Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА V_2 ДЛЯ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. В. Долгополов, И. Н. Родионова

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. ак. Павлова, 1.

E-mail: `mikhaildolgopolov@rambler.ru`

Известно, что дифференциальные уравнения с оператором $\partial^3/(\partial x\partial y\partial z)$ используются при изучении процессов, связанных с явлениями вибрации и другими задачами механики, а также играют существенную роль в теории аппроксимации и отображений. В настоящей работе для полного гиперболического уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами в трёхмерном евклидовом пространстве методом Римана найдено в явном виде единственное решение смешанной задачи, которое затем значительно упрощается за счет интегрального представления одного из краевых условий. В силу этого оно может быть использовано для постановки и решения новых краевых задач.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, краевые задачи, уравнения гиперболического типа.*

Рассмотрим уравнение

$$L(U) \equiv U'''_{xuz} + \beta U''_{xz} + \alpha U''_{yz} + \gamma U''_{xy} + \beta\gamma U'_x + \alpha\gamma U'_y + \alpha\beta U'_z - \lambda U = 0 \qquad (1)$$

в области H трёхмерного пространства, ограниченной плоскостями: $x = 0$, $z = y$, $y = 0$; $\alpha, \beta, \gamma, \lambda = \mathrm{const}$. Заметим, что частный случай уравнения (1) при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ был рассмотрен в работе [1], где для него был поставлен и решён ряд краевых задач в специальных классах.

Задача V_2. Найти решение уравнения (1) в области H, непрерывное в $\bar{H}$, удовлетворяющее условиям

$$U(0, y, z) = f(y, z), \quad 0 \leqslant y \leqslant z < +\infty, \qquad (2)$$

$$U(x, y, y) = \tau(x, y), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant y < +\infty, \qquad (3)$$

$$U'_z - U'_y + (\gamma - \beta)U\big|_{y=z} = \nu(x, y), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant y < +\infty. \qquad (4)$$

Михаил Вячеславович Долгополов (к.ф.-м.н., доцент), доцент, зав. лаб., каф. общей и теоретической физики, научно-исследовательская лаборатория математической физики. *Ирина Николаевна Родионова* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.

От заданных функций потребуем выполнения следующих условий: f''_{yz}, $\tau''_{xy}(x,y)$, $\nu'_x(x,y)$ — непрерывны в рассматриваемых областях и

$$\nu(0,y)=0,\quad \tau(x,x)=\tau(0,y)=0,\quad f(y,y,)=f'_y(y,y)=f(0,z)=0. \tag{5}$$

Для решения поставленной задачи применим метод Римана, обоснованный в работе [2], в которой построена функция Римана для (1) и доказан один из трёхмерных аналогов тождества Грина, используемый в настоящей работе. Запишем его применительно к уравнению (1). Пусть $L^*(U)$ — сопряженный оператор. Тогда

$$RL(U)-UL^*(R)=\frac{1}{6}[P'_x+Q'_y+H'_z], \tag{6}$$

$$P=2(R''_{yz}U+RU''_{yz})-R'_yU'_z-R'_zU'_y+3\gamma[RU'_y-UR'_y]+ \\ +3\beta[RU'_z-UR'_z]+6\beta\gamma RU, \tag{7}$$

$$Q=2(R''_{xz}U+RU''_{xz})-R'_xU'_z-R'_zU'_x+3\gamma[RU'_x-UR'_x]+ \\ +3\alpha[RU'_z-UR'_z]+6\alpha\gamma RU, \tag{8}$$

$$H=2(R''_{xy}U+RU''_{xy})-R'_xU'_y-R'_yU'_x+3\beta[RU'_x-UR'_x]+ \\ +3\alpha[RU'_y-UR'_y]+6\alpha\beta RU. \tag{9}$$

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — произвольная точка области H. Рассмотрим область H_0, ограниченную плоскостями $y=y_0$, $z=z_0$, $x=x_0$, $x=0$, $z=y$. Пусть $U(x,y,z)$ — предполагаемое решение задачи V_2 для уравнения (1), а

$$R(x,y,z;_0,y_0,z_0)=R(M,M_0)= \\ =\exp\big(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\big)\,{}_0F_2(1,1,\sigma(x,y,z)), \tag{10}$$

— функция Римана для уравнения (1). Здесь $\sigma(x,y,z)=(\lambda+\alpha\beta\gamma)(x_0-x)\times\times(y_0-y)(z_0-z)$,

$${}_0F_2(1,1,\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma^n}{(1)_n(1)_n n!}; \tag{11}$$

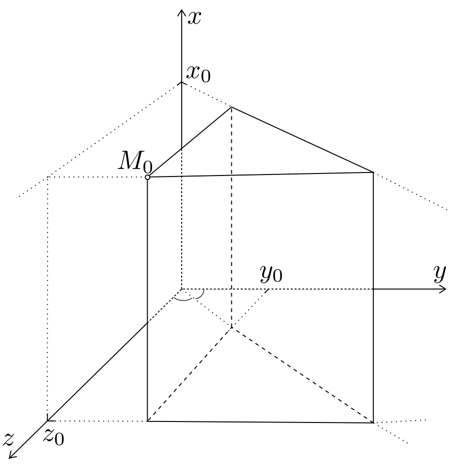
далее будем обозначать $\lambda+\alpha\beta\gamma\equiv\mu$.

По определению функции Римана имеем $L^*(R)=0$, по предположению $L(U)==0$, тогда тождество (6) принимает вид

$$P'_x+Q'_y+H'_z=0. \tag{12}$$

Интегрируя (12) по области H_0 (см. рисунок) и применяя формулу Гаусса—Остроградского, получим

$$\sum_{i=1}^{5}\mathcal{D}_i=0, \tag{13}$$



Область H_0

где

$$\mathcal{D}_i = \iint\limits_{S_i} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + H\cos\gamma]ds_i, \tag{14}$$

S_i — грани области H_0, $S = \bigcup_{i=1}^{5} S_i$.

Рассмотрим слагаемое $\mathcal{D}_1$. Грань S_1 задаётся уравнениями $y = y_0$, $\cos\gamma = \cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -1$. Из равенств (8), (14) получаем

$$\mathcal{D}_1 = -\int_0^{x_0}\int_{y_0}^{z_0} Q(x, y_0, z)dxdz = -\int_0^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} [2R''_{xz}U + 2RU''_{xz} - R'_xU'_z - \\ - R'_zU'_x + 3\gamma(RU'_x - UR'_x) + 3\alpha(RU'_z - UR'_z) + 6\alpha\gamma RU]_{y=y_0}dz.$$

Принимая во внимание свойства функции Римана (10), а именно

$$\frac{\partial}{\partial x}R(x, y_0, z; M_0) = \alpha R(x, y_0, z; M_0), \quad \frac{\partial}{\partial z}R(x, y_0, z; M_0) = \gamma R(x, y_0, z; M_0),$$

$$R(x_0, y_0, z_0; M_0) = 1,$$

и применяя метод интегрирования по частям, направленный на то, чтобы убрать слагаемые, содержащие все производные функции $U(x, y, z)$, с учётом данных (2), (3) и условий (5) получаем

$$\mathcal{D}_1 = 2\tau(x_0, y_0)R(x_0, y_0, y_0; M_0) - 2U(x_0, y_0, z_0) + 2f(y_0, z_0)R(0, y_0, z_0). \tag{15}$$

Для грани S_2 ($z = z_0$, $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$) аналогичными рассуждениями находим

$$\mathcal{D}_2 = \iint_{S_2} H\cos\gamma ds_2 = 2\big[R(x_0, z_0, z_0)\tau(x_0, z_0) + \\ + R(0, y_0, z_0)f(y_0, z_0) - R(x_0, y_0, z_0)U(x_0, y_0, z_0)\big]. \tag{16}$$

Для грани S_3 ($x = x_0$), соответственно, имеем

$$\mathcal{D}_3 = -\int_{y_0}^{z_0} dy \int_y^{z_0} P\big|_{x=x_0}dz = -\int_{y_0}^{z_0} dy \int_y^{z_0} \big[2R''_{yz}U + 2RU''_{xy} - R'_yU'_z - \\ - R'_zU'_y + 3\gamma(RU'_y - UR'_y) + 3\beta(RU'_z - UR'_z) + 6\beta\gamma RU\big]_{x=x_0}dz,$$

при этом можно показать, что

$$-3U\big[\gamma R'_y - \beta R'_z + 2\beta\gamma R\big]_{x=x_0} = 0.$$

С учётом соотношения

$$R'_z(x_0, y, y; M_0) - R'_y(x_0, y, y; M_0) = (\gamma - \beta)R(x_0, y, y; M_0)$$

интегрированием по частям взаимно уничтожаем слагаемые, содержащие вторые производные функций U и R, и в силу условия (4) имеем

$$\mathcal{D}_3 = \tau(x_0, y_0)R(x_0, y_0, y_0; M_0) + \tau(x_0, z_0)R(x_0, z_0, z_0; M_0) - \\ - 2U(x_0, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{z_0} R(x_0, y, y; M_0)\nu(x_0, y)dy. \tag{17}$$

При вычислении интеграла по грани S_4 $(x=0)$, учитывая (2), получаем

$$\mathcal{D}_4 = -\int_{y_0}^{z_0} dy \int_{y}^{z_0} \big[2R''_{yz} f(y,z) + 2R(0,y,z;M_0) f''_{yz}(y,z) - \\ - R'_y(0,y,z;M_0) f'_z(y,z) - R'_z(0,y,z;M_0) f'_y(y,z) + 3\gamma[R f'_y(y,z) - R'_y f(y,z)] + \\ + 3\beta[R f'_z(y,z) - f(y,z) R'_z(0,y,z;M_0)] + 6\beta\gamma R(0,y,z;M_0) f(y,z)\big] dz.$$

После интегрирования по частям и приведения подобных имеем

$$\mathcal{D}_4 = -4R(0,y,z_0;M_0) f(y_0,z_0) - \\ - 6\int_{y_0}^{z_0} dy \int_{y}^{z_0} \big[f''_{yz} + \gamma f'_y + \beta f'_z + f\beta\gamma\big] R(0,y,z) dz. \quad (18)$$

Для грани S_5 ($z=y$, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -1/\sqrt{2}$, $\cos\gamma = -1/\sqrt{2}$, $ds_5 = \sqrt{2} dx dy$) получаем

$$\mathcal{D}_5 = -\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} [Q+H]_{z=y} dy = 3\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} \nu'_x R(x,y,y;M_0) dy + \\ + 3\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} \tau(x,y)[R''_{xz} - R''_{xy}] - \\ - \int_{y_0}^{z_0} \nu(x_0,y) R(x_0,y,y) dy + 3\alpha \int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} \nu(x,y) R(x,y,y;M_0) dy + \\ + 3\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} \tau(x,y)\big[(\beta-\gamma)R'_x + \alpha(R'_y - R'_z) + \alpha(\gamma-\beta)R\big] dy. \quad (19)$$

Подставляя (15)–(19) в (13) и приводя подобные, получаем

$$U(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2}\big[\tau(x_0,z_0)R(x_0,z_0,z_0;M_0) + \tau(x_0,y_0)R(x_0,y_0,y_0;M_0)\big] - \\ - \int_{y_0}^{z_0} dy \int_{y}^{z_0} R(0,y,z;M_0)[f''_{yz} + \gamma f'_y + \beta f'_z + f(y,z)] dz + \\ + \frac{1}{2}\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} R(x,y,y;M_0)[\nu'_x(x,x) + \alpha\nu(x,x)] dy + \\ + \frac{1}{2}\int_{0}^{x_0} dx \int_{y_0}^{z_0} \tau(x,y)[R''_{xz} - R''_{xy} + \alpha(R'_y - R'_z) + \\ + (\beta-\gamma)R'_x + \alpha(\gamma-\beta)R] dy.$$

Вычисляя выражения, содержащие функцию Римана R, и переобозначая переменные, получаем окончательный вид решения задачи V_2:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}\big[\tau(x,z)\exp(\beta(z-y)) + \tau(x,y)\exp(\gamma(y-z))\big] - \\ - \int_{y}^{z} dv \int_{v}^{z} \exp\big(-\alpha x + \beta(v-y) + \gamma(t-z)\big)\, {}_0F_2(1,1,\mu x(y-v)(z-t)) \times \\ \times [f''_{vt} + \gamma f'_v + \beta f'_t + f(v,t)] dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} du \int_{y}^{z} [\nu_u(u,v) + \alpha\nu(u,v)] \exp\big(\alpha(u-x) + \beta(v-y) + \gamma(v-z)\big) \times$$

$$\times\, {}_0F_2(1{,}1,\mu(x-u)(y-v)(z-v))dv+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x du\int_y^z \tau(u,v)\exp\bigl(\alpha(u-x)+\beta(v-y)+\gamma(v-z)\bigr)(y-z)\mu\times$$
$$\times\, {}_0F_2(2{,}2,\mu(x-u)(y-v)(z-v))dv. \quad (20)$$

Непосредственной подстановкой выражения (20) в уравнение (1) и проверкой выполнения условий (2)–(4) показываем, что функция (20) является единственным решением задачи V_2 для уравнения (1) при выполнении условий (5).

Формулу (20) можно преобразовать, если потребовать от заданной функции $\tau(x,y)$ интегрального представления:

$$\tau(x,y)=\int_0^x du\int_0^y T(u,v)\exp\bigl(\alpha(u-x)+\beta(v-y)+\gamma(v-y)\bigr)\times$$
$$\times\, {}_0F_2(1{,}1,\mu(x-u)(y-v)^2)dv, \quad (21)$$

где $T(x,y)$ — непрерывная функция при $0\leqslant x<+\infty$, $0\leqslant y<+\infty$. Подставив в формулу (20) вместо $\tau(x,y)$ её выражение (21), после преобразований получим решение задачи V_2 в виде

$$U(x,y,z)=$$
$$=\int_0^x du\int_0^y T(u,v)\exp\bigl(\alpha(u-x)+\beta(v-y)+\gamma(v-z)\bigr)\times$$
$$\times\, {}_0F_2(1{,}1,\mu(x-u)(y-v)(z-v))dv+$$
$$+\int_0^x du\int_y^z N(u,v)\exp\bigl(\alpha(u-x)+\beta(v-y)+\gamma(v-z)\bigr)\times$$
$$\times\, {}_0F_2(1{,}1,\mu(x-u)(y-v)(z-v))dv-$$
$$-\int_y^z du\int_u^z \bigl[f''_{uv}+\gamma f'_u+\beta f'_v+f\bigr]\exp\bigl(\alpha x+\beta(u-y)+\gamma(v-z)\bigr)\times$$
$$\times\, {}_0F_2(1{,}1,\mu x(y-u)(z-v))dv,$$

$$N(u,v)=\frac{1}{2}[T(u,v)+\nu_u(u,v)+\alpha\nu(u,v)],$$

которое можно использовать для постановки других задач (Дарбу, с интегральными условиями, с сопряжением на характеристической плоскости и т.п.).

Научная работа выполнена при поддержке ведомственной программы Министерства образования и науки РФ (*проект* АВЦП № 3341.)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа // *ДАН. Математика*, 2009. — Т. 429, № 5. — С. 583–589; англ. пер.: *Dolgopolov V. M., Dolgopolov M. V., Rodionova I. N.* Construction of special classes of solutions for some differential equations of hyperbolic type // *Dokl. Math.*, 2009. — Vol. 80, No. 3. — P. 860–866.
2. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н.* Функции для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применение. — Самара: Самарский университет, 1995. — 75 с.

Поступила в редакцию 03/IX/2010;
в окончательном варианте — 29/IX/2010.

MSC: 35L25, 35L35

A MIXED PROBLEM FOR ONE 3D SPACE ANALOGUE OF HYPERBOLIC TYPE EQUATION

M. V. Dolgopolov, I. N. Rodionova

Samara State University,
1, Pavlova st., Samara, 443011, Russia.

E-mail: mikhaildolgopolov@rambler.ru

It is well known that differential equations with an operator are used for study of the processes connected with appearances of vibration and other mechanics problems, and also play an essential role in the theory of approximation and mapping. In the present work a unique solution for the mixed problem of the full hyperbolic equation of the third order with constant factors, in a three-dimensional Euclidean space, was obtain with the Riemann method, which then becomes considerably simpler at the expense of integral representation of one of boundary conditions. Owing to this it can be used for statement and a solution of new boundary value problems.

Key words: *integral equations, boundary value problems, hyperbolic type equations.*

Original article submitted 03/IX/2010;
revision submitted 29/IX/2010.

Mikhail V. Dolgopolov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General & Theoretical Physics, Scientific Research Laboratory of Mathematical Physics. *Irina N. Rodionova* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.