

УДК 517.956.2

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ИЗ L_p **А. К. Гуцин**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: akg@mi.ras.ru

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами. При условии непрерывности по Дини коэффициентов при старших производных на границе области устанавливается однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией из L_p , $p > 1$. Доказывается оценка аналога интеграла площадей.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Дирихле, функциональное пространство.

Введение. Хорошо известно, что понятие обобщённого решения из соболевского пространства $W_2^1(Q)$ задачи Дирихле в ограниченной области Q для эллиптического уравнения второго порядка не является в полном смысле обобщением понятия классического решения. Для существования классического решения (при естественных предположениях на коэффициенты уравнения и границу области ∂Q) необходимо и достаточно условие непрерывности граничной функции u_0 , а для обобщённого решения граничная функция должна быть следом некоторой функции из $W_2^1(Q)$, то есть должна принадлежать пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$. Так как непрерывная функция не обязана принадлежать пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$, то классическое решение может не принадлежать $W_2^1(Q)$. Естественным обобщением этих понятий является определение решения, в котором граничное значение понимается как предел в L_2 следов решения на «параллельных границе» поверхностях (решение из $W_{2,\text{loc}}^1$, см. [1]), или, в более общем случае, как предел в L_p , $p > 1$ (тогда $u_0 \in L_p(\partial Q)$). Изучению этой задачи посвящена настоящая работа. Основное внимание уделяется условиям на гладкость коэффициентов, при которых для всех $p > 1$ справедлива теорема о разрешимости задачи Дирихле, и получение оценок решения через граничную функцию и правую часть уравнения.

В ограниченной области Q n -мерного пространства $\mathbb{R}_n$ рассмотрим задачу Дирихле для равномерно эллиптического уравнения с измеримыми и ограниченными коэффициентами

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x)u = f(x), \quad x \in Q \quad (1)$$

с граничным условием

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_p(\partial Q), \quad p > 1. \quad (2)$$

Анатолий Константинович Гуцин (д.ф.-м.н.), профессор, ведущий научный сотрудник, отд. математической физики.

Коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in Q$, уравнения (1) являются измеримыми функциями, удовлетворяющими с некоторой положительной постоянной γ условию

$$\gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n, |\xi| = 1, \text{ и п.в. } x \in Q. \quad (3)$$

Далее симметрическую матрицу $a_{ij}(x)$ будем для краткости обозначать через $A(x)$. Коэффициент a принадлежит $L_\infty(Q)$.

В случае $p = 2$ разрешимость рассматриваемой задачи достаточно подробно изучена. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи (при условии неотрицательности коэффициента a) и установлен ряд тонких свойств её решений (см. [1–7]). В отличие от обобщённого решения из соболевского пространства $W_2^1(Q)$, для которого разрешимость исследуется без дополнительных условий на гладкость коэффициентов уравнения и для произвольной ограниченной области, для решения из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ такие условия приходится требовать. Ослабление требований на принятия решением своего граничного значения приводит к необходимости условий гладкости коэффициентов уравнения на границе. При наиболее слабых условиях на коэффициенты a_{ij} разрешимость задачи Дирихле (1), (2) с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$ была исследована (в случае $a = 0$; этот случай мы и будем обсуждать) в работе [2]. Для справедливости теоремы об однозначной разрешимости достаточно, чтобы граница области принадлежала классу C^1 , нормаль (внутренняя) к ней ν ($|\nu| = 1$) была непрерывна по Дини:

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \quad (4)$$

а коэффициенты уравнения были непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q \quad (5)$$

(значения функций $a_{ij}(x)$, $x \in \bar{Q}$, можно так изменить на множестве нулевой меры, что будет выполнено (5)). Здесь $\omega = \omega(t)$ — такая монотонная функция, что $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ (т.е. функция $\omega(t)/t$ имеет интегрируемую особенность в нуле). Внутри области, как и в случае решения из $W_2^1(Q)$, коэффициенты измеримы и ограничены. Отказаться от дополнительного условия на коэффициенты a_{ij} нельзя, теряется единственность решения (соответствующий пример приведен в [2]). Далее мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, условия (4), (5), как и условие (3), выполненными.

Кроме того, в работе [2] было доказано, что для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и $f \in W_2^{-1}(Q)$ (последнее условие можно ослабить, см. [13]) решение (из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$) обсуждаемой задачи обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, аналогичным непрерывности по совокупности переменных (принадлежит банахову пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$). В определении этого свойства вместо значений функции в точках следует брать её следы на носителях мер μ — элементы пространства L_2 по этим мерам. При этом берутся меры, близкие к мерам Карлесона, подробнее см. [2]. Если в этом определении взять все борелевские

меры с носителями в $\bar{Q}$, то полученное таким образом определение будет эквивалентно классическому определению непрерывности функции. В работе [3] было доказано, что для решений однородного уравнения обсуждаемое свойство можно усилить: класс мер можно расширить так, что из полученного таким образом свойства будет вытекать внутренняя непрерывность решения. Более того, на этом пути было получено, см. [4–6], усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решения однородного уравнения. В [6] было введено функциональное пространство, элементы которого непрерывны по Гёльдеру внутри области Q (принадлежат $C_{\text{loc}}^\alpha(Q)$) и являются $(n-1)$ -мерно непрерывными функциями в $\bar{Q}$ (принадлежат $C_{n-1}(\bar{Q})$). Причём введённое пространство лежит строго внутри пересечения $C_{\text{loc}}^\alpha(Q) \cap C_{n-1}(\bar{Q})$ (его функции обладают свойствами, которые не следуют из внутренней непрерывности по Гёльдеру и $(n-1)$ -мерной непрерывности). Доказано, что для любой граничной функции u_0 из $L_2(\partial Q)$ решение задачи Дирихле для однородного уравнения принадлежит этому пространству.

Ключевую роль при получении этих результатов играет доказанная в работе [3] (см. также [7]) теорема карлесоновского типа об оценках в L_2 по мерам решения задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$. Теорема Карлесона (см. [8, 9]) даёт условие на меру необходимое и достаточное для того, чтобы для любой аналитической в круге функции была справедлива оценка интеграла от модуля решения в степени p (здесь $p > 0$) по этой мере через интеграл от p -той степени модуля её граничного значения. Для гармонических функций n переменных в области с дважды гладкой границей такое утверждение (при $p > 1$) было установлено Л. Хермандером [10]). Для уравнения (1) (при $a = 0$), как уже отмечалось выше, аналогичный результат был получен в работе [3] (см. также [7]). Эта теорема оказалась весьма удобным инструментом для исследования разрешимости нелокальных задач, в которых значения искомого решения на границе рассматриваемой области выражаются через его значения во внутренних точках области и других точках границы. Её использование позволило существенно расширить класс поддающихся изучению нелокальных задач, см. [3, 11, 12]. В частности, установлена фредгольмовость ряда нелокальных задач, которые в классической постановке не являются даже нётеровыми (подробнее см. [3]).

Интерес к изучаемому в данной работе вопросу возник в связи с желанием понять, при каких ограничениях на коэффициенты a_{ij} и границу области утверждение, аналогичное теореме Карлесона, справедливо при всех $p > 1$. Оказалось, что трудности возникают уже при доказательстве однозначной разрешимости. Встаёт вопрос: как определить решение задачи с граничной функцией из L_p , чтобы не пришлось требовать непрерывность коэффициентов уравнения внутри области?

Легко видеть, что теорема карлесоновского типа может быть верна только при весьма жёстких ограничениях на правую часть уравнения (поскольку из её справедливости следует непрерывность решения внутри рассматриваемой области). Поэтому в настоящей работе мы не будем стремиться охватить максимально широкий класс правых частей. Будем считать, что $f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$. Для теоремы о разрешимости это условие, конечно, является грубым. Как доказано в работе [13], при $p = 2$ для существования решения задачи Дирихле достаточно предположить, что правая часть урав-

нения представляется в виде $f = g - (\nabla, F)$ с функциями $g \in L_{2,\text{loc}}(Q)$ и $F \in [L_{2,\text{loc}}(Q)]^n$, ($f \in W_{2,\text{loc}}^{-1}(Q)$), для которых конечны интегралы

$$\int_Q \frac{r(x)}{\omega(r(x))} |F(x)|^2 dx \quad \text{и} \quad \int_Q \frac{r^3(x)}{\omega(r(x))} |g(x)|^2 dx,$$

где монотонно возрастающая функция $\omega(t)$, $t > 0$, удовлетворяет условию Дини $\left(\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty\right)$. Здесь и всюду далее через $r(x)$ обозначается расстояние от точки $x \in Q$ до границы области Q .

1. Постановка задачи Дирихле. При $p = 2$ определение решения (из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$) было предложено В. П. Михайловым в работе [1]. От решения требуется, чтобы оно принадлежало пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяло уравнению в смысле равенства обобщённых функций (то есть для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в области Q пробных функций выполнялось соответствующее интегральное тождество) и семейство следов решения на «параллельных границе» поверхностях (они принадлежат L_2 в силу теоремы вложения) сходилась в L_2 к заданной граничной функции u_0 . Для аналогичного определения при $p \neq 2$ необходимо, чтобы следы решения на лежащих в Q гладких поверхностях принадлежали пространству L_p на них. Обычно это свойство обеспечивается требованием принадлежности решения $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, см. [14–16]. Но это условие приводит к необходимости требовать выполнения дополнительных условий на гладкость коэффициентов уравнения внутри области; требований гладкости на границе недостаточно. При выполнении только условий (3) и (5) для $p > 2$ принадлежащее $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ решение может не существовать (хорошо известно, что решение из W_2^1 может не принадлежать W_p^1), а при $p < 2$ оно не обязано быть единственным (не обязано быть единственным даже решение из $W_p^1(Q)$). Убедимся в этом на следующих примерах.

ПРИМЕР 1. Пусть $p > 2$, $n = 2$, а область Q — круг $\{x = (x_1, x_2) : |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Рассмотрим однородное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q \quad (11)$$

с матрицей

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \sigma \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \sigma \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & 1 + \sigma \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты уравнения (элементы матрицы A) являются гладкими функциями всюду, кроме центра круга. Поэтому условие (5) выполнено. Конечно, выполнено и условие (4). При значениях параметра $\sigma > -1$ матрица A равномерно по x положительно определена, то есть выполнено (3).

Нетрудно проверить, что функция $u_+(x) = r^\vartheta \cos \varphi$, где $\vartheta = 1/\sqrt{1+\sigma} > 0$, является решением этого уравнения в $\mathbb{R}_2$; здесь (r, φ) — полярные координаты. При достаточно большом значении параметра σ (при $\sigma \geq p^2/(p-2)^2 - 1$)

показатель ϑ будет малым ($\vartheta \leq 1 - 2/p$) и интеграл от $|\nabla u_+|^p$ по любой содержащей центр круга области расходится. При всех $\vartheta > 0$, как легко видеть, $u_+ \in W_2^1(Q)$. Таким образом, мы показали, что решение из $W_2^1(Q)$, а следовательно, и из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, задачи Дирихле с граничной функцией $u_0(\varphi) = \cos \varphi \in L_p(\partial Q)$ для уравнения (1₁) не принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$. Из этого (в силу теоремы о единственности решения из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, см. [2]) немедленно следует, что решения из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ этой задачи не существует (напомним, что сейчас мы рассматриваем случай $p > 2$).

ПРИМЕР 2. Пусть теперь $p < 2$. Как и в примере 1, рассмотрим уравнение (1₁) с той же матрицей старших коэффициентов A в круге $Q = \{x = (x_1, x_2) : |x| < 1\}$, $n = 2$. Отметим, что вектор (x_1, x_2) является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $(1 + \sigma)$; второе собственное значение равно единице. Легко проверить, что функция $u_-(x) = r^{-\vartheta} \cos \varphi$, $\vartheta = 1/\sqrt{1 + \sigma}$, также является решением этого уравнения в $\mathbb{R}_2 \setminus (0, 0)$. При $\vartheta \in (0, (2 - p)/p)$ функция u_- принадлежит пространству $W_p^1(Q)$. Покажем, что она является решением рассматриваемого уравнения во всём круге Q .

Возьмём произвольную функцию $\eta \in C_0^\infty(Q)$, любое $\delta \in (0, 1)$ и рассмотрим интеграл

$$\iint_{\{(r,\varphi):\delta < r < 1\}} (\nabla \eta, A \nabla u_-) dx = - \int_{\{r=\delta\}} \eta(\nu, A \nabla u_-) ds.$$

Здесь ν — единичный вектор нормали к окружности $\{x : |x| = \delta\}$. Так как нормаль является собственным вектором матрицы A , то

$$\begin{aligned} \iint_{\{(r,\varphi):\delta < r < 1\}} (\nabla \eta, A \nabla u_-) dx &= -\delta(1 + \sigma) \int_0^{2\pi} \eta(\delta, \varphi) \frac{\partial u_-}{\partial r}(\delta, \varphi) d\varphi = \\ &= (1 + \sigma) \vartheta \delta^{-\vartheta} \int_0^{2\pi} \eta_0(\delta, \varphi) \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где $\eta_0(\delta, \varphi) = \eta(\delta, \varphi) - \eta(0, 0) = O(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$. Следовательно, рассматриваемый интеграл стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$ ($\vartheta < 1$). Таким образом, функция u_- является решением задачи Дирихле с граничной функцией $\cos \varphi$ и принадлежит пространству $W_p^1(Q)$ (конечно, она не принадлежит $W_2^1(Q)$). Но эта задача имеет и другое решение $u_+(r, \varphi) = r^\vartheta \cos \varphi$. Итак, при $p < 2$ принадлежащее пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$ (и даже $W_p^1(Q)$) решение задачи Дирихле не обязано быть единственным.

Отметим, что для однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) в $W_p^1(Q)$ достаточно потребовать непрерывности коэффициентов уравнения, см. [17].

Приведённые примеры показывают, что для справедливости теоремы о разрешимости задачи Дирихле без условий гладкости коэффициентов внутри области в определении решения необходимо отказаться от требования принадлежности решения пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$.

Решением уравнения (1) в области Q , как обычно, будем называть функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, для которой интегральное тождество

$$\int_Q [(\nabla \eta(x), A(x) \nabla u(x)) + a(x)u(x)\eta(x)] dx = 0$$

выполняется для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Q пробных функций η (или, другими словами, которая удовлетворяет уравнению (1) в смысле равенства обобщённых функций).

Для однородного уравнения (в случае $f = 0$) принадлежность следов решения уравнения пространству L_p на любой лежащей в Q гладкой поверхности немедленно следует из теоремы о гёльдеровой непрерывности решения в Q [18–20], см. также [21–23]. В случае неоднородного уравнения выполнения этого свойства необходимо требовать дополнительно. Очевидно, что это условие должно распространяться на правую часть уравнения (достаточно, чтобы ему удовлетворяло решение задачи Дирихле с равной нулю граничной функцией). В частности, решение обладает этим свойством при выполнении наложенных выше условий на правую часть уравнения ($f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$).

Определим выполнение граничного условия (2) следующим образом. Из гладкости границы следует существование таких (достаточно малых) положительных чисел r_0 и δ_0 , что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ и любого числа $\delta \in (0, \delta_0)$ сдвиг $\{x \in \mathbb{R}_n : x = x' + \delta \nu(x^0), x' \in V_{x^0}(r_0)\}$ куска границы $V_{x^0}(r_0) = \partial Q \cap B_{x^0}(r_0)$ на расстояние δ вдоль внутренней (единичной) нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 лежит внутри области Q ; здесь и всюду далее $B_y(\rho) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - y| < \rho\}$ — шар радиуса ρ с центром в точке y .

Будем говорить, что решение u уравнения (1) удовлетворяет граничному условию (2), если

$$\int_{V_{x^0}(r_0)} |u(x + \delta \nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0 \quad (2')$$

для всех $x^0 \in \partial Q$.

На самом деле решение задачи Дирихле, как и в случае $p = 2$ (см. [2]), обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, а граничное значение принимается в существенно более сильном смысле. В частности, выбор направления сдвига (вдоль нормали в точке x^0) в фигурирующем в (2') отображении $x \rightarrow x + \delta \nu(x^0)$, $\delta > 0$, куска $V_{x^0}(r_0)$ границы в область Q и взаимная однозначность этого отображения (на образ) не являются существенными. Можно взять любое отображение, при котором «не слишком много» точек границы переходят в одну точку и «не слишком много» точек сдвигаются на расстояние, большее δ . Точнее, решение принадлежит пространству $(n-1)$ -непрерывных функций. Определение этого пространства (пространства $C_{r^{n-1},p}$) и свойства его элементов можно найти в [2]. В этой работе мы не будем обсуждать свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности решения и его усиление — упоминавшуюся выше теорему карлесоновского типа. Статья содержит необходимый для этих утверждений подготовительный материал.

2. Формулировка основных результатов. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема об однозначной разрешимости задачи (1), (2) и о принадлежности функции $|u|^{p/2}$ весовому пространству W_2^1

с равным расстоянию до границы весом $r(x) = \text{dist}(x, \partial Q)$. Напомним, что мы предполагаем условия (4), (5), как и условие (3), выполненными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a(x) \geq 0$ для п.в. x из Q . Тогда для любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ и любой правой части $f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$ существует решение задачи Дирихле (1), (2). Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) + \int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ \leq \text{const} \cdot \left(\int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS + \int_Q |f(x)|^p dx \right), \quad (6)$$

постоянная в которой зависит только от размерности пространства n постоянной эллиптичности γ из (3), области Q , функции ω из условий (4), (5) и показателя p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Остановимся подробнее на случае $p \in (1, 2)$. Так как в правую часть оценки (6) не входит норма f в $L_2(Q)$, то из неё немедленно вытекает существование предела в $L_p(Q)$ последовательности u_k решений задачи с правыми частями $f_k \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$, приближающими в $L_p(Q)$ произвольно взятую функцию f из $L_p(Q)$; обозначим этот предел через u . Можно доказать, что функция $|u|^{p/2}$ принадлежит пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, для неё конечен интеграл

$$\int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (7)$$

и справедлива оценка (6). Полученную таким образом функцию u можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения с правой частью f . Она удовлетворяет граничному условию в смысле (2'), но не обязана (а при близких к единице значениях показателя суммируемости p и не может) принадлежать $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$. Поэтому возникают следующие вопросы. В каком смысле она удовлетворяет уравнению? Как описать соответствующий класс единственности? По-видимому, условием, выделяющим единственное решение задачи Дирихле, должно быть условие конечности интеграла (7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие гладкости границы области и коэффициентов на границе (условия (4) и (5)), по-видимому, можно ослабить. Но совсем отказаться от них нельзя. Как следует из приведённого в работе [17] примера, в случае $p \in (1, 2)$ от условий на границу области нельзя отказаться даже для уравнения Лапласа, так как нарушается единственность даже решения из $W_p^1(Q)$. В [2] приведён пример, показывающий, что без ограничений на коэффициенты несправедлива теорема о единственности решения в случае $p = 2$. Тогда, конечно, нет этого утверждения и при $p \in (1, 2)$. Покажем, что и при $p > 2$ при выполнении только (4) и (5) условие принятия граничного значения в L_p (более сильное, чем в L_2) не обеспечивает единственности решения.

ПРИМЕР 3. Как и в примере 1, рассмотрим уравнение (1₁) с той же матрицей старших коэффициентов A в полукруге $Q = \{x = (x_1, x_2) : |x| < 1, x_1 > 0\}$,

$n = 2$. Функции $u_+(x) = r^\vartheta \cos \varphi$ и $u_-(x) = r^{-\vartheta} \cos \varphi$, $\vartheta = 1/\sqrt{1+\sigma}$ являются решениями этого уравнения в $\mathbb{R}_2 \setminus (0, 0)$. На окружности $\{|x| = 1\}$ их значения совпадают. При $\vartheta \in (0, \frac{1}{p})$ ($\sigma > p^2 - 1$) функция $u_-(\delta, x_2)$ стремится к нулю в $L_p(-1, 1)$ при $\delta \rightarrow +0$. Следовательно, функция $u_+ - u_- \neq 0$ является решением задачи Дирихле с тождественно равной нулю граничной функцией. Нетрудно построить аналогичный пример и в области с гладкой границей.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценка (6) теоремы 1 является в следующем смысле точной. Для уравнения с гладкими коэффициентами и области с достаточно гладкой границей конечность стоящего в левой части (6) интеграла (7) эквивалентна условию ограниченности норм в L_p по «параллельным границе» поверхностям. И каждое из этих условий является необходимыми и достаточными для существования у решения уравнения (1) граничного значения в L_p , см. [24, 14–16]. В случае $p = 2$ такой результат получен (в случае $a(x) = 0$) и при сделанных выше предположениях о гладкости коэффициентов уравнения и границы области, см. [13]; при этом условие ограниченности норм в L_2 по «параллельным границе» поверхностям удобно заменить на условие ограниченности (по параметру δ) семейства интегралов

$$\frac{1}{\delta} \iint_{\{x \in Q: \delta < r(x) < 2\delta\}} |u|^2(x) dx, \quad \delta > 0,$$

а принятие граничного значения следует понимать в смысле (2').

По-видимому, эта теорема справедлива при тех же условиях и для всех $p > 1$. Первое из составляющих обсуждаемый результат утверждений содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a(x) \geq 0$ для п.в. x из Q . Тогда для любого решения u уравнения (1) в области Q условие ограниченности семейства

$$\frac{1}{\delta} \iint_{\{x \in Q: \delta < r(x) < 2\delta\}} |u|^p(x) dx, \quad \delta > 0 \quad (8)$$

эквивалентно сходимости интеграла (7).

В частности, интеграл (7) сходится для решений задачи Дирихле с $u_0 \in L_p(\partial Q)$. Это свойство используется в доказательстве теоремы 1.

Можно отказаться и от требования неотрицательности коэффициента a . Конечно, теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле в этом случае несправедлива. Но более одного решения эта задача может иметь только тогда, когда неединственно решение этой задачи в обычной обобщённой постановке (в $W_2^1(Q)$). Собственные значения и собственные функции соответствующих операторов совпадают.

ТЕОРЕМА 3. Любое решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее однородному условию

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad (2_0)$$

принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$.

Выполнение граничного условия (2₀) и здесь понимается в смысле (2') с $u_0 = 0$.

Условие ограниченности коэффициента a является грубым. Ясно, что можно допускать рост этого коэффициента вблизи границы. Вопрос о точных условиях на порядок его роста требует дополнительного изучения.

3. О доказательстве основных результатов. Приведём сначала используемые в доказательстве «грубые» вспомогательные утверждения, не требующие условий гладкости (4) и (5); условие эллиптичности (3), конечно, предполагается выполненным.

ЛЕММА 1. Существует такая постоянная $C = C(n, \gamma)$, зависящая только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ из условия (3), что для любого неотрицательного коэффициента a и для любого решения u однородного уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x)u = 0, \quad x \in Q \quad (1_0)$$

в шаре $B_{x_0}(R_0)$ для всех $R \in (0, R_0/2)$ справедливы оценки

$$\max_{B_{x_0}(R)} |u(x)|^p \leq CR^{-n} \int_{B_{x_0}(2R)} |u(x)|^p dx,$$

$$\int_{B_{x_0}(R)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq CR^{n-2-2n/p} \left(\int_{B_{x_0}(2R)} |u(x)|^p dx \right)^{2/p}$$

и

$$\int_{B_{x_0}(R)} |u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)| dx \leq CR^{-1} \int_{B_{x_0}(2R)} |u(x)|^p dx.$$

Первая из оценок леммы 1, по существу, известна, см., например, [22]; независимость постоянной в этих оценках от коэффициента a , что существенно для дальнейшего, обеспечивается его знаком. Остальные оценки получаются из первой стандартными рассуждениями.

Из леммы 1 немедленно вытекают оценки нормы решения в $W_2^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, через его норму в $L_p(Q)$. Кроме того, отметим еще одно простое следствие первой оценки из этой леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть u — решение в Q однородного уравнения (1₀) с неотрицательным коэффициентом a . Тогда для любой лежащей в Q гладкой гиперповерхности $\Gamma = \bar{\Gamma}$ и для любого положительного числа $\tau < \text{dist}\{\Gamma, \partial Q\}$ справедлива оценка

$$\int_{\Gamma} |u(x)|^p dS \leq \text{const} \cdot \tau^{-1} \int_{\{x \in Q: \text{dist}\{x, \Gamma\} < \tau\}} |u(x)|^p dx$$

с зависящей от n, γ и поверхности Γ постоянной.

ЛЕММА 2. Пусть $a(x) \geq 0$ п.в. в Q . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $p > 2$, то для любой правой части $f \in L_p(Q)$ решение u из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ задачи Дирихле для неоднородного уравнения (1) с однородным

граничным условием (20) обладает свойством: функция $|u|^{p/2} \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\int_Q |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \int_Q |f(x)|^p dx \quad (9)$$

с зависящей от γ, Q и p постоянной C .

2. Если $p \in (1, 2)$, то для любой правой части $f \in L_p(Q) \cap L_{2,\text{loc}}(Q)$ существует решение задачи Дирихле (1), (20) для которого $|u|^{p/2} \in \mathring{W}_2^1(Q)$ и справедлива оценка (9).

Решение задачи Дирихле (1), (20), о котором говорится во втором утверждении леммы 2, принимает нулевое граничное значение в L_p (выполнено (2') с $u_0 = 0$). Далее мы убедимся, что и в этом случае решение единственно. Отметим, что и в первом утверждении, как это немедленно следует из принадлежности функции $|u|^{p/2}$ пространству $\mathring{W}_2^1(Q)$, нормы решения в L_p по сдвинутым кускам границы стремятся к нулю при приближении этих кусков к границе.

Далее мы всюду будем предполагать условия (4) и (5) выполненными. Доказательство теорем 1 и 2 основывается на конечном покрытии границы ∂Q достаточно малыми (в частности, лежащими в $B_{x^k}(r_0/4)$, $x^k \in \partial Q$, r_0 из (2')) подобластями специального вида (см. [2]) и на оценках решения в пересечениях Q_k , $k = 1, 2, \dots, q$, этих подобластей с Q . Как и в работе [2], естественной заменой независимых переменных каждая из Q_k отображается на цилиндр

$$\Pi_k = \{(x', x_n) = (x_1, \dots, x_n) : |x'|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < h'^2, 0 < x_n < h_n\},$$

основанием $\{(x', x_n) : |x'| \leq h', x_n = 0\}$ которого является образ $\partial Q_k \cap \partial Q$. Вид уравнения (1) при таком отображении не меняется. Здесь и всюду далее новые переменные также обозначены через $x = (x_1, \dots, x_n)$. При этом номер k , $k = 1, \dots, q$, выбирается произвольно и фиксируется; зависимость от него отмечать не будем.

При любых числах $t \in (0, h_n)$ и $\tau \in (0, t)$ определим функцию $\varrho(x_n) = \varrho(x_n; t, \tau)$, $x_n \geq 0$, следующим образом: $\varrho(x_n) = 0$ при $0 \leq x_n \leq \tau$, $\varrho(x_n) = x_n - \tau$ при $\tau \leq x_n \leq t$ и $\varrho(x_n) = t - \tau$ при $x_n \geq t$. Кроме того, возьмём бесконечно дифференцируемые срезающие функции $\psi(x')$, $x' \in \mathbb{R}_{n-1}$ и $\psi_n(x_n)$, $x_n \geq 0$, принимающие значения в отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющие условиям $\psi(x') = 1$ при $|x'| \leq h'$, $\psi(x') = 0$ при $|x'| \geq 2h'$, $\psi_n(x_n) = 1$ при $x_n \in [0, h_n]$, и $\psi_n(x_n) = 0$ при $x_n \geq 2h_n$; $|\nabla \psi(x')| \leq C/h'$, $|\psi'_n(x_n)| \leq C/h_n$ с абсолютной постоянной C . При $p \geq 2$ подставим в интегральное тождество пробную функцию $\eta(x) = \psi(x')\psi_n(x_n)\varrho(x_n; t, \tau)u^{(M)}(x)|u^{(M)}(x)|^{p-2}$, где $u^{(M)}(x) = u(x)$ при $|u(x)| \leq M$, $u^{(M)}(x) = M$ при $u(x) > M$ и $u^{(M)}(x) = -M$ при $u(x) < -M$, M — произвольное положительное число. При $p \in (1, 2)$ следует «отодвинуться от нуля», взяв в выражении пробной функции (вместо $u^{(M)}(x)|u^{(M)}(x)|^{p-2}$) сначала сумму $(u^+(x) + \delta)^{p-1}$, где $u^+(x) = (u(x) + |u(x)|)/2$ — положительная часть решения, δ — произвольное положительное число, а затем $(u^- + \delta)^{p-1}$; здесь $|u| = u^+ + u^-$. В слагаемом, получающемся при дифференцировании множителя ϱ , каждый из коэффициентов $a_{nj} = a_{jn}$, $j = 1, 2, \dots, n$, нужно представить в виде суммы построенной по нему гладкой функции $a_{nj}^0 = a_{jn}^0$

(вид этих функций см. в [2]) и разности $a_{nj} - a_{nj}^0$. Эта разность достаточно быстро стремится к нулю при приближении к границе, точнее, она удовлетворяет оценке

$$|a_{in}^0(x) - a_{in}(x)| \leq \omega(\sqrt{2}x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

в которой ω — монотонно неубывающая функция из (4) и (5), а рост (при $x_n \rightarrow +0$) производных приближающей функции «интегрируем»:

$$\left| \frac{\partial a_{in}^0(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{n-1}{x_n} \omega(2x_n).$$

Интегралы, в которые входят a_{in}^0 , нужно проинтегрировать по частям и в полученных равенствах перейти к пределу при $M \rightarrow +\infty$ (в случае $p \geq 2$) и при $\delta \rightarrow +0$ (в случае $p \in (1, 2)$). Равенства, содержащие u^+ и u^- , сложим. Полученные таким образом равенства являются основными при доказательстве теорем 2 и 1. Прежде всего, из них получаются оценки интегралов

$$\int_{\{x \in \Pi: x_n > \tau\}} \rho(x_n) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (7')$$

по каждому элементу покрытия границы. Суммируя их, получаем утверждение теоремы 2 о сходимости интеграла (7). Аналогичными рассуждениями доказывается и второе утверждение этой теоремы об ограниченности семейства (8). Для этого предварительно нужно убедиться в принадлежности решения уравнения пространству $L_p(Q)$.

Доказанная сходимость интеграла (7) позволяет перейти к пределу при $\tau \rightarrow +0$ в полученных из интегрального тождества равенствах. Складывая вытекающие из них оценки интегралов (7'), получаем справедливость следующего вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 3. Для любого решения u задачи (1), (2) с неотрицательным коэффициентом $a(x)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \sup_{0 < \xi < h_n/2} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) \leq \\ & \leq C \left(\int_Q |u(x)|^p dx + \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dx + \int_Q |f(x)|^p dx \right) \quad (10) \end{aligned}$$

с зависящей от n, γ, p, ω и области Q постоянной C .

Кроме того, существует такая постоянная λ_0 , зависящая от n, γ, p, ω и области Q , что для любого коэффициента $a(x) \geq \lambda_0$ и всех $p > 1$ задача (1), (2) не может иметь более одного решения. При этом для любой граничной функции $u_0 \in L_p(\partial Q)$ и любой правой части уравнения $f \in L_p(Q) \cap L_{2,loc}(Q)$ решение этой задачи удовлетворяет оценке

$$\int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx + \sup_{0 < \xi < h_n/2} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u(x)|^p dx \right) +$$

$$+ \int_Q |u(x)|^p dx \leq C \left(\int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dx + \int_Q |f(x)|^p dx \right), \quad (10')$$

в которой постоянная C зависит от n , γ , p , ω и области Q .

Из оценки (10') немедленно следует существование решения рассматриваемой задачи. Принадлежность полученного предельным переходом решения пространству $W_{2,loc}^1(Q)$ вытекает из лемм 1 и 2.

Перейдём теперь к доказательству теоремы 1. Прежде всего докажем единственность решения задачи (1), (2). Пусть u — решение однородной задачи (1₀), (2₀). Напомним, что по определению решения $u \in L_p(Q) \cap L_{2,loc}(Q)$. Функцию u можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + (a(x) + \lambda_0)u = g(x), \quad x \in Q \quad (1')$$

с правой частью $g(x) = \lambda_0 u(x)$, $g \in L_p(Q) \cap L_{2,loc}(Q)$. Отметим, что в силу леммы 3 других решений у этой задачи нет. По лемме 2 функция $v = |u|^{p/2}$ принадлежит пространству $\dot{W}_2^1(Q)$. Следовательно, согласно теореме вложения, $v \in L_{2n/(n-2)}(Q)$ (при $n > 2$; при $n = 2$ она принадлежит $L_q(Q)$ с произвольным q). Но тогда u , а вместе с ней и g , принадлежат пространству $L_{pn/(n-2)}(Q)$. Применяя опять лемму 2, получим, что u (и правая часть g) принадлежат $L_{pn^2/(n-2)^2}(Q)$. За конечное число шагов мы получим, что $g \in L_2(Q)$. Но тогда $u \in \dot{W}_2^1(Q)$, а следовательно, $u \equiv 0$.

Легко видеть, что приведённое выше рассуждение, приводящее к утверждению о принадлежности решения пространству $\dot{W}_2^1(Q)$, проходит и в случае уравнения (1) с коэффициентом $a(x)$ произвольного знака (из L_∞). Это означает, что все собственные функции соответствующего рассматриваемой постановке оператора принадлежат $\dot{W}_2^1(Q)$, что доказывает теорему 3.

Докажем теперь справедливость оценки (10') для рассматриваемого случая $a(x) \geq 0$. Утверждение о существовании решения в этом случае немедленно следует из этой оценки.

Пусть u — произвольное решение задачи (1), (2). Наряду с ним рассмотрим решение w задачи (1'), (2) (с теми же правой частью $f(x)$ и граничной функцией u_0 ; λ_0 из леммы 3):

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + (a(x) + \lambda_0)w = f, \quad x \in Q;$$

$$w|_{\partial Q} = u_0.$$

По доказанному решение этой задачи существует, оно единственно и удовлетворяет оценке (10'). В частности,

$$\int_Q |w(x)|^p dx \leq C \left(\int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dx + \int_Q |f(x)|^p dx \right). \quad (10'')$$

Разность $z = u - w$ является решением уравнения (1) с правой частью $\lambda_0 w$:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) = \lambda_0 w(x), \quad x \in Q$$

и удовлетворяет однородному граничному условию $z|_{\partial Q} = 0$. Как мы уже доказали, решение этой задачи единственно. В силу леммы 2 функция $|z|^{p/2}$ принадлежит пространству $\dot{W}_2^1(Q)$ и для её нормы в этом пространстве справедлива оценка (9). Но тогда

$$\int_Q |z(x)|^p dx = \| |z|^{p/2} \|_{L_2(Q)}^2 \leq C(Q) \| |z|^{p/2} \|_{\dot{W}_2^1(Q)}^2 \leq C(n, \gamma, p, Q) \lambda_0^p \|w\|_{L_p(Q)}^p.$$

Отсюда, используя (10''), получаем оценку нормы в $L_p(Q)$ функции z , а вместе с ней и решения исходной задачи u через нормы граничной функции и правой части:

$$\int_Q |u(x)|^p dx \leq C \left(\int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dx + \int_Q |f(x)|^p dx \right).$$

Доказываемое неравенство (10') (в частности, и неравенство (6) теоремы 1) теперь следует из оценки (10) леммы 3.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00178-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7675.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов В. П. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 10. С. 1877–1891. [Mikhailov V. P. The Dirichlet problem for a second order elliptic equation // *Differenc. Uravneniya*, 1976. Vol. 12, no. 10. Pp. 1877–1891].
2. Гушчин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 1988. Т. 137(179), № 1(9). С. 19–64; англ. пер.: Gushchin A. K. On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation // *Math. USSR-Sb.*, 1990. Vol. 65, no. 1. Pp. 19–66.
3. Гушчин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160; англ. пер.: Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995. Vol. 81, no. 1. Pp. 101–136.
4. Гушчин А. К. Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 1998. Т. 189, № 7. С. 53–90; англ. пер.: Gushchin A. K. Some properties of the solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation // *Sb. Math.*, 1998. Vol. 189, no. 7. Pp. 1009–1045.
5. Гушчин А. К. О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1036–1052; англ. пер.: Gushchin A. K. On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 826–840.
6. Гушчин А. К. Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 345–363; англ. пер.: Gushchin A. K. A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation // *Theoret. and Math. Phys.*, 2008. Vol. 157, no. 3. Pp. 1655–1670.

7. Гущин А. К., Михайлов В. П. Внутренние оценки обобщенных решений эллиптического уравнения второго порядка // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнаучн. сер.*, 2008. № 8/1(67). С. 76–94. [Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On the existence of boundary values for solutions of elliptic equations // *Vestn. Sam. Gos. Un-ta. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 76–94].
8. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // *Amer. J. Math.*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 921–930.
9. Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem // *Ann. of Math.*, 1962. Vol. 76, no. 3. Pp. 547–559.
10. Hörmander L. L^p -estimates for (pluri-) subharmonic functions // *Math. Scand.*, 1967. Vol. 20. Pp. 65–78.
11. Гущин А. К., Михайлов В. П. О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения // *Матем. сб.*, 1995. Т. 186, № 2. С. 37–58; англ. пер.: Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On the continuity of the solutions of a class of non-local problems for an elliptic equation // *Sb. Math.*, 1995. Vol. 186, no. 2. Pp. 197–219.
12. Гущин А. К. Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // *Матем. сб.*, 2002. Т. 193, № 5. С. 17–36; англ. пер.: Gushchin A. K. A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations // *Sb. Math.*, 2002. Vol. 193, no. 5. Pp. 649–668.
13. Гущин А. К., Михайлов В. П. О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения // *Матем. сб.*, 1991. Т. 182, № 6. С. 787–810; англ. пер.: Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation // *Math. USSR-Sb.*, 1992. Vol. 73, no. 1. Pp. 171–194.
14. Гущин А. К., Михайлов В. П. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений // *Матем. сб.*, 1979. Т. 108(150), № 1. С. 3–21; англ. пер.: Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of elliptic equations // *Math. USSR-Sb.*, 1980. Vol. 36, no. 1. Pp. 1–19.
15. Петрушко И. М. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // *Матем. сб.*, 1983. Т. 120(162), № 4. С. 569–588; англ. пер.: Petrushko I. M. On boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with A. Lyapunov boundary // *Math. USSR-Sb.*, 1984. Vol. 48, no. 2. Pp. 565–585.
16. Михайлов Ю. А. О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1983. Т. 19, № 2. С. 318–337. [Mikhailov V. P. Boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of a second-order linear elliptic equation // *Differenc. Uravneniya*, 1983. Vol. 19, no. 2. Pp. 318–337].
17. Алхутов Ю. А., Кондратьев В. А. Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области // *Дифференц. уравнения*, 28. Т. 1992, № 5. С. 806–817; англ. пер.: Alkhutov Yu. A., Kondrat'ev V. A. Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex domain // *Differential Equations*, 1992. Vol. 28, no. 5. Pp. 650–662.
18. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 1957. Vol. 3, no. 3. Pp. 25–43.
19. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // *Amer. J. Math.*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 931–954.
20. Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960. Vol. 13, no. 3. Pp. 457–468.
21. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]
22. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic partial differential equations of second order / Fundamental Principles of Mathematical Sciences. Vol. 224. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

- 513 pp.; русск. пер.: Гилберг Д. Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
23. Михайлов В. П., Гушчин А. К. Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики” / Лекц. курсы НОЦ, Т. 7. М.: МИАН, 2007. С. 3–144. [Mikhailov V. P., Gushchin A. K. Additional chapters of course “Equations of Mathematical Physics” / Leks. Kursy NOC, 7. Moscow: Steklov Math. Inst., RAS, 2007. Pp. 3–144].
24. Мазья В. Г. О вырождающейся задаче с косой производной // Матем. сб., 1972. Т. 87(129), № 3. С. 417–454; англ. пер.: Maz'ya V. G. On a degenerating problem with directional derivative // Math. USSR-Sb., 1972. Vol. 16, no. 3. Pp. 429–469.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 27/III/2011.

MSC: 35D05; 35J25, 35B30, 35R05, 35B45

THE ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM WITH BOUNDARY FUNCTION FROM L_p FOR A SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION

A. K. Gushchin

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: akg@mi.ras.ru

We study the solvability of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with measurable and bounded coefficients. Assuming that coefficients of equation are Dini-continued on the boundary, it is established that there is the unique solution of the Dirichlet problem with boundary function from L_p , $p > 1$. We prove the estimate of the analogue of area integral.

Key words: elliptic equation, Dirichlet problem, functional space.

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 27/III/2011.

Anatolii K. Gushchin (Dr. Sci (Phys. & Math.)), Professor, Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.