Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 42–46

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА НЕГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

О. В. Грошев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: groshev@mi.ras.ru

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения на двух типах неглобально гиперболических многообразий: плоскости Минковского с присоединенной ручкой и пространстве Мизнера. Доказано, что на плоскости с ручкой существование и единственность классического решения равносильны конечному набору точечных условий на начальные данные. На пространстве Мизнера существование и единственность классического решения эквивалентны гораздо более ограничивающим условиям на начальные данные.

Ключевые слова: *волновое уравнение, задача Коши, неглобально гиперболические многообразия.*

Введение. Теория (не)глобально гиперболических многообразий имеет два источника. Во-первых, это работы Петровского и Лерэ по теории гиперболических уравнений [1, 2], в которых было доказано, что задача Коши для волнового уравнения

$$\Box u = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha \left(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\partial_\beta u\right) = 0$$

всегда разрешима для некоторого специального типа многообразий, названных глобально гиперболическими. Во-вторых, в Общей теории относительности возникли многообразия с нарушением причинной структуры, которые не являются глобально гиперболическими. Таковы, например, пространство анти-де Ситтера, Гёделя и Готта, машина времени Дойча—Полицера и многие другие [3–5].

Глобально гиперболическим многообразием называется ориентируемое по времени лоренцево многообразие $(M,\, g)$, которое не имеет замкнутых времениподобных кривых, и множество времениподобных путей между любыми двумя точками которого компактно. С физической точки зрения наличие замкнутых времениподобных кривых означает нарушение причинности и соответствует возможности перемещения во времени. Берналь и Санчес доказали [6], что все глобально гиперболические многообразия диффеоморфны $\mathbb{R}^1 \times \Sigma$, где Σ — поверхность Коши.

Задача Коши для волнового уравнения на неглобально гиперболических многообразиях рассматривалась в [7–10]. В частности, в последней работе доказаны существование и единственность классического решения уравнения Клейна—Гордона на факторе пространства анти-де Ситтера, а также на кротовых норах специального класса.

Настоящая работа является продолжением работы [11], выполненной вместе с соавторами, а так же [12]. Было доказано, что на плоскости Минковско-

Олег Викторинович Грошев, аспирант, отд. математической физики.

го с присоединенной ручкой (модифицированная машина Дойча—Полицера) классическое решение существует и единственно при выполнении конечного набора точечных условий самосогласованности; кроме того, в работе [11] были приведены примеры, когда полученное решение путешествует во времени, а также затронут вопрос существования обобщённых решений. Результаты для пространства Мизнера существенно отличаются от результатов для плоскости с ручкой. Доказано, что существование классического решения на нем эквивалентно таким условиям на начальные данные, которые в точности запрещают путешествия во времени. Данная работа мотивирована изучением возможности создания кротовых нор и неглобально гиперболических регионов при столкновении частиц на высоких энергиях [13].

1. Результаты для плоскости с ручкой. Приведём основные результаты, полученные для плоскости с ручкой. Для начала опишем конструкцию плоскости с ручкой.

На полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,\,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ рассмотрим два вертикальных интервала S_1 и S_2 длины $\ell > 0$:

$$S_i = \{(x,\,t) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = x_i,\ \ t_i < t < t_i + \ell\}. \quad (1)$$

Предположим, что

$$0 < x_2 - x_1 < t_2 - t_1 + \ell, \qquad (2)$$

таким образом, вектор $I = (x_2 - x_1,\, t_2 - t_1)$, переводящий S_1 в S_2, времениподобен.

Склеим стороны отрезков, как показано на рис. 1, а именно склеим «внутренние» стороны разрезов друг с другом; аналогично склеим «внешние» стороны разрезов друг с другом. Получившееся многообразие имеет две особые точки — концы отрезков.

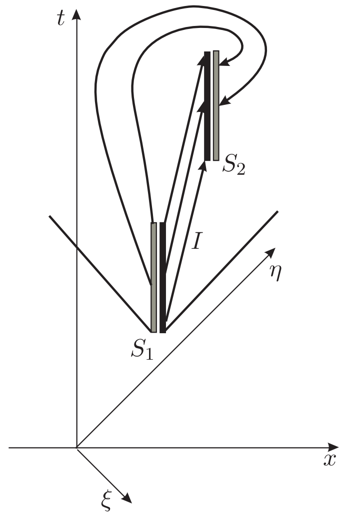

Рис. 1. Плоскость Минковского с двумя разрезами, склеенными определённым образом. Идентификация точек «внешних» и «внутренних» сторон разрезов указана линиями со стрелками

Любое гладкое поле, заданное на рассматриваемом многообразии, будет удовлетворять определённым условиям склейки на разрезах S_1 и S_2. Обратно, если поле дифференцируемо в области $\Omega = \mathbb{R}^2_+ \setminus \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$ и удовлетворяет этим условиям склейки, то оно гладко на рассматриваемом многообразии.

Рассмотрим волновое уравнение на этом многообразии

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{в } \Omega \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_x|_{t=0} = \psi, \qquad (4)$$

где $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Наложим следующие условия склейки:

$$u(X_\pm) = u(X_\mp + I) \quad u_x(X_\pm) = u_x(X_\mp + I), \qquad (5)$$

где $X = (x, t) \in S_1$, а $u(X_\pm) = \lim\limits_{x \to x_1 \pm 0} u(x, t)$; предполагается, что указанные пределы справа и слева существуют.

Определение 1.1. *Классическим решением* задачи (3)–(5) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \{t = 0\})$, удовлетворяющая условиям (3)–(5) в предположении, что указанные в (5) пределы справа и слева существуют.

Обозначим $c_i = x_i - t_i$, $d_i = x_i + t_i$, где i может быть 1 или 2. Будем обозначать через Φ следующий (упорядоченный) набор функций:

$$\Phi(x) = \left(\Phi^{(i)}(x),\ i = 0,\ 1,\ 2; \quad \int_a^x \psi(s) ds; \quad \psi^{(j)}(x),\ j = 0,\ 1 \right).$$

Обозначим через Ψ следующий вектор:

$$\Psi = \big(\Phi(c_1 - \ell),\ \Phi(c_2 - \ell),\ \Phi(c_1),\ \Phi(c_2),\ \Phi(d_1 + \ell),\ \Phi(d_2 + \ell),\ \Phi(d_1),\ \Phi(d_2)\ \big).$$

Теорема 1.1. *Для существования классического решения задачи* (3)–(5) *необходимо и достаточно выполнение десяти линейно независимых условий, которые кратко можно записать как* $L\Psi = 0$, *где* L *— некоторая специальная матрица ранга* 10.

2. Результаты для пространства Мизнера. Пространство Мизнера — плоское двумерное пространство-время, являющееся фактором $\mathbb{R}^{1,1}/\langle \mathcal{B} \rangle$ пространства Минковского по свободной группе, порожденной бустом $\mathcal{B}$. В системе координат (ξ, η), где $\xi = -(x + t)$, $\eta = x - t$, буст $\mathcal{B}$ даётся следующим образом:

$$\mathcal{B} \colon (\xi, \eta) \mapsto (B\xi, B^{-1}\eta),\ B \in \mathbb{R}_+.$$

Он сохраняет Лоренцеву метрику $ds^2 = -d\xi d\eta$. В качестве фундаментальной области действия $\mathcal{B}$ можно взять полосу $\{\xi_0 < \xi < B\xi_0\}$. Само пространство Мизнера (см. рис. 2) получится, если у фундаментальной области отождествить границы с помощью

$$(\xi_0, \eta) \sim (B\xi_0, B^{-1}\eta).$$

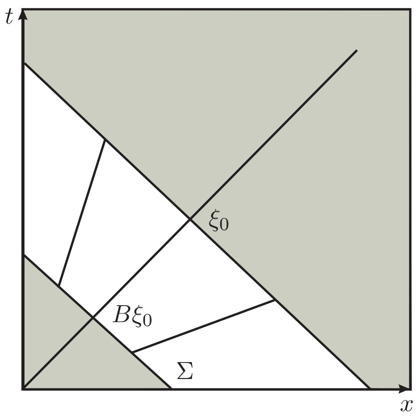

Рис. 2. Пространство Мизнера получается после отождествления границ фундаментальной области (на рисунке белая). После отождествления отрезки, отмеченные на фундаментальной области, превращаются в окружности

На получившемся многообразии существует единственная замкнутая нулевая геодезическая $\eta = 0$. Она делит пространство на два региона: «прошлое» и «будущее». В прошлом существуют глобальные поверхности Коши и не существует замкнутых времени подобных кривых; тогда как в будущем через каждую точку проходит замкнутая времениподобная кривая.

Волновое уравнение $\Box u = 0$ в координатах (ξ, η) имеет вид:

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{в} \ \Theta = \{\xi_0 < \xi < B\xi_0,\ t > 0\}. \tag{6}$$

Начальные данные задаются на поверхности Коши, которая лежит в прошлом, и поэтому является пространственно-подобной. В качестве такой поверхности можно взять $\Sigma = \{t = 0\}$. Итак, задача Коши состоит в задании u и ∇u на Σ:

$$u|_{t=0} = \Phi, \quad \nabla u|_{t=0} = \psi. \tag{7}$$

Кроме того, необходимо задать условия склейки u на границах фундаментальной области. Они задаются следующим образом:

$$u(\xi_0, \eta) = u(B\xi_0, B^{-1}\eta), \quad \nabla u(\xi_0, \eta) = \mathcal{B}\nabla u(B\xi_0, B^{-1}\eta). \tag{8}$$

Определение 2.1. *Классическим решением* задачи (6)–(8) называется функция $u \in C^2(\Theta) \cap C^1(\bar{\Theta})$, удовлетворяющая условиям (6)–(8).

Теорема 2.1. *Для существования классического решения задачи* (6)–(8) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

$$\Phi(\xi_0) = \Phi(B\xi_0), \quad \psi(\xi_0) = B\psi(B\xi_0), \quad \Phi' = \psi.$$

При этом классическое решение единственно и имеет вид волны, идущей влево $u(\xi, \eta) = \Phi(\xi)$.

Замечание 2.1.Качественно решение такого вида сильно отличаются от решений из п. 1. А именно, такие решения не путешествуют во времени, поскольку имеют только левую моду, которая не идет вдоль замкнутых времениподобных кривых.

Автор выражает благодарность И. В. Воловичу и участникам семинара НОЦ МИАН за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (проекты НШ–7675.2010.1, НШ–8784.2010.1) и РФФИ (проект 09–01–12161–офи-м).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Petrowsky I. G.* Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // *Mat. Sb.*, 1937. Vol. 2(44), no. 5. Pp. 815–870.
2. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 208 с. [*Lere Zh.* Hyperbolic differential equations. Moscow: Nauka, 1984. 208 pp.]
3. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The large scale structure of space-time / Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Vol. 1. London – New York: Cambridge University Press, 1973. 391 pp.; русск. пер.: *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 432 с.
4. *Politzer H. D.* Path integrals, density matrices, and information flow with closed timelike curves // *Phys. Rev. D*, 1994. Vol. 49, no. 8. Pp. 3981–3989, arXiv: gr-qc/9310027.
5. *Gott J. R.* Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings: Exact solutions // *Phys. Rev. Lett.*, 1991. Vol. 66, no. 9. Pp. 1126–1129.
6. *Bernal A., Sanchez A.* Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic space–times // *Comm. Math. Phys.*, 2005. Vol. 257, no. 1. Pp. 43–50.
7. *Friedman J., Morris M. S., Novikov I. D., Echeverria F., Klinkhammer G., Thorne K. S., Yurtsever U.* Cauchy problem in spacetimes with closed timelike curves // *Phys. Rev. D*, 1990. Vol. 42, no. 6. Pp. 1915–1930.

8. *Арефьева И. Я., Волович И. В., Ишиватари Т.* Задача Коши на неглобально гиперболических многообразиях // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 334–344; англ. пер.: *Aref'eva I. Ya., Ishiwatari T., Volovich I. V.* Cauchy problem on non-globally hyperbolic space-times // *Theoret. and Math. Phys.*, 2008. Vol. 157, no. 3. Pp. 1646–1654, arXiv: 0903.0567 [hep-th].
9. *Friedman J. L.* The Cauchy problem on spacetimes that are not globally hyperbolic / In: *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, 50 Years of the Cauchy problem in general relativity; P. T. Chruśćiel et al. New York: Birkhäuser, 2004. Pp. 331-346, arXiv: gr-qc/0401004.
10. *Friedman J. L., Morris M. S.* Existence and uniqueness theorems for massless fields on a class of spacetimes with closed timelike curves // *Comm. Math. Phys.*, 1997. Vol. 186, no. 3. Pp. 495–530, arXiv: gr-qc/9411033.
11. *Волович И. В., Грошев О. В., Гусев Н. А., Курьянович Э. А.* О решениях волнового уравнения на неглобально гиперболическом многообразии / В сб.: *Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа*: Сборник статей / Тр. МИАН, Т. 265. М.: МАИК, 2009. С. 273–287; англ. пер.: *Volovich I. V., Groshev O. V., Gusev N. A., Kuryanovich E. A.* On solutions to the wave equation on a non-globally hyperbolic manifold // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009. Vol. 265. Pp. 262–275, arXiv: 0903.0741 [hep-th].
12. *Грошев О. В.* О существовании и единственности классических решений задачи Коши на неглобально гиперболических многообразиях // *ТМФ*, 2010. Т. 164, № 3. С. 441–446; англ. пер.: *Groshev O. V.* Existence and uniqueness of classical solutions of the Cauchy problem on nonglobally hyperbolic manifolds // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 164, no. 3. Pp. 1202–1207.
13. *Aref'eva I. Ya., Volovich I. V.* Time Machine at the LHC, // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 2008. Vol. 5, no. 4. Pp. 641–651, arXiv: 0710.2696 [hep-th].

Поступила в редакцию 21/XII/2010;
в окончательном варианте — 17/II/2011.

MSC: 35L05

CAUCHY PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION ON NON-GLOBAL HYPERBOLIC MANIFOLDS

O. V. Groshev

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: groshev@mi.ras.ru

We consider Cauchy problem for wave equation on two types of non-global hyperbolic manifolds: Minkowski plane with an attached handle and Misner space. We prove that the classical solution on a plane with a handle exists and is unique if and only if a finite set of point-wise constraints on initial values is satisfied. On the Misner space the existence and uniqueness of a solution is equivalent to much stricter constraints for the initial data.

Key words: *wave equation, Cauchy problem, non-globally hyperbolic manifolds.*

Original article submitted 21/XII/2010;
revision submitted 17/II/2011.

Oleg V. Groshev, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Physics.