Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 229–236

Математический анализ

УДК 517.581

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ—ЛЕФФЛЕРА НА СЛУЧАЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. С. Яшагин

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: nik-yashagin@yandex.ru

Рассмотрена специальная функция, обобщающая функцию типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных. Получены интегральные представления для этой функции в различных областях изменения её аргументов при некоторых ограничениях на параметры. Установлены асимптотические формулы и асимптотические свойства этой функции при устремлении аргументов к бесконечности. Доказаны соответствующие теоремы.

Ключевые слова: *специальные функции, обобщения функции типа Миттаг—Леффлера, интегральные представления, асимптотические формулы.*

1. Определения и обозначения. Обобщением функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных мы называем [1] целую функцию, определяемую степенным рядом

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{x^k y^l}{\Gamma\left(k\alpha+l\beta+\mu\right)}, \tag{1}$$

где μ — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр.

Обозначим через $\gamma(\varepsilon;\theta)$ ($\varepsilon>0$, $0<\theta\leqslant\pi$) контур, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$ и состоящий из следующих частей:

1) луч $\arg\zeta=-\theta$, $|\zeta|\geqslant\varepsilon$;
2) дуга $-\theta\leqslant\arg\zeta\leqslant\theta$ окружности $|\zeta|=\varepsilon$;
3) луч $\arg\zeta=\theta$, $|\zeta|\geqslant\varepsilon$.

2. Интегральные представления. Докажем несколько лемм об интегральных представлениях обобщения функции типа Миттаг—Леффлера (1) в различных областях изменения её аргументов.

Лемма 1. *Пусть α, $\beta\in(0,2)$, $\alpha\beta<2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию*

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2}<\theta\leqslant\min\{\pi,\pi\alpha\beta\}. \tag{2}$$

Николай Сергеевич Яшагин, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Если $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$, *где* $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ *и* $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, *то имеет место следующее интегральное представление*:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)}d\zeta. \tag{3}$$

Доказательство. Положим сначала $|x| < \varepsilon_\alpha$. С учётом того, что $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta} = \left(\varepsilon_\beta^\alpha\right)^{1/\beta} = \varepsilon_\beta^{\alpha/\beta}$, очевидно, что

$$\sup_{\zeta\in\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)} \left|x\zeta^{-\alpha/\beta}\right| < 1.$$

Запишем функцию $E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)$ в соответствии с определением (1) и преобразуем, сворачивая один из рядов по определению функции типа Миттаг—Леффлера одного аргумента [2]:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^k y^l}{\Gamma(\alpha k+\beta l+\mu)} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{\Gamma\left[\beta l+(\alpha k+\mu)\right]} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k E_\beta(y;\alpha k+l).$$

В силу условий леммы можно воспользоваться известным интегральным представлением для $E_\beta(y;\alpha k+l)$ (см. [2, формула (2.2)]), причём в качестве параметров, определяющих контур γ, возьмём введённые выше ε_β и θ_β, что допустимо в соответствии с (2) и с учётом равенства $\theta_\beta = \theta/\alpha$. Тогда, если $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$, то

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}x^k E_\beta(y;\alpha k+l) = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1-\alpha k-\mu}{\beta}}}{\zeta-y}d\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1-\mu}{\beta}}}{\zeta-y}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(x\zeta^{-\alpha/\beta}\right)^k\right\}d\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta-y)\left(\zeta^{\alpha/\beta}-x\right)}d\zeta. \tag{4}$$

Преобразуем интегральное представление (4), приведя его к интегралу по контуру $\gamma(\varepsilon;\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta-y)\left(\zeta^{\alpha/\beta}-x\right)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)}\frac{e^{\left(\xi^{1/\alpha}\right)^{1/\beta}}\left(\xi^{1/\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{\left(\xi^{1/\alpha}-y\right)\left(\xi^{1/\beta}-x\right)}\frac{1}{\alpha}\xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)}\frac{e^{\xi^{1/(\alpha\beta)}}\xi^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\xi^{1/\alpha}-y\right)\left(\xi^{1/\beta}-x\right)}d\xi.$$

Полученный интеграл абсолютно сходится и является аналитической функцией от x и y при $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$.

Очевидно, что круг $|x| < \varepsilon_\alpha$ содержится в области $G^{(-)}(\varepsilon_\alpha;\theta_\alpha)$ для всех значений θ_α из промежутка $(\pi\alpha/2, \min\{\pi,\pi\alpha\})$. Следовательно, по принципу аналитического продолжения представление (3) имеет место всюду в области $G^{(-)}(\varepsilon_\alpha;\theta_\alpha)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть α, $\beta \in (0,2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию* (2). *Если $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$, где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ и $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, то имеет место следующее интегральное представление:*

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)}\frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)}d\zeta. \tag{5}$$

Доказательство. По условию леммы точка y лежит справа от контура $\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$, т.е. $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$. Тогда для любого $\varepsilon_{\beta 1} > |y|$ очевидно $y \in G^{(-)}(\varepsilon_{\beta 1};\theta_\beta)$, а $x \in G^{(-)}(\varepsilon_{\alpha 1};\theta_a)$, потому по формуле (4) имеем представление

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma\left(\varepsilon_{\beta 1};\,\theta_\beta\right)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta-y)\left(\zeta^{\alpha/\beta}-x\right)}d\zeta. \tag{6}$$

С другой стороны, если $\varepsilon_\beta < |y| < \varepsilon_{\beta 1}$, $|\arg y| < \theta_\beta$, то по теореме Коши справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_{\beta 1};\theta_\beta)-\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)}\frac{e^{\zeta^{1/\beta}}\zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta-y)\left(\zeta^{\alpha/\beta}-x\right)}d\zeta = \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) немедленно получается представление (5). $\square$

Аналогично доказывается интегральное представление для $x \in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)}\frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)}d\zeta. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть α, $\beta \in (0,2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию* (2). *Если $x \in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$, где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ и $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, то имеет место следующее интегральное представление*:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y}+\frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x}+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\theta)}\frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)}d\zeta. \quad (9)$$

Доказательство. По условию леммы точки x и y лежат по правую сторону от контуров $\gamma\left(\varepsilon_\alpha;\theta_\beta\right)$ и $\gamma(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$ соответственно, т. е. $x\in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha;\theta_a)$, $y\in G^{(+)}(\varepsilon_\beta;\theta_\beta)$. Параметрам ε_α и ε_β соответствует ε. Выберем такое ε_1 ($\varepsilon_1>\varepsilon$), чтобы одна из координат оказалась справа от контура, а другая слева (такое всегда возможно, если $x^\beta\neq y^\alpha$). Для определённости пусть $x\in G^{(-)}(\varepsilon_{\alpha 1};\theta_a)$, $y\in G^{(+)}(\varepsilon_{\beta 1};\theta_\beta)$ (т. е. $x<y$). Тогда по формуле (5) из леммы 2 имеет место интегральное представление

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)=\frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x}+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_1;\theta)}\frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)}d\zeta. \quad (10)$$

Запишем интеграл в (10) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_{\alpha 1};\theta_\alpha)}\frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}\zeta^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{\left(\zeta^{\beta/\alpha}-y\right)(\zeta-x)}d\zeta.$$

Если $\varepsilon_\alpha<|x|<\varepsilon_{\alpha 1}$, $|\arg x|<\theta_\alpha$, то по теореме Коши справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\gamma(\varepsilon_{\alpha 1};\theta_\alpha)-\gamma(\varepsilon_\alpha;\theta_\alpha)}\frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}\zeta^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{\left(\zeta^{\beta/\alpha}-y\right)(\zeta-x)}d\zeta=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получается представление (9). □

Лемма 4. *Если* $\mathrm{Re}\mu>0$, *то интегральные представления* (3), (5), (8) *и* (9) *остаются в силе для* $\alpha=2$ *или* $\beta=2$ *при их предельном переходе по соответствующим параметрам.*

Доказательство леммы очевидно.

3. Асимптотические свойства. Особый интерес представляют асимптотические свойства функции $E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)$ при больших по модулю значениях аргументов $|x|$ и $|y|$.

Теорема. *Пусть* α, $\beta\in(0,2)$, $\alpha\beta<2$, μ *— любое комплексное число,* a *— любое вещественное число, удовлетворяющих условию*

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2}<a\leqslant\min\left\{\pi,\pi\alpha\beta\right\}.$$

Тогда для любого целого $p\geqslant 1$ *при* $|x|\to\infty$ *и* $|y|\to\infty$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

1) *при* $|\arg x| \leqslant a/\beta$ *и* $|\arg y| \leqslant a/\alpha$:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y} + \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)} + o\big(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\big) + o\big(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\big); \quad (12)$$

2) *при* $|\arg x| \leqslant a/\beta$ *и* $a/\alpha < |\arg y| \leqslant \pi$:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)} + o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\right) + o\left(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\right); \quad (13)$$

3) *при* $a/\beta < |\arg x| \leqslant \pi$ *и* $|\arg y| \leqslant a/\alpha$:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)} + o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\right) + o\left(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\right); \quad (14)$$

4) *при* $a/\beta < |\arg x| \leqslant \pi$ *и* $a/\alpha < |\arg y| \leqslant \pi$:

$$E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)} + \\ + o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\right) + o\left(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\right). \quad (15)$$

Доказательство. При ограничениях $|\arg x| \leqslant a/\beta$ и $|\arg y| \leqslant a/\alpha$ число b выбираем так, чтобы

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2} < a < b \leqslant \min\{\pi, \pi\alpha\beta\}. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что имеет место разложение

$$\frac{1}{\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)} = \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{\zeta^{\frac{l-1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}}}{y^l x^k} + \frac{x^{p_\beta}\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}} + y^{p_\alpha}\zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}} - \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}. \quad (17)$$

Воспользуемся формулой (9) из леммы 3. В (17) положим $\varepsilon = 1$, тогда справа от контура $\gamma(1;b)$ (т.е. в области $G^{(+)}(1;b)$) для функции $E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)$ с учётом (17) получаем представление

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = {} & \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y} + \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x} + \\
& + \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\left(\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l-1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}}d\zeta\right)x^{-k}y^{-l} + \\
& + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}\frac{x^{p_\beta}\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}}+y^{p_\alpha}\zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}}-\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Согласно формуле Ханкеля для гамма-функции [3]

$$
\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon;\tau)} e^u u^{-s} du,
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l-1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}}d\zeta = \\
& \qquad = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l}{\alpha}+\frac{k}{\beta}}d\zeta = \\
& \qquad = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{-\frac{1}{\alpha\beta}(\mu-l\beta-\alpha k)+\frac{1}{\alpha\beta}-1}d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)}.
\end{aligned}
$$

Отсюда (18) в силу (16) переписываем в виде

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = {} & \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}}x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha}-y} + \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}}y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta}-x} + \sum_{k=1}^{p_\beta}\sum_{l=1}^{p_\alpha}\frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu-k\alpha-l\beta)} + \\
& + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}\frac{x^{p_\beta}\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}}+y^{p_\alpha}\zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}}-\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим последнее слагаемое в формуле (19):

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}\frac{x^{p_\beta}\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}}+y^{p_\alpha}\zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}}-\zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta = \\
& \qquad = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\alpha}{\alpha}}}{y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta + \\
& \qquad + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int_{\gamma(1;b)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_{\gamma(1;b)}\frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta}y^{p_\alpha}\left(\zeta^{1/\beta}-x\right)\left(\zeta^{1/\alpha}-y\right)}d\zeta = I_1+I_2+I_3. \quad (20)$$

Оценим каждый интеграл из (20) при больших $|x|$ и $|y|$, предполагая, что $|\arg x| \leqslant a/\beta$ и $|\arg y| \leqslant a/\alpha$.

Заметим, что когда $|\arg x| \leqslant a/\beta$ и $|x|$ достаточно велико, то

$$\min_{\zeta\in\gamma(1;b)}\left|\zeta^{1/\beta}-x\right| = |x|\sin\left(b/\beta - a/\beta\right) = |x|\sin\Big(\frac{b-a}{\beta}\Big).$$

Аналогично для $|\arg y| \leqslant a/\alpha$ и достаточно большого $|y|$ имеем

$$\min_{\zeta\in\gamma(1;b)}\left|\zeta^{1/\alpha}-y\right| = |y|\sin\left(b/\alpha - a/\alpha\right) = |y|\sin\Big(\frac{b-a}{\alpha}\Big).$$

Поэтому для больших $|x|$ и $|y|$ при $|\arg x| \leqslant a/\beta$ и $|\arg y| \leqslant a/\alpha$ получаем оценку

$$|I_1| \leqslant \frac{|x|^{-1}|y|^{-p_\alpha-1}}{2\pi\alpha\beta\sin\left(\frac{b-a}{\beta}\right)\sin\left(\frac{b-a}{\alpha}\right)}\int\limits_{\gamma(1;b)}\left|e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\right|\left|\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\alpha}{\alpha}}\right||d\zeta|,$$

причём интеграл справа сходится, так как на лучах $\arg\zeta = \pm b$ ($|\zeta| \geqslant 1$), входящих в состав контура $\gamma(1;b)$, выполняется равенство

$$\left|e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\right| = \exp\left\{|\zeta|^{\frac{1}{\alpha\beta}}\cos\frac{b}{\alpha\beta}\right\},$$

а согласно условию (16), $\cos\frac{b}{\alpha\beta} < 0$. Итак, $I_1 = o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\right)$. Аналогично $I_2 = o\left(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\right)$.

Обратимся к третьему слагаемому из (20):

$$|I_3| \leqslant \frac{|x|^{-p_\beta-1}|y|^{-p_\alpha-1}}{2\pi\alpha\beta\sin\left(\frac{b-a}{\beta}\right)\sin\left(\frac{b-a}{\alpha}\right)}\int_{\gamma(1;b)}\left|e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}}\right|\left|\zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\alpha}{\alpha}+\frac{p_\beta}{\beta}}\right||d\zeta|.$$

Очевидно, что $I_3 = o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}|x|^{-p_\beta}\right)$.

Итак, $I = o\left(|xy|^{-1}|y|^{-p_\alpha}\right) + o\left(|xy|^{-1}|x|^{-p_\beta}\right)$.

Доказательства пунктов 2), 3) и 4) проводятся по той же схеме, что приведена выше. $\square$

Работа выполнена в рамках Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (*проект* № РНП.2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана– Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. — № 1(20). — С. 24–36.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 2: Дальнейшее построение теории. — М.: Наука, 1968. — 624 с.

Поступила в редакцию 05/VII/2010;
в окончательном варианте — 13/IX/2010.

MSC: 33E12

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND ASYMPTOTIC EXPANSION FORMULAS OF MITTAG–LEFFLER–TYPE FUNCTION OF TWO VARIABLES

N. S. Yashagin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: nik-yashagin@yandex.ru

Special function generalizing Mittag–Leffler–type function for two variables is considered. Integral representations for this function in different variation range of arguments for a certain value of parameters is obtained. Asymptotic formulas and asymptotic properties of this function for large arguments is established. Theorems for these formulas and these properties are provided.

Key words: *special functions, generalizations Mittag–Leffler–type function for two variables, integral representations, asymptotic expansion formulas.*

Original article submitted 05/VII/2010;
revision submitted 13/IX/2010.

Nikolay S. Yashagin, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.