Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 258–262

УДК 517.977.1, 519.71

ИДЕНТИФИКАТОРЫ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Я. А. Шахов

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики — процессов управления,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, 35.

E-mail: yakov.shakhov@gmail.com

Рассматривается задача стабилизации квазилинейных нестационарных систем в случае неполной обратной связи. При синтезе стабилизирующего управления ввиду нехватки информации о текущем векторе состояния системы используется его оценка. Для построения данных оценок строятся идентификаторы различного типа: полного порядка n и идентификаторы Люенбергера меньшей размерности. Получены достаточные условия существования указанных идентификаторов.

Ключевые слова: *квазилинейные системы, стабилизация, программное управление, неполная обратная связь, идентификатор полного порядка, идентификатор Люенбергера.*

Введение. Одной из основных задач математической теории управления является задача стабилизации объекта на заданном программном движении [1]. В практической реализации стабилизирующего управления часто вектор состояния объекта недоступен полностью для измерений [2]. В этом случае строят идентификаторы состояний различных типов — как полного порядка n, так и специфические идентификаторы Люенбергера [3] меньшей размерности. Оценки состояния системы, полученные с помощью указанных идентификаторов, используются в блоке стабилизации программного движения. В [2] построены идентификаторы для линейных, в [4] — для билинейных систем. В настоящей работе исследуется вопрос синтеза идентификаторов полного порядка и идентификаторов Люенбергера для квазилинейных систем [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}(t)\mathbf{v} + \mathbf{f}(t) + \mu\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mu),$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — n-мерный вектор фазового состояния, $\mathbf{v}$ – r-мерный вектор управлений; элементы матриц $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и компоненты вектора $\mathbf{f}(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены; $\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, \mu)$ — вещественная непрерывно дифференцируемая по компонентам $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ вектор-функция; $\mu \geqslant 0$ — малый параметр.

Для некоторого программного движения $\boldsymbol{\xi}_p(t)$ и соответствующего ему управления $\mathbf{v}_p(t)$ построим систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_p(t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t),$$
$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu) = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_p(t), \mathbf{u} + \mathbf{v}_p(t), \mu) - \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\xi}_p(t), \mathbf{v}_p(t), \mu).$$

В стандартной задаче построения непрерывного стабилизирующего управления [1, 4] допустимым считается управление вида линейной обратной связи

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}, \tag{2}$$

Яков Александрович Шахов, аспирант, каф. моделирования экономических систем.

где $(r \times n)$-матрица $\mathbf{C}(t)$ подлежит определению. Конечной целью при этом является экспоненциальная устойчивость нулевого решения замкнутой системы (1), (2). Однако для формирования управления (2) необходима полная информация о векторе отклонений $\mathbf{x}(t)$. Далеко не в каждой прикладной задаче она является доступной, поэтому возникает следующая

Задача 1. *Будем считать, что доступны для измерения только отдельные компоненты вектора* $\mathbf{x}(t)$ *или их линейные комбинации, т.е. вместе с системой* (1) *задано уравнение измерителя* (*или наблюдателя*)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{y}$ — m*-мерный вектор измерений;* $\mathbf{R}(t)$ *– заданная, вещественная, непрерывная при* $t \geqslant 0$*, ограниченная* $(m \times n)$*-матрица. Иногда в литературе уравнение* (3) *называют уравнением выхода, а вектор* $\mathbf{y}$ *– выходом системы* (*см.* [2]).

Требуется построить такую оценку $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ *вектора состояния* $\mathbf{x}(t)$*, чтобы она обладала свойством*

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \textit{при } t \to +\infty. \tag{4}$$

Если это удастся, то стабилизирующее управление для системы (1) можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}(t)\widehat{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

Определение 1 [2]. Динамическую систему, которая формирует на выходе вектор $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ по данным о выходах и входах системы, будем называть *идентификатором состояния.*

Определение 2. Квазилинейную динамическую систему, выходом которой является вектор $\widehat{\mathbf{x}}(t)$, будем называть *квазилинейным асимптотическим идентификатором состояния* системы (1), (3), если вектор оценки $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ удовлетворяет свойству (4).

2. Синтез идентификатора полного порядка. Перейдём к решению поставленной задачи. Будем искать идентификатор в виде

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{L}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\widehat{\mathbf{x}}) + \mu\mathbf{G}(t, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mu). \tag{6}$$

В (6) матрицы $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{R}(t)$ и функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ те же, что и в системе (1), (3), а неизвестная $(n \times m)$-матрица $\mathbf{L}(t)$ подлежит определению. Слагаемое $\mathbf{L}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\widehat{\mathbf{x}})$ учитывает качество оценки состояния. Ввиду (3) получаем $\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})$. Поэтому в идеальной ситуации при $\mathbf{x}(t) \equiv \widehat{\mathbf{x}}$ система (6) с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (1).

Таким образом, `задача 1` сводится к выбору матрицы $\mathbf{L}(t)$ так, чтобы имело место свойство оценки (4) и существовало стабилизирующее управление (5) для системы (1).

Рассмотрим далее две вспомогательные системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_1, \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{A}^\top(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{R}^\top(t)\mathbf{u}_2, \tag{8}$$

где матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ те же, что и в (1), (3), а векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ соответствующих размерностей имеют характер формальных обозначений.

Следующее утверждение решает `задачу 1`.

Теорема 1. *Если системы* (7), (8) *стабилизируемы и для функции* $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ *из* (1) *при допустимых значениях величин* $\mathbf{u}$, μ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)\| \leqslant \psi(t)\|\mathbf{x}\|^m,$$

где $m > 1$, $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geqslant 0$, характеристический показатель Ляпунова которой равен нулю, то для системы (1) *существует нестационарный асимптотический квазилинейный идентификатор* (6) *и стабилизирующее управление* (5).

Замечание 1. Стабилизируемость систем (7), (8) понимается в смысле возможности обеспечить соответствующим замкнутым системам наперед заданные спектры характеристических показателей [5].

Доказательство. Введём в рассмотрение новую переменную $\overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)$, которая описывает качество оценки вектора $\mathbf{x}(t)$. Её динамика с учётом управления (5) описывается системой

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{R}(t))\overline{\mathbf{x}}(t) + \mu\overline{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}), \mu), \tag{9}$$

где $\overline{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}), \mu) = \overline{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}), \mu) - \overline{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}), \mu)$. При этом замкнута система (1), (5) в новых переменных примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t))\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t)\overline{\mathbf{x}} + \mu\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}), \mu). \tag{10}$$

Если рассматривать системы (10), (9) как единое целое, то остаётся показать, что за счёт выбора матриц $\mathbf{C}(t), \mathbf{L}(t)$ можно обеспечить экспоненциальную устойчивость её нулевого решения. Поскольку стабилизируемость вспомогательных систем (7), (8) и соответствующая оценка нелинейности гарантируются условиями теоремы, матрицы $\mathbf{C}(t), \mathbf{L}(t)$ можно построить по алгоритмам, описанным в [5], а затем воспользоваться теоремой Перрона и теоремой об устойчивости по линейному приближению (см. [6], с. 170 и с. 267 соответственно). Таким образом, возможность построения идентификатора (6) и стабилизирующего управления (5) подтверждена конструктивно. □

3. Идентификаторы Люенбергера. Для построения оценки состояния системы при решении `задачи 1` данные измерителя (3) использовались лишь косвенно (при синтезе идентификатора), а сама оценка $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ является n-мерным вектором, соответствующим вектору $\mathbf{x}(t)$.

Изменим постановку `задачи 1` следующим образом.

Задача 2. *Для системы* (1) *требуется выбрать $n - m$ линейных комбинаций компонент вектора* $\mathbf{x}$*:*

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t), \tag{11}$$

где $\mathbf{z}(t)$ — $(n - m)$-мерный вектор, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *матрица* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ *была неособой;*

2) *для вектора $\mathbf{z}(t)$ должен существовать идентификатор, позволяющий находить оценку $\widehat{\mathbf{z}}(t)$, обладающую асимптотикой*

$$\mathbf{z}(t) - \widehat{\mathbf{z}}(t) \to 0 \quad \textit{при } t \to +\infty.$$

Если задача будет решена, то алгоритм для построения вектора $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ можно модифицировать следующим образом. С учётом (3) и (11) имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{12}$$

Из (12) получим

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Это возможно, так как матрица $\mathbf{M}$ считается неособой по построению. Если предположить, что найден вектор $\widehat{\mathbf{z}}(t)$, то для вектора оценки состояния всей исходной системы получим выражение

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{z}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Стабилизирующее управление для системы (1) будем искать в виде (5), (13), что и является конечной целью.

С алгебраической точки зрения задача сводится к разработке алгоритма построения матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей условиям 1), 2) в постановке `задачи 2`.

Замечание 2. Принципиальное отличие данной задачи от предыдущей состоит в том, что информация (3) о векторе $\mathbf{x}(t)$ используется непосредственно в (13) для формирования его оценки.

4. Синтез идентификаторов Люенбергера. Перейдём к решению поставленной задачи. Прежде всего сделаем в системе (1) замену переменных (12), чтобы получить уравнение, описывающее изменение вектора $\mathbf{z}(t)$. Введём обозначения для блоков следующих матриц:

$$\mathbf{M}\mathbf{A}(t)\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{zz}(t) & \mathbf{A}_{zy}(t) \\ \mathbf{A}_{yz}(t) & \mathbf{A}_{yy}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{z}(t) \\ \mathbf{B}_{y}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{G}\left(t, \mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \mathbf{u}, \mu\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{z}(t,\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{u},\mu) \\ \mathbf{G}_{y}(t,\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{u},\mu) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{zz}(t)\mathbf{z} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_{z}(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_{z}(t,\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{u},\mu); \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{yz}(t)\mathbf{z} + \mathbf{A}_{yy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_{y}(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_{y}(t,\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{u},\mu). \end{cases}$$

Здесь первое уравнение описывает изменение вектора $\mathbf{z}(t)$, поэтому идентификатор Люенбергера для построения оценки $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ будем искать в виде

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_{zz}(t)\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_{z}(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_{z}(t,\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{y},\mathbf{u},\mu). \tag{14}$$

Проблема выбора матрицы $\mathbf{T}$ с учётом введенных обозначений трансформируется в проблему выбора матриц $\mathbf{A}_{zz}(t)$, $\mathbf{A}_{zy}(t)$, $\mathbf{B}_{z}(t)$.

Следующее утверждение решает `задачу 2`.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{T}\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_{zz}(t)\mathbf{T} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{R}(t). \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *вспомогательная линейная система* (7) *стабилизируема;*

2) *матричное уравнение* (15) *имеет такое решение относительно матрицы* $\mathbf{T}$*, что* $\operatorname{rang} \mathbf{M} = n$*, а характеристические показатели Ляпунова линейной системы с матрицей* $\mathbf{A}_{zz}(t)$ *отрицательны;*

3) *для функции* $\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mu)$ *из* (1) *при допустимых значениях величин* $\mathbf{u}$*,* μ *справедлива оценка* $\|\mathbf{G}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mu)\| \leqslant \psi(t)\|\mathbf{x}\|^m$*, где* $m > 1$*,* $\psi(t)$ *— непрерывная положительная функция при* $t \geqslant 0$*, характеристический показатель Ляпунова которой равен нулю.*

Тогда для системы (1) *существует квазилинейный асимптотический идентификатор Люенбергера* (14) *и стабилизирующее управление* (5), (13).

Доказательство. Отметим основные моменты доказательства, поскольку основная идея остается той же, что и при доказательстве `теоремы 1`. Для построения стабилизирующего управления (5), (13) и неизвестных коэффициентов идентификатора (14) рассматривается объединенная система уравнений, первая подсистема которой есть (1), а вторая описывает динамику качества оценки вектора $\mathbf{z}$. Выполнение первого и второго условий теоремы обеспечивает экспоненциальную устойчивость линейного приближения этой системы. Используя третье условие теоремы, можно применить теорему о стабилизации по линейному приближению [6], тем самым установив, что нулевое решение данной системы экспоненциально устойчиво. В результате получаем конструктивный подход к построению асимптотического идентификатора Люенбергера (14) и стабилизирующего управления (5), (13). □

Заключение. В настоящей работе исследован вопрос стабилизации программного движения квазилинейной системы в случае неполной обратной связи. Получены достаточные условия существования идентификаторов полного порядка и идентификаторов Люенбергера для данного класса систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
2. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
3. *Luenberger D. C.* Observers for multivariable systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1966. — Vol. 11, No. 2. — P. 190–197.
4. *Смирнов Н. В.* Стабилизация билинейной нестационарной системы в случае неполной обратной связи // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.* 1, 2000. — Т. 4, № 25. — С. 28–34.
5. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. — СПб.: С.-Петербург. ун-т, 1997. — 307 с.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Поступила в редакцию 26/VI/2010;
в окончательном варианте — 12/X/2010.

MSC: 34H15, 49N30, 93B07

OBSERVERS FOR THE QUASI-LINEAR SYSTEMS

Y. A. Shakhov

St. Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
35, Universitetsky prosp., St. Petersburg, 198504.

E-mail: `yakov.shakhov@gmail.com`

The problem of quasi-linear systems stabilization in the case of incomplete feedback is considered. While synthesising a stabilizing control, estimation of a current state vector is applied. To design this estimation, observers are constructed. The full-dimensions observer and the Luenberger's observer are studied and sufficient conditions of its existence are obtained.

Key words: *quasi-linear system, stabilization, program control, incomplete feedback, full-dimensions observer, Luenberger's observer.*

Original article submitted 26/VI/2010;
revision submitted 12/X/2010.

Yakov A. Shakhov, Postgraduate Student, Dept. of Economics Systems Modeling.