

УДК 539.376

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ*Р. Р. Исмагилова*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: isriri@mail.ru

Рассматривается обобщение интегро-дифференциального оператора Римана–Лиувилля на матричный порядок и изучаются его свойства. Доказываются теоремы о композициях операторов матричного интегрирования и дифференцирования. Находятся необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости матричного уравнения Абеля в специальном классе функций.

Ключевые слова: дробное исчисление, интегро-дифференциальный оператор Римана–Лиувилля, функции от матрицы, матричный оператор, система интегральных уравнений Абеля.

Пусть λ — любое комплексное число такое, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция Эйлера [1], $f(x)$ — измеримая, в общем случае комплекснозначная, функция с областью определения $D(f) \subset \Omega = [a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$.

Левосторонние и правосторонние дробные интегралы Римана–Лиувилля на отрезке Ω определяются равенствами

$$(I_{a+}^{\lambda} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}}, \quad x > a, \quad (1)$$

$$(I_{b-}^{\lambda} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\lambda}}, \quad x < b. \quad (2)$$

Левосторонние и правосторонние дробные производные соответственно определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\lambda} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\lambda-n+1}} = \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\lambda} f)(x), \quad x > a, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\lambda} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_b^x \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\lambda-n+1}} = \\ &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\lambda} f)(x), \quad x < b, \end{aligned} \quad (4)$$

где $n = [\operatorname{Re} \lambda] + 1$, $[\cdot]$ — целая часть числа [2].

Рина Ринатовна Исмагилова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Пусть c — произвольная точка отрезка Ω : $a \leq c \leq b$. Определение интегро-дифференциального оператора Римана—Лиувилля порядка λ , объединяющее равенства (1)–(4) в общую запись, может быть записано следующим образом [3]:

$$I_{cx}^\lambda f \equiv D_{cx}^{-\lambda} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-c)}{\Gamma(\lambda)} \int_c^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{1-\lambda}}, & \text{Re}\lambda > 0; \\ \text{sign}(x-c) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n I_{cx}^{n+\lambda} f, & \text{Re}\lambda \leq 0, n = [-\text{Re}\lambda] + 1, \end{cases} \quad (5)$$

где λ — любое комплексное число. Из этого определения хорошо видно, что при $x : a \leq c < x \leq b$ равенства (5) определяют левосторонний интегро-дифференциальный оператор I_{c+}^λ , а при $x : a \leq x < c \leq b$ — правосторонний оператор I_{c-}^λ . Заметим, что при $\lambda = 0$ оператор $I_{cx}^0 \equiv D_{cx}^0$ является тождественным оператором I в силу (5).

Обозначим через M_n множество постоянных матриц порядка n ; пусть $\Lambda(G)$ — спектр матрицы $G \in M_n$, λ_i — собственные значения матрицы G , $\lambda_i \in \mathbb{C}$ в общем случае, $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z \leq 0\}$.

В соответствии с определением, введённым в работах [4, 5], для матрицы $G \in M_n$ действие матричного оператора дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля на функцию $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^\top$ задаётся равенством

$$I_{a+}^G f \equiv D_{a+}^{-G} f = \sum_{k=1}^s \psi^k(G) \sum_{n=0}^{m_k-1} \frac{(G - \lambda_k E)^n}{n!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{I_{a+}^\lambda f}{\psi^k(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_k}, \quad (6)$$

где $\psi^k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-m_k} \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$, а $I_{cx}^\lambda f$ — оператор, введённый в (5). Условия, достаточные для существования этой матрицы, определяются известными требованиями для существования почти всюду на Ω скалярного интегро-дифференциального оператора I_{a+}^λ [2].

Если $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}_+$, то $I_{cx}^G f$ определяет матричный аналог интегрального оператора Римана—Лиувилля, в частности, если $c = a$ и $x > a$, то имеется левосторонний интегральный оператор $I_{a+}^G f$ матричного порядка; если $c = b$ и $x < b$ — правосторонний оператор $I_{b-}^G f$. Если $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}_-$, то формула (6) определяет матричный аналог дифференциального оператора Римана—Лиувилля. А если $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}$, то — матричный аналог интегро-дифференциального оператора Римана—Лиувилля. Некоторые свойства этого оператора изучены в работе [6].

ТЕОРЕМА 1 (ПОЛУГРУППОВОЕ СВОЙСТВО). Пусть матрица $G \in M_m$, а $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — любые аналитические функции, определённые на $\Lambda(G)$. Пусть $\Lambda(A) = \{\alpha_i\}$ и $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$ — спектры матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ соответственно ($\Lambda(A), \Lambda(B) \subset \mathbb{C}_+$). Тогда равенства

$$I_{a+}^A I_{a+}^B \varphi = I_{a+}^B I_{a+}^A \varphi = I_{a+}^{A+B} \varphi, \quad (7)$$

$$I_{b-}^A I_{b-}^B \varphi = I_{b-}^B I_{b-}^A \varphi = I_{b-}^{A+B} \varphi \quad (8)$$

выполняются для любой вектор-функции $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_m)^\top \in L(a, b)$.

Доказательство. Доказательства свойств (7), (8) являются следствиями аналогичных свойств дробных интегралов в скалярном случае и получаются непосредственным использованием определения (6).

Ограничимся случаем $m = 2$. Записывая интегралы в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получим [6]

$$\begin{aligned} (I_{a+}^A I_{a+}^B \varphi)(x) &= \\ &= \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\alpha_1} \varphi + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\alpha_2} \varphi \right) \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\beta_1} \varphi + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\beta_2} \varphi \right) = \\ &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\alpha_1} I_{a+}^{\beta_1} \varphi + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\alpha_2} I_{a+}^{\beta_2} \varphi = \\ &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\alpha_1 + \beta_1} \varphi + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\alpha_2 + \beta_2} \varphi = I_{a+}^{A+B} \varphi. \end{aligned}$$

Коммутативность матричных интегральных операторов является очевидным следствием коммутативности дробных интегралов в скалярном случае.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ имеем

$$\begin{aligned} I_{a+}^A I_{a+}^B \varphi &= \left(E I_{a+}^\alpha + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^\alpha \right) \left(E I_{a+}^\beta + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^\beta \right) \varphi = \\ &= \left(E I_{a+}^\alpha + (G - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \alpha} I_{a+}^\alpha \frac{d\alpha}{d\lambda} \right) \left(E I_{a+}^\beta + (G - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \beta} I_{a+}^\beta \frac{d\beta}{d\lambda} \right) \varphi = \\ &= E I_{a+}^{\alpha+\beta} + (G - \lambda E) \left(I_{a+}^\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} I_{a+}^\beta \frac{d\beta}{d\lambda} + \frac{\partial}{\partial \alpha} I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta \frac{d\alpha}{d\lambda} \right) \varphi = \\ &= E I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi = I_{a+}^{A+B} \varphi. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается полугрупповое свойство для правосторонних матричных интегральных операторов. $\square$

Замечание. Нетрудно показать, что доказанное свойство остаётся справедливым для любой пары коммутативных матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через $I_{a+}^G(L_p)$ обозначим класс вектор-функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка G от суммируемой функции $f = I_{a+}^G \varphi$, где вектор-функция $\varphi \in L_p$.

Необходимые и достаточные условия принадлежности вектор-функции $f(x)$ данному классу, очевидно, равносильны разрешимости матричного интегрального уравнения Абеля, о котором речь пойдёт ниже. В скалярном случае эти условия содержатся в известной теореме Я. Тамаркина [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Через $AC^n(\Omega)$, где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ — мультииндекс, обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^\top$, компоненты $f_i(x)$ которых принадлежат классу AC^{n_i} соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Будем считать, что вектор-функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^\top \in L(\Omega)$ имеет дробную производную матричного порядка $D_{a+}^G f$, если $I_{a+}^{n-\lambda}(f) \in AC^n(\Omega)$, где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — мультииндексы; $n = [\operatorname{Re} \lambda] + 1$.

Справедлива теорема о композиции операторов матричного интегрирования и дифференцирования одного порядка.

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица $G \in M_m$, её спектр $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}_+$. Тогда равенство

$$D_{a+}^G I_{a+}^G \varphi = \varphi(x) \quad (9)$$

выполняется почти всюду для любой вектор-функции $\varphi(x) \in L(\Omega)$, а равенство

$$I_{a+}^G D_{a+}^G f = f(x) \quad (10)$$

— для вектор-функции

$$f(x) \in I_{a+}^G(L). \quad (11)$$

Если вместо (11) предположить, что вектор $f(x) \in L(\Omega)$ и имеет суммируемую производную $D_{a+}^G f$, то (10) следует заменить выражением

$$I_{a+}^G D_{a+}^G f = f(x) - \sum_{k=1}^N (\Gamma(A - (k-1)E))^{-1} (x-a)^{A-kE} f_{A-kE}^{(N-k)}(a+), \quad (12)$$

где $f_{A-kE}^{(n-k)}(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+}^{A-kE} f)(x)$, $N = \max(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Доказательство. Для простоты изложения ограничимся множеством M_2 . В случае, когда корни матрицы $\lambda_1 \neq \lambda_2$, формула (10) является очевидным следствием аналогичного свойства в скалярном случае [2]. Действительно,

$$\begin{aligned} D_{a+}^G I_{a+}^G \varphi &= \\ &= \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{a+}^{\lambda_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{a+}^{\lambda_2} \right) \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\lambda_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\lambda_2} \right) \varphi = \\ &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{a+}^{\lambda_1} I_{a+}^{\lambda_1} \varphi + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{a+}^{\lambda_2} I_{a+}^{\lambda_2} \varphi = \\ &= \varphi(x) \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) = \varphi(x). \end{aligned}$$

В случае кратных корней $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ рассмотрим композицию

$$\begin{aligned} D_{a+}^G I_{a+}^G \varphi &= \left(E D_{a+}^\lambda + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} D_{a+}^\lambda \right) \left(E I_{a+}^\lambda + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^\lambda \right) \varphi = \\ &= E D_{a+}^\lambda I_{a+}^\lambda \varphi + (G - \lambda E) \left(D_{a+}^\lambda \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^\lambda + \left(\frac{d}{d\lambda} D_{a+}^\lambda \right) I_{a+}^\lambda \right) \varphi. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\left(D_{a+}^\lambda \frac{d}{d\lambda} I_{a+}^\lambda + \left(\frac{d}{d\lambda} D_{a+}^\lambda \right) I_{a+}^\lambda \right) \varphi = 0,$$

тогда $D_{a+}^G I_{a+}^G \varphi = \varphi(x)$.

Пусть теперь $f(x) \in I_{a+}^G(L)$. Тогда существует вектор-функция $\varphi(x) \in L(a, b) : f(x) \in I_{a+}^G \varphi$ и равенство (10) $I_{a+}^G (D_{a+}^G I_{a+}^G \varphi) = I_{a+}^G \varphi$ становится верным для любой вектор-функции $\varphi(x)$ в силу (9).

Доказательство соотношения (12) приведём для случая, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Рассмотрим композицию

$$\begin{aligned}
 (I_{a+}^G D_{a+}^G f)(x) &= \\
 &= \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\lambda_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\lambda_2} \right) \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{a+}^{\lambda_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{a+}^{\lambda_2} \right) f = \\
 &= \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+}^{\lambda_1} D_{a+}^{\lambda_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+}^{\lambda_2} D_{a+}^{\lambda_2} \right) f = \\
 &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{f_{n_1-\lambda_1}^{n_1-k}(a+)}{\Gamma(\lambda_1 - k + 1)} (x - a)^{\lambda_1 - k} \right) + \\
 &\quad + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n_2} \frac{f_{n_2-\lambda_2}^{n_2-k}(a+)}{\Gamma(\lambda_2 - k + 1)} (x - a)^{\lambda_2 - k} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$f_{n-\lambda}^{(n-k)}(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (I_{a+}^{n-\lambda} f)(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+}^{\lambda-k} f)(x) = (D_{a+}^{\lambda-k} f)(a+);$$

n, λ — мультииндексы, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть заданы значения этих пределов:

$$\begin{aligned}
 f_{n_1-\lambda_1}^{(n_1-k)}(a+) &= (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(a+) = \bar{b}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_1, \\
 f_{n_2-\lambda_2}^{(n_2-k)}(a+) &= (D_{a+}^{\lambda_2-k} f)(a+) = \bar{c}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_2,
 \end{aligned}$$

и $N = \max\{n_1, n_2\}$. Для определённости положим $N = n_2$. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}
 f_{n_1-\lambda_1}^{(n_1-k)}(x) &= (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(x) = \frac{d^{n_1-k}}{dx^{n_1-k}} (I_{a+}^{n_1-\lambda_1} f)(x) = \\
 &= \frac{d^{N-k}}{dx^{N-k}} (I_{a+}^{N-\lambda_1} f)(x) = f_{N-\lambda_1}^{(N-k)}(x),
 \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$, в силу полугруппового свойства дробных интегралов и целочисленных производных.

С другой стороны, $f_{N-\lambda_1}^{(N-k)}(x) = (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(x)$, а значит,

$$f_{N-\lambda_1}^{(N-k)}(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(x) = (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(a+) = \bar{b}_k,$$

где $k = 1, 2, \dots, N$, причём $\bar{b}_k = 0$ для $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, N$.

Таким образом,

$$(I_{a+}^G D_{a+}^G f)(x) = \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \frac{(x - a)^{\lambda_1 - k}}{\Gamma(\lambda_1 - k + 1)} (D_{a+}^{\lambda_1-k} f)(a+) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \frac{(x-a)^{\lambda_2-k}}{\Gamma(\lambda_2-k+1)} (D_{a+}^{\lambda_2-k} f)(a+) \right) = \\
& = f(x) - \sum_{k=1}^N (\Gamma(A - (k-1)E))^{-1} (x-a)^{A-kE} (D_{a+}^{A-kE} f)(a+).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Доказанное в теореме 2 свойство (9) матричных интегро-дифференциальных операторов имеет прямое отношение к проблеме разрешимости систем интегральных уравнений Абеля.

Пусть матрица $G \in M_m$, её спектр $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}_+$. Систему интегральных уравнений

$$I_{a+}^G \varphi = f(x), \quad (13)$$

где $\varphi(x)$ — искомая и $f(x)$ — заданная m -мерные вектор-функции, рассматриваемую на конечном отрезке Ω , будем называть матричным интегральным уравнением Абеля.

Следующая теорема даёт необходимые и достаточные условия разрешимости матричного уравнения Абеля (13).

ТЕОРЕМА 3. Пусть матрица $G \in M_m$ является матрицей простой структуры со спектром $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}_+$. Для того чтобы $I_{a+}^G \varphi = f$ было разрешимо в $L(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$I_{a+}^{n-\lambda}(T^{-1}f) \in AC^n(\Omega),$$

где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $n = [\operatorname{Re} \lambda] + 1$, и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, и чтобы выполнялось $|n| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ условий:

$$\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{n-\lambda}(T^{-1}f)(a+) = 0,$$

где $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ — мультииндекс, $k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1$; $i = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Хорошо известно [8], что для любой матрицы G простой структуры существует матрица T , приводящая её к диагональному виду $\Lambda_G = T^{-1}GT$. Введём вектор-функцию $g : \varphi = Tg$, где $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ — мультииндекс. Тогда матричное уравнение (13) принимает вид $I_{a+}^G Tg = f$. Умножая это равенство на матрицу T^{-1} слева, получим $T^{-1}I_{a+}^G Tg = T^{-1}f$, и, обозначая вектор-функцию $T^{-1}f = \Phi$, приходим к матричному интегральному уравнению вида $I_{a+}^{\Lambda_G} g = \Phi$.

Данное матричное уравнение представляет собой систему интегральных уравнений:

$$I_{a+}^{\lambda_1} g_1 = \Phi_1, \quad I_{a+}^{\lambda_2} g_2 = \Phi_2, \quad \dots, \quad I_{a+}^{\lambda_m} g_m = \Phi_m. \quad (14)$$

Условия однозначной разрешимости каждого уравнения системы (14) содержатся в теореме Я. Тамаркина [2] и заключаются в следующем:

$$f_{n_i-\lambda_i}(x) = (I_{a+}^{n_i-\lambda_i} \Phi_i) \in AC^{n_i}(\Omega), \quad (15)$$

где $n_i = [\operatorname{Re} \lambda_i] + 1$, и

$$f_{n_i - \lambda_i}^{(k)}(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k_i} I_{a+}^{n_i - \lambda_i} \Phi_i = 0, \quad (16)$$

где $k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1$; $i = 1, 2, \dots, m$.

Записывая (15) и (16) в мультииндексной форме, получаем условия, указанные в теореме. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физмалит, 2003. — 272 с.
4. Андреев А. А. Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа / В сб.: *Краевые задачи для уравнений математической физики*. — Куйбышев: Куйбыш. гос. пед. ин-т, 1990. — С. 3–7.
5. Андреев А. А. Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях / В сб.: *Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики*. Матер. Всесоюз. конф. — Владивосток, 1990. — С. 91.
6. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999. — № 7. — С. 27–37.
7. Андреев А. А., Килбас А. А. О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // *Изв. вузов. Математика*, 1984. — № 12. — С. 3–12.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 567 с.

Поступила в редакцию 20/VII/2010;
в окончательном варианте — 27/IX/2010.

MSC: 74E35, 74K20

PROPERTIES OF INVERSION OPERATOR OF THE ABEL MATRIX EQUATION

R. R. Ismagilova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mails: isriri@mail.ru

Generalization of integral-differential Riemann–Liouville operator on the matrix order is reviewed and its properties are studied. Theorem of the composition of operators of the matrix of integration and differentiation can be proved. The necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the matrix Abel equation in a special class of functions are obtained.

Key words: *fractional calculus, integro-differential operator of Riemann–Liouville, functions of matrices, matrix operator, system of Abel integral equations.*

Original article submitted 20/VII/2010;
revision submitted 27/IX/2010.

Rina R. Ismagilova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.