)|a(2)\}j_1} & {\scriptstyle a(3)|a(4)|a(5)\}j_2} & {\scriptstyle a(6)|a(7)\}j_3} & {\scriptstyle a(8)|a(9)\}j_4} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A}[i_1 \times j_1] & \mathbf{A}[i_2 \times j_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}[i_3 \times j_3] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}[i_4 \times j_4] \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}[i_5 \times j_5] \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle a(1)|a(2)\}i_2} \\ {\scriptstyle a(3)|a(4)|a(5)\}i_3} \\ {\scriptstyle a(6)|a(7)\}i_4} \\ {\scriptstyle a(8)|a(9)\}i_5} \end{array} \end{array}.$$

3. Граф проекта. Построим орграф $G(V, R)$ проекта P (см. [3]). Определим сначала множество вершин V следующим образом.

Случай 1. Состоящий только из единиц (*единичный*) блок $\mathbf{A}[i_t \times j_t]$, $2 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant r-1$ соответствует общему завершению

$$v_{\text{к}}(a(\alpha(1))) = v_{\text{к}}(a(\alpha(2))) = \cdots = v_{\text{к}}(a(\alpha(i_t)))$$

и общему началу

$$v_{\text{н}}(a(\beta(1))) = v_{\text{н}}(a(\beta(2))) = \cdots = v_{\text{н}}(a(\beta(j_t)))$$

проектных работ $a(\alpha(1)), a(\alpha(2)), \ldots, a(\alpha(i_t)), a(\beta(1), a(\beta(2), \ldots, a(\beta(j_t)) \in P$ с номерами

$$1 \leqslant \sum_{s=1}^{t-1} i_s = \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(i_t) < \beta(1),$$

$$\beta(1) < \beta(2) < \cdots < \beta(j_t) = \sum_{s=t+1}^{r} j_s.$$

При этом

$$\alpha(1) = \sum_{s=1}^{t-1} i_s, \quad \alpha(s+1) = \alpha(s) + 1, \quad 1 \leqslant s \leqslant i_t - 1;$$

$$\beta(1) = \alpha(i_t + 1), \quad \beta(s+1) = \beta(s) + 1, \quad 1 \leqslant s \leqslant j(t) - 1,$$

$$\beta(j_t) = \sum_{s=1}^{t} i_s + j_t.$$

Добавим вершину $v(\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(i_t);\ \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(j_t)) \in V$, соединяющую указанные проектные работы (см. рис. 1). Таким образом,

$$\begin{aligned} v(\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(i_t);\ \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(j_t)) = \\ = v_{\text{к}}(a(\alpha(1))) = v_{\text{к}}(a(\alpha(2))) = \cdots = v_{\text{к}}(a(\alpha(i_t))) = \\ = v_{\text{н}}(a(\beta(1))) = v_{\text{н}}(a(\beta(2))) = \cdots = v_{\text{н}}(a(\beta(j_t))). \end{aligned}$$

Можно считать каждую добавленную вершину

$$v(\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(i_t);\ \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(j_t))$$

обозначением полного двудольного графа

$$K(i_t, j_t), \quad 1 \leqslant i_t \leqslant k-1, \quad 1 \leqslant j_t \leqslant k-1$$

с долями $K(1, i_t)$ мощности i_t и $K(j_t, 1)$ мощности j_t, имеющими единичные $i_t{\times}j_t$, $1{\times}i_t$ и $j_t{\times}1$-матрицы соседства вершин соответственно. Доли $K(1, i_t)$ и $K(j_t, 1)$ описывают общие моменты завершения $K(i_t,1) = \{v_{\text{к}}(a(\alpha(s)))\}_{s=1}^{i_t}$ и общие моменты начала $K(1, j_t) = \{v_{\text{н}}(a(\beta(s)))\}_{s=1}^{j_t}$ соответствующих проектных работ (см. рис. 2).

Очевидно, что полученный подграф $G(\mathbf{A}[i_t{\times}j_t])$, соединяющий проектные работы $\{a(\alpha(u))\}_{u=1}^{i_t} \cup \{a(\beta(u))\}_{u=1}^{j_t}$, планарен, а число вариантов прохождения полных путей проекта P через единичный блок $\mathbf{A}[i_t{\times}j_t]$ равно $i_t{\times}j_t$.

Случай 2. Если среди элементов блока $\mathbf{A}[i_t{\times}j_t]$, $2 \leqslant t \leqslant r-1$, есть нулевые, то соответствующий двудольный граф $K(i_t, j_t)$ не будет полным, и к проектным работам необходимо добавить фиктивные, так как в отличие от варианта на рис. 1 нельзя соединить одной вершиной выделенные i_t входящих и j_t исходящих направленных дуг.

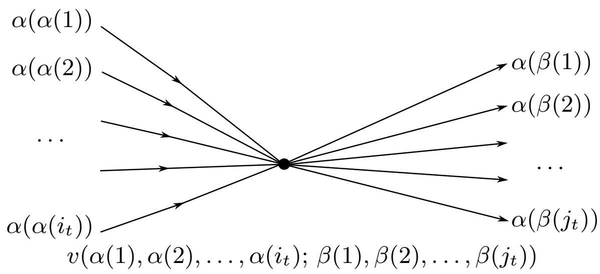

Рис. 1

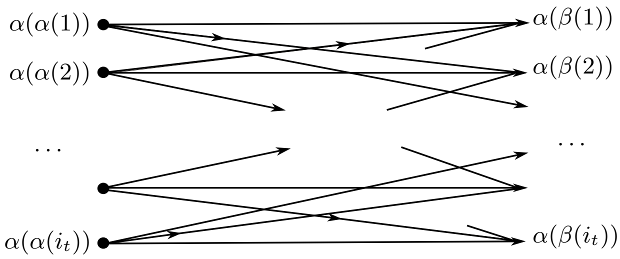

Рис. 2

Пример 2. Рассмотрим 2×2-блочную матрицу размерности 5×9 непосредственного предшествования проектных работ $\{a(i)\}_{i=6}^{14}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{5}$:

$$\mathbf{A}[5\times9] = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Объединяя события (см. рис. 3):

$$v_{\text{к}}(a(1)) = v_{\text{к}}(a(2)) = v_{\text{к}}(a(3)) = v_{\text{к}}(a(4)) = v_{\text{к}}(a(5)) = v_{\text{н}}(a(6)) =$$
$$= v_{\text{н}}(a(6)) = v_{\text{н}}(a(7)) = v_{\text{н}}(a(8)) = v_{\text{н}}(a(9)) = v_{\text{н}}(a(10)) =$$
$$= v_{\text{н}}(a(11)) = v_{\text{н}}(a(12)) = v_{\text{н}}(a(13)) = v_{\text{н}}(a(14)),$$

введём дополнительную (иначе — фиктивную) работу b_1 для сохранения *непосредственного* предшествования работ $\{a(i)\}_{i=6}^{9}$ работами $\{a(i)\}_{i=4}^{5}$, *непосредственного* предшествования работ $\{a(i)\}_{i=10}^{14}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{3}$ и *опосредованного* предшествования работ $\{a(i)\}_{i=6}^{9}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{3}$.

Перестановка проектных работ $\{a(i)\}_{i=6}^{9}$ и $\{a(i)\}_{i=10}^{14}$ и добавление фиктивной работы $b(1)$ между $a(5)$ и $a(10)$ не изменяет прочие блоки матрицы непосредственного предшествования $\mathbf{S}$, устанавливая правильное упорядочение объединённого множества работ $b(1)\cup\{a(i)\}_{i=1}^{14}$ и превращая блок $\mathbf{A}[5\times9]$ в 2×2-блочную 6×10-подматрицу с двумя единичными блоками размерности

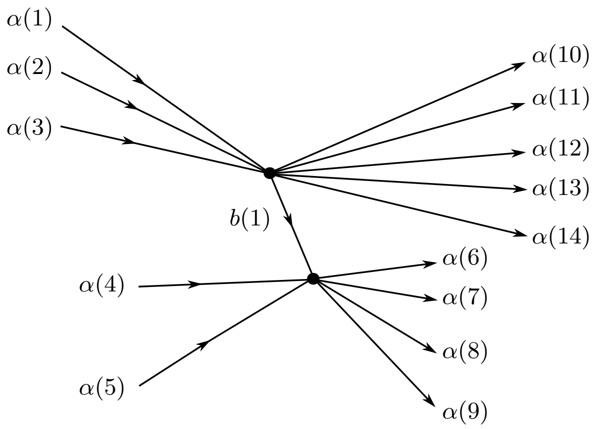

Рис. 3

$3{\times}6$ и $3{\times}4$ в разорванной цепочке ненулевых блоков выше главной диагонали матрицы $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccc} b(1) & a(10) & a(11) & a(12) & a(13) & a(14) & a(6) & a(7) & a(8) & a(9) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} a(1) \\ a(2) \\ a(3) \\ a(4) \\ a(5) \\ b(1) \end{array} \end{array}.$$

Пример 3. Заметим, что перестановка проектных работ $\{a(i)\}_{i=1}^{5}$, как и $\{a(i)\}_{i=6}^{14}$, не меняет правильности упорядочения. Так, перестановкой работ $\{a(i)\}_{i=6}^{14}$ примера 2 можно получить другую $2{\times}2$-блочную $5{\times}9$-матрицу непосредственного предшествования работ $\{a(i)\}_{i=6}^{14}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{5}$

$$\mathbf{A}[5{\times}9] = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

которой после объединения событий (см. рис. 4)

$$v_{\text{к}}(a(1)) = v_{\text{к}}(a(2)) = v_{\text{к}}(a(3)) = v_{\text{н}}(a(6)) = v_{\text{н}}(a(7)) = v_{\text{н}}(a(8)) = v_{\text{н}}(a(9)),$$

$$v_{\text{к}}(a(4)) = v_{\text{к}}(a(5)) = v_{\text{н}}(a(10)) = v_{\text{н}}(a(11)) = v_{\text{н}}(a(12)) = v_{\text{н}}(a(13)) = v_{\text{н}}(a(14))$$

и введения дополнительной (фиктивной) работы $b(1)$, сохраняющей *непосредственное* предшествование работ $\{a(i)\}_{i=6}^{9}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{3}$, *непосредственное* предшествование работ $\{a(i)\}_{i=10}^{14}$ работами $\{a(i)\}_{i=4}^{5}$ и *опосредованное* предшествование работ $\{a(i)\}_{i=10}^{14}$ работами $\{a(i)\}_{i=1}^{3}$, соответствует следующий подграф (см. рис. 4).

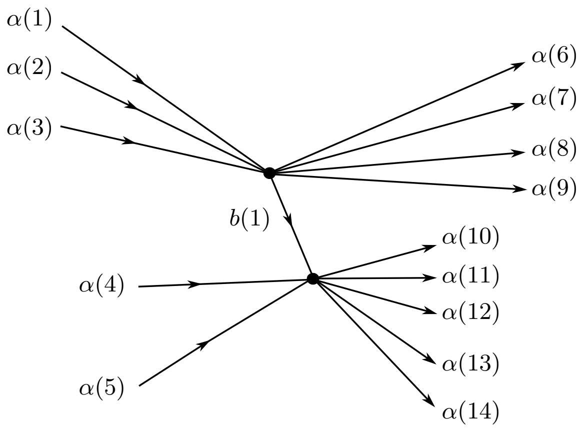

Рис. 4

Добавление фиктивной работы $b(1)$ между $a(5)$ и $a(6)$ не изменяет прочие блоки матрицы непосредственного предшествования $\mathbf{S}$, устанавливая правильное упорядочение объединённого множества работ $b(1) \cup \{a(i)\}_{i=1}^{14}$ и превращая блок $\mathbf{A}[5{\times}9]$ в $2{\times}2$-блочную $6{\times}10$-подматрицу

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} {\scriptstyle b(1)} & {\scriptstyle a(6)} & {\scriptstyle a(7)} & {\scriptstyle a(8)} & {\scriptstyle a(9)} & {\scriptstyle a(10)} & {\scriptstyle a(11)} & {\scriptstyle a(12)} & {\scriptstyle a(13)} & {\scriptstyle a(14)} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} {\scriptstyle a(1)} \\ {\scriptstyle a(2)} \\ {\scriptstyle a(3)} \\ {\scriptstyle a(4)} \\ {\scriptstyle a(5)} \\ {\scriptstyle b(1)} \end{array} \end{array}$$

с двумя $3{\times}5$-единичными блоками в разорванной цепочке ненулевых блоков выше главной диагонали матрицы $\mathbf{S}$.

4. Алгоритм добавления фиктивных работ. Приведём универсальный алгоритм добавления необходимого числа фиктивных работ $a_i \notin P$, $i \geqslant k+1$.

Рассмотрим ненулевой неединичный блок $\mathbf{A}[i{\times}j]$ из строк $B \overset{\text{def}}{=} \{a(u)\}_{u=l}^{l+i}$ и столбцов

$$C \overset{\text{def}}{=} \{a(u)\}_{u=l+i+1}^{l+i+j}, \quad l = \sum_{u=1}^{t-1} i_u, \quad 1 \leqslant i = i_t, \quad 1 \leqslant j = j_t, \quad 2 \leqslant t \leqslant r-1$$

проектных работ в непрерывной цепочке $\{\mathbf{A}[i_t{\times}t_t]\}_{t=1}^{r}$ блочно-цепочной матрицы непосредственного предшествования $\mathbf{S}$. Будем считать множество предшествующих проектных работ B фактор-множеством отношения равенства строк матрицы $\mathbf{A}[i{\times}j]$. Тогда отношение непосредственного следования s^{*-1} определит взаимно однозначное отображение

$$s^{*-1} : 2^C \to 2^C$$

на множестве всех подмножеств множества C. На замыкании D образа $s^{*-1}(2^C)$ операцией пересечения подмножеств построим ориентированное дерево отношения

$$\forall D_1, D_2 \in D (D_1 \to D_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} D_2 \subset D_1),$$

исключив пустое множество $\emptyset$. Дугами этого дерева являются искомые фиктивные работы, необходимые для построения подграфа $G(\mathbf{A}[i{\times}j])$, связывающего проектные работы $B \cup C$. Следовательно, завершено построение подграфа для неединичного блока из случая 2 п. 3.

Являясь деревом, подграф $G(\mathbf{A}[i{\times}j])$ планарен, а число вариантов прохождения полных путей проекта P через блок $\mathbf{A}[i{\times}j]$ равно $i{\times}j$. Таким образом, общее число M полных путей проекта P определяется произведением вариантов их прохождения через все блоки $\{\mathbf{A}[i_t{\times}j_t]\}_{t=2}^{r-1}$:

$$M = \prod_{t=1}^{r-1} i_t = \prod_{t=2}^{r} j_t.$$

5. Завершение построения графа проекта. Теперь из полученных подграфов $\{G(\mathbf{A}[i_t \times j_t])\}_{t=2}^{r-1}$ составим граф $G(V, R)$ проекта P. Для этого объединим начальные вершины стартовых работ в начальную вершину всего проекта и конечные вершины финишных работ — в конечную вершину всего проекта. Тогда все конечные вершины блока $\mathbf{A}[i_1 \times j_1]$ станут начальными вершинами блока $\mathbf{A}[i_2 \times j_2]$ и далее до конечных вершин блока $\mathbf{A}[i_{r-1} \times j_{r-1}]$, ставших начальными вершинами блока $\mathbf{A}[i_r \times j_r]$.

Тем самым показано, что в любом случае, по крайней мере, с добавлением фиктивных работ, граф проекта будет построен. Предложенный алгоритм позволяет автоматизировать построение графа проекта в случае сложного строения матрицы предшествования, определённой технологическими особенностями проекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Докучаев А. В., Котенко А. П.* Оптимизация привлечения дополнительных ресурсов в сетевом планировании // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. — № 1(20). — С. 234–238.
2. *Докучаев А. В., Котенко А. П.* Построение графа задачи оптимизации сетевого планирования и управления / В сб.: *Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2010)*: Материалы международной научно-технической конференции (17–21 мая 2010 г.). — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 291–294.
3. *Докучаев А. В., Котенко А. П.* Построение графа задачи оптимизации сетевого планирования / В сб.: *Труды Всероссийской научной конференции. Часть 2*: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами / Матем. моделирование и краев. задачи. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 86–90.

Поступила в редакцию 02/VII/2010;
в окончательном варианте — 30/IX/2010.

MSC: 90B10, 90C39

PROPERTIES OF GRAPHS OF PROBLEMS NETWORK PLANNING AND MANAGEMENT

A. V. Dokuchaev, A. P. Kotenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: docuhaevrud@gmail.com, ako1959@mail.ru

Properties of a task graph of an optimum investment are considered the additional limited resource for reduction of a critical way of the network project at non-uniform marking change of arches graph of the project. The algorithm construction of the count of the project on the set matrix of precedence of works is offered. The algorithm reduction lists of technological precedence of works of the project to lists of direct precedence by correct ordering is developed. Examples of addition fictitious works are resulted and reception minimization of necessary number of fictitious works for simplification of the count the project is specified. It is shown that, on an extreme measure, with addition of fictitious works, columns of the project it will be constructed.

Key words: *problems of network planning and management, lists of predecessors, graph of the project, minimization of the required number of dummy jobs.*

Original article submitted 02/VII/2010;
revision submitted 30/IX/2010.

Alexander V. Dokuchaev, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Andrey P. Kotenko* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.