УДК 517.53

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ НЕУСТОЙЧИВОГО ВЫРОЖДЕННОГО УЗЛА

Ю. Н. Дрозжжинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mails: drozzin@mi.ras.ru, bzavial@mi.ras.ru

Обобщённые функции, обладающие квазиасимптотикой (асимптотикой в слабом смысле) по траекториям, определяемым однопараметрическими группами линейных преобразований аргументов этих функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными по этим группам преобразований. Предельные обобщённые функции однородны по этим группам. Приведено полное описание асимптотически однородных обобщённых функций вдоль траекторий вырожденного узла. Полученные результаты применяются для описания обобщённых функций, однородных вдоль таких траекторий в двумерном случае.

Ключевые слова: обобщённые функции, квазиасимптотика, вырожденный узел, однородные обобщённые функции, асимптотически однородные функции.

Введение. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое пространство (основных) функций ($S(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и т. п.), штрихом сверху обозначаем пространство обобщённых функций (пространство линейных непрерывных функционалов) над пространством соответствующих основных функций. Следуя стандартам, принятым в теории обобщённых функций, обобщённую функцию $f \in \mathcal{F}'$ удобно указывать вместе с аргументом основной функции, и мы пишем $(f(t), \psi(t))$, $\psi(t) \in \mathcal{F}$ вместо (f, ψ) . В такой записи $f(Ut)$, где U — линейное преобразование координат $t \in \mathbb{R}^n$, означает обобщённую функцию, действующую по правилу $(f(Ut), \psi(t)) = \det^{-1} U \cdot (f(t), \psi(U^{-1}t))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $U = \{U_k, k > 0\}$ — мультипликативная, непрерывная, однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}$ — инвариантно относительно U_k ; $\rho(k)$ — положительная непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{F}'$. Мы говорим, что f обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ по группе U , если для любой $\psi(t) \in \mathcal{F}$ и некоторой $g \in \mathcal{F}'$

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \psi(t)). \quad (1)$$

В этом случае говорят, что f асимптотически однородна на $\mathcal{F}$ по группе преобразований $U = \{U_k, k > 0\}$ и пишут $f(t) \in AO_\rho^U(\mathcal{F})$.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{E \ln k}$, где E — некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. В работах [1–5] даётся описание асимптотически однородных обобщённых функций в случае, когда матрица E имеет строго диагональный вид и её собственные значения вещественны и одного

Юрий Николаевич Дрозжжинов (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, отд. математической физики. Борис Иванович Завьялов (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, отд. математической физики.

знака. В этой работе рассматривается важный для приложений случай вырожденного узла, когда жорданова форма матрицы E имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mu & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При этом считаем $\mu > 0$ и говорим об асимптотической однородности на бесконечности. Если для f выполнено соотношение (1) и $g \neq 0$, то функция $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией, см. [6]. Напомним, что положительная непрерывная функция $\rho(k)$ при $k > 0$ называется автомодельной, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha, \quad k \rightarrow \infty$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$. Число α называется *порядком* автомодельности ρ . Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$, участвующей в (1), называется порядком асимптотически однородной обобщённой функции. Заметим, что если $\rho(k)$ в соотношении (1) имеет порядок α , то g является однородной обобщённой функцией степени α , то есть $g(Ukt) = k^\alpha g(t)$, $k > 0$. (Иногда такие функции называют «квазиоднородными» порядка α относительно группы U , см. [7]).

Асимптотически однородные функции обладают совокупностью интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем, а также в различных задачах математической физики (см. [8]). Их описание и свойства хорошо изучены для пространства обобщённых функций из S'_+ — обобщённых функций из S' с носителями на положительной полуоси. Это пространство является двойственным к пространству S_+ — пространству Шварца бесконечно дифференцируемых функций на полуоси. А для того чтобы $f(t) \in S'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -(\alpha + 1)$, что

$$\frac{f^{(-N)}(t)}{t^N \rho(t)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A.$$

Здесь $f^{(-N)}(t)$ — первообразная порядка N .

Первообразная (производная) порядка β для обобщённой функции $f(t) \in S'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(t) = f_\beta(t) * f(t),$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования $f_\beta(t) \in S'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \Theta(t)t^{\beta-1}/\Gamma(\beta), & \text{при } \operatorname{Re} \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t), & \text{при } \operatorname{Re} \beta \leq 0, \operatorname{Re} \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, $\Theta(t)$ — функция Хевисайда (характеристическая функция положительной полуоси $\mathbb{R}_+$).

Основная цель данной статьи — дать подобного рода описание асимптотически однородных обобщённых функций в случае траекторий неустойчивого вырожденного узла. Основным инструментом такого описания служит так называемое *обобщённое сферическое представление* обобщённых функций, которое вводится ниже в п. 1. Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщённых функций вдоль траекторий, определяемых группой $\{U_k, k > 0\}$, к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщённых функций, заданных на специальных пространствах основных функций. В п. 2 даётся описание асимптотически однородных и однородных обобщённых функций в случае, когда матрица генератора группы, определяющей траектории, имеет вид (2).

1. Обобщённое сферическое представление обобщённых функций. Пусть в $\mathbb{R}^n$ действует вещественная непрерывная мультипликативная группа линейных преобразований $U = \{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$. Полагаем, что система координат выбрана таким образом, что матрица E имеет канонический жорданов вид, то есть диагональный вид, состоящий из блока вида (2). Тогда матрица оператора U_k , например, в случае $n = 3$, имеет вид

$$e^{\mu\tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{1}{2!}\tau^2 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \tau = \ln k.$$

Пусть Γ — замкнутая бесконечно гладкая поверхность, охватывающая начало координат и такая, что каждая траектория, определяемая группой U , пересекает эту поверхность только в одной точке и по некасательному направлению. Такие поверхности будем называть *допустимыми*. Нетрудно показать, что класс допустимых поверхностей не пуст, в частности, в качестве такой поверхности можно взять достаточно сжатый по некоторым осям эллипсоид. Введём обобщённые сферические координаты по формуле

$$t = U_r e, \quad e \in \Gamma, \quad r > 0. \quad (3)$$

Пусть функция $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, тогда при преобразовании (3) она перейдёт в функцию $\psi(r, e) = \varphi(U_r e)$. Это отображение обозначим ζ , так что

$$\zeta : \varphi \mapsto \psi(r, e) = \varphi(U_r e), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in \Gamma. \quad (4)$$

Для того чтобы описать образ отображения ζ и обосновать соответствующую замену переменных для обобщённых функций, нам понадобится ввести специальные пространства основных и обобщённых функций.

Пусть J — не более чем счётное (может быть пустое) множество чисел λ , такое, что на каждой полупрямой $\{x < a : a \in \mathbb{R}\}$ содержится лишь конечное число точек. Каждому такому $\lambda \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие целое неотрицательное число $n(\lambda) \in \mathbb{Z}_+$. Множества таких пар чисел $(\lambda, n(\lambda))$ будем обозначать $\bar{J}$ и называть *допустимыми множествами*. Условимся считать, что пара $(\lambda, n(\lambda)) \notin \bar{J}$, если $n(\lambda) < 0$.

Обозначим через $S_{\bar{J}}$ пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для некоторых постоянных $C_{\lambda,m}$, зависящих от ψ , и любого $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} [\psi(r) - \bar{\Omega}_N^J[\psi](r)] &\in C^N([0, +\infty)), \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r) - \bar{\Omega}_N^J[\psi](r)] \Big|_{r=0} = 0, \\ \ell = 0, 1, \dots, N, \quad \text{где} \quad \bar{\Omega}_N^J[\psi](r) &= \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r, \quad (5) \\ \left(\text{всюду далее полагаем} \quad \Omega_N^J[\psi](r) &= \sum_{\substack{\lambda < N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r \right). \end{aligned}$$

Топологию на $S_{\bar{J}}$ зададим с помощью системы норм

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leq \ell \leq N} \sup_{r > 0} (1+r)^N \left| \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r) - \eta(r)\bar{\Omega}_N^J[\psi](r)] \right| + \\ + \max_{\substack{\lambda \leq N, \lambda \in J \\ m \leq n(\lambda)}} |C_{\lambda,m}|. \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, финитна и равна 1 в некоторой окрестности нуля. Ясно, что топология на $S_{\bar{J}}$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами. Пространство $S_{\bar{J}}$ — пространство Фреше.

У функций $\bar{\Omega}_N^J$ и Ω_N^J верхний индекс J мы будем иногда опускать, если из контекста ясно, о чём идёт речь. Отметим также, что $S_{\bar{J}}$ инвариантно относительно растяжений аргумента. В частности, если J — пустое множество (обозначим его как $J_\emptyset$), то $S_{J_\emptyset} \subset S_{\bar{J}}$ для любого допустимого множества $\bar{J}$ и состоит из функций из S_+ , имеющих нуль в начале координат бесконечного порядка. Если $J = \mathbb{Z}_+$ и $n(\lambda) = 0, \lambda \in \mathbb{Z}_+$, то $S_{\bar{J}} = S_+$.

Пусть Γ — допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными и соответствующими стандартными нормами:

$$Q_N\{\psi(e)\}, \quad \psi(e) \in S(\Gamma), \quad N = 0, 1, \dots$$

Положим $W_{\bar{J}} = S_{\bar{J}} \otimes S(\Gamma)$ (проективное тензорное произведение пространств $S_{\bar{J}}$ и $S(\Gamma)$). Пространство $W_{\bar{J}}$ может быть реализовано как пространство функций $\psi(r, e)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $e \in \Gamma$ бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$ таких, что

$$\begin{aligned} \psi(r, e) - \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r &\in C^N([0, +\infty)) \times S(\Gamma), \\ \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r, e) - \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r \right] &\Big|_{r=0} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $0 \leq \ell \leq N$, $N = 0, 1, \dots$ и $C_{\lambda, m}(e) \in S(\Gamma)$, $\lambda \in J$. Введём обозначение

$$\bar{\Omega}_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\lambda \leq q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad \Omega_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\lambda < q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad (6)$$

где

$$\omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r.$$

Топология на $W_{\bar{J}}$ задаётся с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leq \ell \leq N} \sup_{r > 0} Q_N \left\{ (1+r)^N \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell [\psi(r, e) - \eta(r) \bar{\Omega}_N[\psi](r, e)] \right\} + \\ + \max_{\operatorname{Re} \lambda \leq N, \lambda \in J} Q_N \{C_{\lambda, m}(e)\}.$$

Заметим, что топология на $W_{\bar{J}}$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с описанными выше свойствами. Кроме того, для $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$ имеет место асимптотическое равенство

$$\psi(r, e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r = \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad r \rightarrow 0$$

в том смысле, что для любого $M \in \mathbb{Z}_+$ существует $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\ell Q_M \{ \psi(r, e) - \bar{\Omega}_N[\psi](r, e) \} = O(r^M), \quad r \rightarrow 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть каждой паре $(\lambda, n(\lambda)) \in \bar{J}$ поставлены в соответствие конечномерное линейное подпространство $\mathcal{E}_\lambda \in S(\Gamma)$ и нильпотентный линейный оператор A_λ , так что $A_\lambda^{n(\lambda)+1} \varphi \equiv 0$ при $\varphi \in \mathcal{E}_\lambda$. Кроме того, если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in J$, то $\mathcal{E}_{\lambda_1} \cap \mathcal{E}_{\lambda_2} = \{0\}$.

Определим в $W_{\bar{J}}$ подпространство, полагая

$$V_{\bar{J}, \mathcal{F}} = \left\{ \psi(r, e) \in W_{\bar{J}} : C_{\lambda, 0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, C_{\lambda, m}(e) = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda, 0}(e) \right\},$$

где $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda : \lambda \in J\}$, и $m = 0, 1, \dots, n(\lambda)$. Топология в $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ наследуется топологией $W_{\bar{J}}$. Нетрудно видеть, что $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ — замкнутое подпространство пространства $W_{\bar{J}}$.

Пусть $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$. Найдём её асимптотическое разложение в обобщённых сферических координатах при $r \rightarrow +0$. Как обычно, если $j = (j_1, \dots, j_n)$ — мультииндекс, то

$$j! = j_1! \cdots j_n!; \quad |j| = j_1 + \cdots + j_n \quad \text{и} \quad \varphi^{(j)}(t) \equiv D^j \varphi(t) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_n^{j_n}} \varphi(t).$$

Имеем

$$\varphi(t) \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j t^j, \quad |t| \rightarrow 0. \quad (7)$$

Отметим, что $E = \Lambda + \mathcal{N}$, где Λ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа μ из (2), а в матрице $\mathcal{N}$ — все нули, кроме единиц, стоящих над главной диагональю. Условимся далее через

$$\sigma = (\mu, \dots, \mu, \dots, \mu), \quad |\sigma| = n\mu \quad (8)$$

обозначать вектор, у которого компоненты есть числа, стоящие на главной диагонали матрицы Λ .

В обобщённых сферических координатах асимптотическое разложение (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(U_r e) &\sim \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j \prod_{k=1}^n (U_r e)_k^{j_k} = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j \prod_{k=1}^n (e^{\Lambda \tau} e^{\tau \mathcal{N}} e)_k^{j_k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j e^{(\sigma, j) \tau} \prod_{k=1}^n (e^{\tau \mathcal{N}} e)_k^{j_k}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tau = \ln r$. Положим $J = \mu \mathbb{Z}_+$. Из (9) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(U_r e) &\sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda G_\lambda(e^{\tau \mathcal{N}} e) = \\ &= \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \left[C_{\lambda, 0}(e) + \tau C_{\lambda, 1}(e) + \dots + \tau^{n(\lambda)} C_{\lambda, n(\lambda)}(e) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $n(\lambda)$ — некоторые целые числа, а

$$C_{\lambda, 0}(e) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma, j) = \lambda}} a_j e^j.$$

Вводя операторы A_λ, A_λ^+ формулами

$$\begin{aligned} A_\lambda P(e) &= \text{grad } P(e) \mathcal{N} e = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial P(e)}{\partial e_k} \varepsilon_{k\ell} e_\ell, \\ A_\lambda^+ P(e) &= \text{grad } P(e) \mathcal{N}^\top e = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial P(e)}{\partial e_k} \varepsilon_{\ell k} e_\ell, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\varepsilon_{k\ell}$ — элементы матрицы $\mathcal{N}$, из (10) получаем

$$C_{\lambda, m}(e) = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda, 0}(e), \quad m = 1, 2, \dots, n(\lambda).$$

Отсюда следует, что $A_\lambda^{n(\lambda)+1}C_{\lambda,0}(e) = 0$. Каждому $\lambda \in J$ поставим в соответствие подпространство $\mathcal{E}_\lambda = \text{Lin}\left\{e^j = e_1^{j_1} \cdot \dots \cdot e_n^{j_n} \Big|_\Gamma : (\sigma, j) = \lambda\right\}$, где вектор σ определен в (8). Нильпотентный оператор A_λ в $\mathcal{E}_\lambda$ определим формулой (11).

Полагая теперь $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda, \lambda \in J\}$, строим соответствующее подпространство $V_{\bar{J}, \mathcal{F}} \subset W_{\bar{J}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Отображение ζ , определяемое формулой (4), осуществляет изоморфизм пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, тогда обобщённая функция $f_s(r, e)$, определяемая формулой

$$(f_s(r, e), \psi(r, e)) = (f(t), \varphi(t)), \quad \text{где } \varphi(t) = \varphi(\mu(r, e)) = \psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}},$$

принадлежит $V'_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. По теореме Хана—Банаха мы можем продолжить f_s на все $W_{\bar{J}}$. Обозначим это продолжение $F(r, e)$ и назовём его *обобщённым сферическим представлением* функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, так что

$$(F(r, e), \psi(r, e)) = (f_s, \psi(r, e)), \quad \forall \psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}.$$

Отметим, что обобщённое сферическое представление $F(r, e)$ функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется неоднозначно. Введём в $S_{\bar{J}}$ и $W_{\bar{J}}$ специальные обобщённые функции, обобщающие обычные дельта-функции, их производные и функции x_+^λ (см. [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для каждого $\lambda \in J$ и $m=0, 1, \dots, n(\lambda)$, и любой $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ определим обобщённые функции $\Delta_{\lambda, m}(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $\Delta_{\lambda, m}(r)\Phi(e) \in W'_{\bar{J}}$ по формулам

$$\begin{aligned} (\Delta_{\lambda, m}(r), \psi(r)) &= C_{\lambda, m}, \quad \psi \in S_{\bar{J}}, \\ (\Delta_{\lambda, m}(r)\Phi(e), \psi(r, e)) &= (\Phi(e), C_{\lambda, m}(e)), \quad \psi \in W_{\bar{J}}, \end{aligned}$$

где $C_{\lambda, m}(e)$ берётся из (10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество и число $\beta \in \mathbb{C}$, такое, что $-\beta - 1 \notin J$. Тогда существует единственное однородное степени β продолжение r^β с S_{J_0} на $S_{\bar{J}}$. Это продолжение даётся формулой

$$(r_{\bar{J}}^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int_0^\infty r^\beta (\varphi(r) - \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\varphi](r)) dr, & \text{если } -\text{Re } \beta - 1 \notin J; \\ \left(\frac{-1}{\text{Im } \beta}\right)^{n(-\text{Re } \beta - 1)} \int_0^\infty r^\beta D_{-\text{Re } \beta - 1} (\varphi(r) - \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\varphi](r)) dr, & \text{если } -\text{Re } \beta - 1 \in J, \end{cases}$$

где $\Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\varphi](r)$ определено в (5), а $D_\lambda = r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right)^{n(\lambda)+1} r^{-\lambda}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\bar{J} \subset \bar{J}_1$, $-\beta - 1 \notin J_1$, то $r_{\bar{J}_1}^\beta$ совпадает с $r_{\bar{J}}^\beta$ на $S_{\bar{J}}$. Это позволяет писать r_+^β вместо $r_{\bar{J}}^\beta$. Обобщённая функция $r_+^\beta \in S'_{\bar{J}}$ мероморфна по $\beta \in \mathbb{C}$ и имеет в точках $\beta = -\lambda - 1$, $\lambda \in J$ полюса порядка $n(\lambda) + 1$.

Отметим, что r_+^β в пространстве S'_+ подробно изучена в [9].

Пусть $F(r, e)$ — обобщённое сферическое представление для обобщённой функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r, e), \varphi(U_r e)), \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (f(U_k t), \varphi(t)) &= \frac{1}{\det U_k} (f(t), \varphi(U_{1/k} t)) = \\ &= \frac{1}{\det U_k} (F(r, e), \varphi(U_{r/k} e)) = \frac{k}{\det U_k} (F(kr, e), \varphi(U_r e)). \end{aligned}$$

Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α . Для того чтобы обобщённая функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ по группе преобразований $U = \{U_k, k > 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы её обобщённое сферическое представление $F(r, e)$ было асимптотически однородным на бесконечности относительно $\rho_1(k)$ на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$, то есть $F(r, e) \in AO_{\rho_1}(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$, где $\rho_1(k) = k^{-1} \det U_k \rho(k) = k^{(n-1)\mu} \rho(k)$.

Так что для описания класса $AO_{\rho}^U(S(\mathbb{R}^n))$ достаточно описать класс асимптотически однородных обобщённых функций на пространствах $V_{\bar{J}, \mathcal{F}} \subset W_{\bar{J}}$.

2. Асимптотически однородные обобщённые функции. Здесь даётся описание асимптотически однородных обобщённых функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой $\{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$ линейных преобразований $\mathbb{R}^n$. В жордановом представлении матрица инфинитесимального оператора этой группы имеет стандартную жорданову форму (2). Обозначим через

$$\{V_k = e^{\Lambda \ln k}, k > 0\}, \quad \Lambda = \mu I$$

однопараметрическую группу. Здесь I — единичная матрица, а $\det V_k = k^{n\mu}$. В этом случае, как уже отмечалось, $J = \mu \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\mathcal{P}$ — пространство многочленов в $\mathbb{R}^n$. Каждому λ из J соответствует подпространство многочленов, однородных относительно группы $\{V_k, k > 0\}$ степени λ :

$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{ P(e)|_{e \in \Gamma} : P(e) \in \mathcal{P}, P(V_k e) = k^\lambda P(e) \right\}, \quad \lambda \in J. \quad (12)$$

Заметим, что в базисе, где E имеет жорданову форму,

$$P(e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ (\sigma, j) = \lambda}} a_j e^j, \quad e \in \mathbb{R}^n, \quad e^j = e_1^{j_1} \cdot \dots \cdot e_n^{j_n}.$$

Ранее, см. (11), на $\mathcal{E}_\lambda$ мы определили нильпотентные операторы A_λ и A_λ^+ . Там мы неявно воспользовались тем фактом, что многочлен, однородный относительно группы $\{V_k, k > 0\}$ степени λ , однозначно восстанавливается по

своим значениям на допустимой поверхности Γ . Формулы (11) в действительности правильно было бы написать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\lambda \left[P(e) \Big|_{e \in \Gamma} \right] &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left[e_\ell \varepsilon_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) \right]_{e \in \Gamma}, \\ A_\lambda^+ \left[P(e) \Big|_{e \in \Gamma} \right] &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left[e_\ell \varepsilon_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) \right]_{e \in \Gamma}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varepsilon_{k,\ell}$ — компоненты нильпотентной матрицы $\mathcal{N}$.

Операторы A_λ и A_λ^+ можно продолжить на всё $S(\Gamma)$. Для этого введём следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть заданы однопараметрическая группа V , допустимая поверхность Γ и число $\lambda \in \mathbb{R}$. Для любой $\varphi(e) \in S(\Gamma)$ определим оператор продолжения (continuation) $\text{cont}_{V,\lambda}[\varphi(e)](t)$ как однородное относительно группы V степени λ продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ясно, что

$$\text{cont}_{V,\lambda}[\varphi(e)](t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi(e)](V_k t) = k^\lambda \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi(e)](t).$$

В частности, отметим, что если $t = V_s e$, $s > 0$, $e \in \Gamma$, то, разрешая это соотношение относительно s и e , однородное продолжение можно записать так:

$$\text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](t) = s^\lambda(t) \varphi(e(t)).$$

Теперь вместо формул (13) можно записать

$$\begin{aligned} A_\lambda \varphi(e) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n e_\ell \varepsilon_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial e_k} \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e), \\ A_\lambda^+ \varphi(e) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n e_\ell \varepsilon_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial e_k} \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть заданы однопараметрическая группа V , допустимая поверхность Γ , число $\lambda \in \mathbb{R}$ и обобщённая функция $f(e) \in S'(\mathbb{R}^n)$, у которой $\text{supp } f$ ограничен и отделен от нуля. Для любой $\varphi(e) \in S(\Gamma)$ положим

$$(\text{rest}_{V,\lambda}[f](e), \varphi(e)) = (f(e), \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e)).$$

ПРИМЕР. Пусть i — мультииндекс, $(\sigma, i) = \lambda$. Покажем, что обобщённым сферическим представлением обобщённой функции $\delta^{(i)}(t)$ является

$$F(r, e) = \text{rest}_{V,\lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0) \right] (e) \Delta_{\lambda,0}(r).$$

Действительно, учитывая, что

$$C_{\lambda,0}(e) = \sum_{(\sigma,j)=\lambda} \frac{1}{j!} \varphi^j(0) e^j,$$

для любой $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r, e), \varphi(U_r e)) &= \left(\text{rest}_{V, \lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0) \right] (e), C_{\lambda, 0}(e) \right)_e = \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0), \text{cont}_{V, \lambda} \left[\sum_{(\sigma, j) = \lambda} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) e^j \right] (t) \right) = \\ &= \left(\delta^{(i)}(t - t_0), \sum_{(\sigma, j) = \lambda} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) (t)^j \right) = (-1)^{|i|} \varphi^{(i)}(0). \end{aligned}$$

Напомним, что если $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель, то её моменты определяются по формуле

$$M_j[f] = (f(t), t^j), \quad j \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (14)$$

ЛЕММА 1. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } f$ — компакт. Тогда для любого целого $L > 0$ существует $Q \in \mathbb{Z}_+$ такое, что если

$$M_j[f] = 0, \quad |j| < Q, \quad (15)$$

то найдётся такой её обобщённый сферический представитель $F(r, e)$, что

$$M_{\lambda, m}[F](e) = (F(r, e), r^\lambda \ln^m r) \equiv 0 \quad \text{в} \quad S'(\Gamma) \quad (16)$$

при $\lambda \in J$, $|\lambda| < L$, $m = 0, 1, \dots, n(\lambda)$.

Обратно, для любого целого Q существует L такое, что если выполнено (16), то имеет место (15).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $f_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный носитель и $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α . Нетрудно показать, что если $M_j[f_0] = 0$, для всех $|j| \leq -\alpha/\mu - n$, то обобщённая функция f_0 обладает тривиальной квазиасимптотикой по группе $\{U_k, k > 0\}$ относительно $\rho(k)$.

Описание асимптотически однородных обобщённых функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$, в некритическом случае даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α , причём $-\alpha - n\mu \notin \mu\mathbb{Z}_+$, число $L > -\alpha/\mu - n$ и число $\varkappa$ такое, что $-(\alpha + n\mu + \varkappa) \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^U(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t),$$

где f_0 и f_1 удовлетворяют следующим условиям.

Обобщённая функция $f_0(t)$ имеет компактный носитель и $M_j[f_0] = 0$ при $|j| \leq L$.

Существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$, непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+n\mu+\varkappa-1} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty,$$

с некоторой обобщённой функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие что

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\varkappa} (\varphi(U_r e) - \Omega_{-(\alpha+n\mu)}[\varphi(U_r e)](r, e)) \right) \right)_e dr.$$

При этом для любой $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(U_k t), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^N \frac{\Gamma(\alpha + n\mu + \varkappa + N)}{\Gamma(\alpha + n\mu + \varkappa)} \left(r_+^{\alpha+n\mu-1} B(e), \varphi(U_r e) \right).$$

Здесь $\Omega_q[\varphi(U_r e)](r, e)$ определяется формулой (6).

Здесь и всюду далее нижний индекс e у $(\Phi(e), \psi(r, e))_e$ означает значение обобщённой функции $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ на функции $\psi(r, e)$, рассматриваемой как основной из $S(\Gamma)$ при фиксированном r .

В критическом случае имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α , причём $-(\alpha + n\mu) \in \mu\mathbb{Z}_+$, число $L > -\alpha/\mu - n$, $t_0 \in \Gamma$ и число $\varkappa$ такое, что $-(\alpha + n\mu + \varkappa) \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^U(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t),$$

где f_0 , f_1 и f_2 удовлетворяют следующим условиям.

Функция $f_0(t)$ имеет компактный носитель и $M_j[f_0] = 0$ при $|j| \leq L$.

Существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$, непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+n\mu+\varkappa-1} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty$$

с некоторой обобщённой функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, и условию

$$(\gamma(r, e), \psi(e)) \equiv 0 \quad \text{в } S'_j, \quad \forall \psi(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-n\mu},$$

такие, что для любой $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\varkappa} (\varphi(U_r e) - \Omega_{-(\alpha+n\mu)}[\varphi(U_r e)](r, e)) \right) \right)_e dr.$$

$A(f_2(t), \varphi(t))$ определяется как линейная комбинация по всем полиномам $P(e)$, пробегающим некоторый базис в $\mathcal{E}_{-\alpha-n\mu}$, слагаемых вида

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} \times \\ & \times \left(\text{rest}_{V, -(\alpha+n\mu)} \left[\left((A^+ P) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - r^{-\alpha-n\mu} \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{\alpha+n\mu} P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \delta(t - t_0) \right] (e), \right. \\ & \left. (\varphi(U_r e) - \Omega_{-(\alpha+n\mu)}[\varphi(U_r e)](r, e)) \right)_e dr, \quad (17) \end{aligned}$$

где непрерывная функция $\gamma(r)$, зависящая от λ и полинома $P(e)$, удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\gamma(r) \sim br^{N+n\mu+\kappa-1}\rho(r), \quad r \rightarrow +\infty$$

с некоторой постоянной b , зависящей от γ .

Из этих теорем нетрудно вывести описание однородных обобщённых функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k, k > 0\}$.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы обобщённая функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ была однородной степени α относительно траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k = e^{E\tau}, \tau = \ln k, k > 0\}$, в которой матрица E определена как (2), необходимо и достаточно, чтобы $f(t)$ представлялась следующим образом:

1) если $-\alpha \notin \mu t$, $t = n, n+1, \dots$, то

$$(f(t), \psi(t)) = (r_+^{\alpha+n\mu-1}\Psi(e), \psi(U_re)), \quad \psi(t) \in S(\mathbb{R}^n), \quad r > 0, \quad e \in \Gamma,$$

где Γ — допустимая поверхность и $\Psi(e) \in S'(\Gamma)$;

2) если $-\alpha \in \mu t$, $t = n, n+1, \dots$, то

$$\begin{aligned} (f(t), \psi(t)) = & (r_+^{\alpha+|\mu|-1}\Phi(e), \psi(U_re)) + \\ & + \left(r_+^{\alpha+|\mu|-1}, \left(\text{rest}_{V, -(\text{Re } \alpha + |\mu|)} \left[\left((A_{-\alpha-|\mu|}^+ P) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - r^{-\alpha-|\mu|} \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{\alpha+|\mu|} P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \delta(t-t_0) \right) (e), \psi(U_re) \right)_e, \end{aligned} \quad (18)$$

где многочлен $P(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-n\mu}$, а обобщённая функция $\Phi \in S'(\Gamma)$ удовлетворяет условию

$$(\Phi(e), \varphi(e)) = 0, \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-n\mu}.$$

Здесь $\mathcal{E}_{-\alpha-n\mu}$ определено в (12), t_0 — любая фиксированная точка на Γ , а сужение обобщённой функции с $S(\mathbb{R}^n)$ на $S(\Gamma)$, однородное степени $-\alpha - n\mu$ относительно однопараметрической группы $\{V_k, k > 0\}$ при каждом фиксированном r , даётя определением 6. Оператор $A_{-\alpha-n\mu}^+$ определён в (14).

Отметим, что если $A_{-\alpha-n\mu}^+ P(e) = 0$, то, как нетрудно сосчитать, второе слагаемое в (18) равно $(P(\partial/\partial t)\delta(t), \psi(t))$. Отсюда легко вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Всякая обобщённая функция, сосредоточенная в начале координат и однородная относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ степени α , имеет вид $P(\partial/\partial t)\delta(t)$. Здесь $P(e)$ — многочлен однородный степени $-\alpha - n\mu$ относительно группы $\{V_k, k > 0\}$ (то есть многочлен, имеющий в жордановых координатах вид $\sum_{|j|=-\alpha/\mu-n} a_j e^j$), такой, что

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n e_{\ell\epsilon_{\ell,k}} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) = 0,$$

где $\varepsilon_{k,\ell}$ — матричные элементы нильпотентной части матрицы E .

Отметим, что если обобщённая функция однородна порядка α относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ и сосредоточена в начале координат, то обязательно $-\alpha/\mu - n \in \mathbb{Z}_+$.

В заключение опишем все асимптотически однородные и однородные обобщённые функции порядка $\alpha = -3$ в случае неустойчивого вырожденного двумерного узла ($n = 2$). Далее для простоты считаем $\mu = 1$. В этом случае

$$U_r = \begin{pmatrix} r & r \ln r \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad V_r = rI,$$

где I — единичная матрица, $|\sigma| = 2$, $\mathcal{E}_1 = \text{Lin}\{e_1, e_2\}$, $A_1^+ = e_1(d/de_2)$. Для $\psi(t_1, t_2) \in S(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\psi(U_r e) = \psi(re_1 + r \ln re_2, re_2), \quad e = (e_1, e_2) \in \Gamma.$$

Выбирая $t_0 = e^0 = (1, 0) \in \Gamma$ и считая без ограничения общности, что в малой окрестности точки t_0 $\Gamma = \{e : e_1 = 1, |e_2| < \varepsilon\}$, в качестве локальной координаты положим переменную e_2 . Теперь для любой $\varphi(e_2) \in C^\infty$ имеем $\text{cont}_{V,1}[\varphi(e_2)](t_1, t_2) = t_1 \varphi(t_2/t_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\text{rest}_{V,1} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \delta(t - t_0) \right] (e_2), \varphi(e_2) \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \delta(t - t_0), t_1 \varphi \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \right) = \\ &= -\varphi(0) = (-\delta(e_2), \varphi(e_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{rest}_{V,1} \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \delta(t - t_0) \right] (e_2), \varphi(e_2) \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \delta(t - t_0), t_1 \varphi \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \right) = \\ &= -\varphi'(0) = (\delta'(e_2), \varphi(e_2)). \end{aligned}$$

Для произвольного многочлена $P(e) = ae_1 + be_2$, $A_1^+ P(e) = be_1$. Теперь, учитывая, что $\Omega_1[\psi](r, e) = \psi(0, 0)$ запишем соотношение (17) в виде

$$\begin{aligned} a \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^\alpha (\varphi(0, 0) - \varphi(r, 0) + r\varphi_{t_1}(r, 0)) dr + \\ + b \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^\alpha (\varphi(0, 0) - \varphi(r, 0) + \\ + r\varphi_{t_1}(r, 0) + r^2\varphi_{t_1 t_2}(r, 0) + r^2 \ln r \varphi_{t_1 t_1}(r, 0)) dr. \end{aligned}$$

Найдём теперь общий вид однородных обобщённых функций в этом случае. Для второго слагаемого в соотношении (18) имеем

$$\begin{aligned} a(r_+^{-2}, -\psi(r, 0) + r\psi_{t_1}(r, 0)) + \\ + b(r_+^{-2}, -\psi(r, 0) + r\psi_{t_1}(r, 0) + r^2\psi_{t_1 t_2}(r, 0) + r^2 \ln r \psi_{t_1 t_1}(r, 0)) = \\ = (a + b)\psi_{t_1}(0, 0) + b \int_0^\infty (\ln r \psi_{t_1 t_1}(r, 0) + \psi_{t_1 t_2}(r, 0)) dr = \end{aligned}$$

$$= (a + b)\psi_{t_1}(0, 0) + b\left(\int_0^\infty \ln r \psi_{t_1 t_1}(r, 0) dr - \psi_{t_2}(0, 0)\right).$$

Здесь мы учли, интегрируя по частям, что

$$\begin{aligned} (r_+^{-2}, -\psi(r, 0) + r\psi_{t_1}(r, 0)) &= \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} (-\psi(r, 0) + r\psi_{t_1}(r, 0) + \psi(0, 0)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^\infty (\psi(r, 0) - \psi(0, 0)) d\frac{1}{r} + \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r} d\psi(r, 0) \right] = -\psi_{t_1}(0, 0). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что любая однородная обобщённая функция $f(t_1, t_2) \in S'(\mathbb{R}^2)$ степени -3 неустойчивого вырожденного узла имеет вид

$$\begin{aligned} (f(t), \psi(t)) &= (r_+^{-2}\Phi(e), \psi(U_r e)) + c_1(\delta_{t_1}(t), \psi(t)) + \\ &+ c_2\left(\int_0^\infty \psi_{t_1 t_1}(r, 0) \ln r dr + (\delta_{t_2}(t), \psi(t))\right). \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$, причём

$$(\Phi(e), e_1) = (\Phi(e), e_2) = 0, \quad (e_1, e_2) \in \Gamma.$$

Интересно заметить, что обобщённая функция в (19), стоящая в скобках, не сосредоточена в нуле, причем каждое из слагаемых, стоящих в скобках, не является однородной обобщённой функцией, в то время как их сумма таковой является.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00178) и гранта президента РФ (НШ-7675.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дрожжин Ю. Н., Завьялов Б. И. Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований // *Матем. сб.*, 2009. Т. 200, № 6. С. 23–66; англ. пер.: Drozhzhinov Yu. N. Zav'yalov B. I. Generalized functions asymptotically homogeneous along special transformation groups // *Sb. Math.*, 2009. Vol. 200, no. 6. Pp. 803–844.
2. Дрожжин Ю. Н., Завьялов Б. И. Асимптотически квазиоднородные обобщённые функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых квазиоднородные многочлены // *Докл. РАН*, 2009. Т. 426, № 3. С. 300–303; англ. пер.: Drozhzhinov Yu. N. Zav'yalov B. I. Asymptotically homogeneous generalized functions at zero and convolution equations with kernels quasi-homogeneous polynomial symbols // *Dokl. Math.*, 2009. Vol. 79, no. 3. Pp. 356–359.
3. Дрожжин Ю. Н., Завьялов Б. И. Асимптотически квазиоднородные обобщённые функции // *Докл. РАН*, 2008. Т. 421, № 2. С. 157–161; англ. пер.: *Asymptotically quasihomogeneous generalized functions* // *Dokl. Math.*, 2008. Vol. 78, no. 1. Pp. 503–507.
4. Дрожжин Ю. Н., Завьялов Б. И. Асимптотически однородные обобщённые функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах // *Изв. РАН. Сер. математ.*, 2006. Т. 70, № 6. С. 45–92; англ. пер.: Drozhzhinov Yu. N. Zav'yalov B. I. Asymptotically homogeneous generalized functions and boundary properties of functions holomorphic in tubular cones // *Izv. Math.*, 2006. Vol. 70, no. 6. Pp. 1117–1164.
5. Дрожжин Ю. Н., Завьялов Б. И. Асимптотически однородные обобщённые функции в сферическом представлении и некоторые применения // *Докл. РАН*, 2005. Т. 405, № 1. С. 18–21; англ. пер.: Drozhzhinov Yu. N. Zav'yalov B. I. Asymptotically homogeneous generalized functions in spherical representation and applications // *Dokl. Math.*, 2005. Vol. 72, no. 3. Pp. 839–842.

6. *Seneta E.* Regularly varying functions / Lecture Notes in Mathematics. Vol. 508. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1976. 112 pp.; русск. пер.: *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.
7. *von Grudzinski O.* Quasihomogeneous Distributions / North-Hollandmathematics studies. Vol. 165. Amsterdam: North-Holland, 1991. 449 pp.
8. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций. М.: Наука, 1986. 304 с. [*Vladimirov V. S., Drozhzhinov Yu. N., Zav'yalov B. I.* Multidimensional Tauberian theorems for generalized functions. Moscow: Nauka, 1986. 304 pp.]
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматлит, 1959. 470 с. [*Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized functions and calculations with them. Issue 1. Moscow: Fizmatlit, 1959. 470 pp.]

Поступила в редакцию 15/XII/2010;
в окончательном варианте — 26/II/2011.

MSC: 46F12; 44A10, 40E05

GENERALIZED FUNCTIONS ASYMPTOTICALLY HOMOGENEOUS ALONG THE UNSTABLE DEGENERATED NODE

Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav'yalov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mails: drozzin@mi.ras.ru, bzavial@mi.ras.ru

The generalized functions which have quasiasymptotics along the trajectories of one-parametric group are called asymptotically homogeneous. The corresponding limit functions are homogeneous with respect to this group. In this paper we give the full description of asymptotically homogeneous generalized functions along the trajectories of unstable degenerated node. The obtained results are applied for description of homogeneous generalized functions for such trajectories in two dimensional case.

Key words: *distributions, quasiasymptotics, degenerate node, homogeneous generalized functions, asymptotically homogeneous functions.*

Original article submitted 15/XII/2010;
revision submitted 26/II/2011.

Yuriy N. Drozhzhinov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics. *Boris I. Zav'yalov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.