Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 263–267

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. В. Тарасенко

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: anyutka757@mail.ru

Установлены необходимые и достаточные условия единственности решения краевой задачи для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Ключевые слова: *нагруженное уравнение смешанного типа, спектральный метод, единственность, существование.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + c_1(t)u(x,0) = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + c_2(t)u(x,0) = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \left\{(x,t) : 0 < x < 1,\, -\alpha < t < \beta\right\}$, где α, β — заданные положительные действительные числа, $c_1(t)$, $c_2(t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задача. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u\,(x,\,t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_-\right) \cap C^{2,1}_{x,t}\left(D_+\right); \tag{2}$$

$$Lu\,(x,\,t) \equiv 0, \quad (x,\,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u\,(0,\,t) = \varphi_1(t), \quad u\,(1,\,t) = \varphi_2(t), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u\,(x,\,-\alpha) = \varphi\,(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

2. Единственность решения задачи. Функцию $u(x,t)$ будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin(\pi k x). \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin(\pi k x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Анна Валерьевна Тарасенко, аспирант, каф. высшей математики.

Проводя операции дифференцирования и интегрирования и учитывая однородные граничные условия (4) и равенство (7), получим, что функция $u_k(t)$ имеет вид

$$u_k(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2k^2t}\left[D_k - D_k\int_0^t c_1(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds - \int_0^t f(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds\right], & t>0,\\ A_k\cos(\pi kt) + B_k\sin(\pi kt) + \\ \qquad +\dfrac{1}{\pi k}\displaystyle\int_t^0 [A_kc_2(s) + f(s)]\sin[\pi k(s-t)]\,ds, & t<0, \end{cases} \tag{8}$$

где $f(t) = \sqrt{2}\pi k\,[\cos(\pi k)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]$.

Найдём произвольные постоянные A_k, B_k, D_k. Для функции (8) в силу начального условия (2) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u_k'(0-0) = u_k'(0+0), \quad k\in\mathbb{N}.$$

В результате вычислений получим

$$D_k = A_k, \quad B_k = -A_k\pi k - \frac{A_kc_1(0+0)}{\pi k} - \frac{f(0+0)}{\pi k}.$$

Подставив найденные коэффициенты в уравнение (8), получим

$$u_k(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2k^2t}\left[A_k - A_k\int_0^t c_1(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds - \int_0^t f(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds\right], & t>0,\\ A_k\cos(\pi kt) - A_k\pi k\sin(\pi kt) - A_k\phi_k(t) + \psi_k(t), & t<0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\phi_k(t) = \frac{c_1(0+0)}{\pi k}\sin(\pi kt) - \frac{1}{\pi k}\int_t^0 c_2(s)\sin[\pi k(s-t)]\,ds,$$

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\pi k}\int_t^0 f(s)\sin[\pi k(s-t)]\,ds.$$

Найдём A_k, используя начальное условие (5) и формулу (7):

$$A_k = \frac{\phi_k - \psi_k(-\alpha)}{\delta_\alpha(k)}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

где

$$\delta_\alpha(k) = \cos(\pi k\alpha) + \pi k\sin(\pi k\alpha) - \phi_k(-\alpha) \neq 0. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (9), найдём окончательный вид функции

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\phi_k - \psi_k(-\alpha)}{\delta_\alpha(k)}e^{-\pi^2k^2t}\left[1 - \displaystyle\int_0^t c_1(s)e^{\pi^2k^2s}\,ds\right] - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^t f(s)e^{\pi^2k^2(s-t)}\,ds, & t>0,\\ \dfrac{\phi_k - \psi_k(-\alpha)}{\delta_\alpha(k)}\left[\cos(\pi kt) - \pi k\sin(\pi kt) - \phi_k(t)\right] + \psi_k(t), & t<0. \end{cases} \tag{12}$$

Справедлива теорема единственности решения поставленной задачи.

Теорема 1. *Если* $u(x,t)$ *является решением задачи* (2)–(5), *то оно единственно при выполнении* (11) *при любых* $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — различные решения задачи (2)–(5). Введём функцию $\sigma(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ — решение задачи (2)–(5) с нулевыми начальными условиями:

$$\sigma(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad \varphi(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Следовательно, из формулы (7) при использовании начального условия (5) получаем, что $\varphi_k = 0$. Тогда согласно (12) $\sigma_k(t) = 0$, и из (7) следует

$$\int_0^1 \sigma(x,t)\sin(\pi kx)\,dx = 0. \tag{13}$$

В силу полноты системы синусов в пространстве $L_2[0;1]$ из равенства (13) получаем $\sigma(x,t) = 0$ почти всюду на $[0;1]$, где $t \in [-\alpha;\beta]$. Так как из условия (2) функция $u(x,t)$ непрерывна на множестве $\overline{D}$, то $\sigma(x,t) = 0$ на множестве $\overline{D}$. Отсюда $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$, следовательно, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ на $\overline{D}$, то есть решение единственно. □

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения задачи были доказаны следующие вспомогательные теоремы.

Теорема 2. *Если α является произвольным положительным рациональным числом, то существует $C_0 = const > 0$ такая, что при больших k справедлива оценка*

$$|\delta_\alpha(k)| \geqslant C_0 > 0. \tag{14}$$

Теорема 3. *Если выполнено условие* (14), *тогда при больших k имеют место следующие оценки*:

$$|u_k(t)| \leqslant \begin{cases} M_1|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_2, & t > 0, \\ k\left(M_3|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_4\right), & t < 0; \end{cases}$$

$$|u_k'(t)| \leqslant \begin{cases} k^2\left(M_5|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_6\right), & t > 0, \\ k^2\left(M_7|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_8\right), & t < 0; \end{cases}$$

$$|u_k''(t)| \leqslant k^3\left(M_9|\varphi_k - \psi_k(-\alpha)| + M_{10}\right), \quad t \leqslant 0,$$

где $M_i = const > 0$, $i \in \{1,2,\ldots,10\}$, и зависят от $c_1(t)$, $c_2(t)$, α.

Из формулы (6) почленным дифференцированием составим следующие ряды:

$$u_t(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(t)\sin(\pi kx) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\pi^2k^2u_k(t)\sin(\pi kx) - \\ - \sqrt{2}c_1(t)\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin(\pi kx), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\pi^2k^2u_k(t)\sin(\pi kx), \quad t > 0, \tag{16}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k''(t)\sin(\pi kx) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\pi^2k^2u_k(t)\sin(\pi kx) - \\ - \sqrt{2}c_2(t)\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin(\pi kx), \quad t < 0, \tag{17}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\pi^2k^2u_k(t)\sin(\pi kx), \quad t<0. \tag{18}$$

Ряды (6) и (15)–(18) в силу теоремы 3 мажорируются числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^3\left(M_{11}|\varphi_k-\psi_k(-\alpha)|+M_{12}\right), \tag{19}$$

где $M_{11}>0$, $M_{12}>0$.

Теорема 4. *Если* $\varphi(x)\in C^3[0;1]$ *и на сегменте* $[0;1]$ *имеет кусочно-непрерывную производную четвёртого порядка и* $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0$, *то*

$$\varphi_k=\frac{1}{\pi^4k^4}\varphi_k^{(IV)},$$

где

$$\varphi_k^{(IV)}=\sqrt{2}\int_0^1\varphi^{(IV)}\sin(\pi kx)\,dx.$$

В силу теоремы 4 ряд (18) оценивается сходящимся рядом

$$M_{13}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\varphi_k^{IV}|. \tag{20}$$

В силу сходимости ряда (19) на основании признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (15) и (6) на $\overline{D}$, а ряды (16)–(18) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$.

Следовательно, функция $u(x,t)$, определена рядом (6), удовлетворяет условию (2). Подставляя ряды (6), (14) и (15) в уравнение (1) при $t>0$, а ряды (6), (16) и (17) — в уравнение (1) при $t<0$, убеждаемся в том, что функция (6) является решением уравнения (1) на множестве $\overline{D}_+\cup\overline{D}_+$.

Таким образом, из справедливости теорем 2, 3, 4 доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Если функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4, $c_1(t)\in C[0;\beta]$, $c_2(t)\in C[-\alpha;0]$ *и выполнено условие* (17), *то существует единственное решение задачи* (2)–(5), *и оно определяется рядом* (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // *Дифференц. уравнения*, 1983. — Т. 19, № 1. — С. 86–94.
2. *Сабитов К. Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. — М.: Высш. шк., 2005. — 672 с.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: Наука, 1970. — 656 с.

Поступила в редакцию 01/IX/2010;
в окончательном варианте — 11/X/2010.

MSC: 35M12

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION OF MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN RECTANGULAR AREA

A. V. Tarasenko

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: anyutka757@mail.ru

In work necessary and sufficient conditions of uniqueness of the decision of a regional problem for the loaded equation mixed parabolic hyperbolic type in rectangular area are established. The problem decision is constructed in the form of the number sum on own functions of a corresponding one-dimensional problem on own values.

Key words: *loaded equation of mixed type, spectral method, uniqueness, existence.*

Original article submitted 01/IX/2010;
revision submitted 11/X/2010.

Anna V. Tarasenko, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics.