Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 268–271

УДК 517.95

ОЦЕНКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики – процессов управления,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 35.

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

В ограниченной области с достаточно гладкой границей рассматриваются основные краевые задачи для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. Собственными значениями задачи называют те значения параметров, для которых соответствующая задача имеет ненулевое решение. В данной работе рассматривается проблема существования решений задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями, получены оценки дифференциального оператора для исследуемых задач.

Ключевые слова: *краевые задачи, уравнения эллиптического типа, спектральный параметр, разрывная нелинейность, оценки дифференциального оператора.*

Рассматривается вопрос существования ненулевых решений задачи

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x)u_{x_i}\big)_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g\big(x, u(x)\big), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu\big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

в зависимости от параметра λ. Здесь L — равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; функция $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима [1] и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall\ u \in \mathbb{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf_{\eta \to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta \to u} g(x,\eta)$; граничное условие (2) имеет вид: либо условие Дирихле $u(x)|_{\Gamma} = 0$, либо условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial n_L}(x)|_{\Gamma} = 0$ с конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n, x_j)$, n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n, x_j)$ — направляющие косинусы нормали n, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_{\Gamma} = 0$, функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ.

В зависимости от вида граничного условия (2) определим пространство X. Пусть $X = \mathbf{H}^1_{\circ}(\Omega)$, если (2) — граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (2) — граничное условие Неймана или третье краевое условие. Сопоставим краевой задаче (1)–(2) функционал J^{λ}, определённый на X следующим образом: $J^{\lambda}(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u)$,

Дмитрий Константинович Потапов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия;

$$J_2(u) = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g(x,s)ds.$$

Положим $U = \{u_0 \in X : J_2(u_0) > 0\}$.

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Назовём $u \in \mathbb{R}$ *прыгающим разрывом* функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s\to u\pm} f(s)$.

Определение 2. *Сильным решением* задачи (1)–(2) называется функция $u \in \mathbf{W}_r^2(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 3 [2]. *Полуправильным решением* задачи (1)–(2) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x,\,\cdot\,)$.

Определение 4. Число λ называется *собственным значением* задачи (1)–(2), если существует сильное решение u задачи (1)–(2), отличное от нулевого. При этом u называют *собственной функцией* задачи (1)–(2), соответствующей λ.

Согласно результатам работ [3–6] имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $J_1(u) \geqslant 0 \ \ \forall u \in X$;
2) *для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $g(x,\,\cdot\,)$ *имеет только прыгающие разрывы,* $g(x,0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, *где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, *фиксирована*;
3) *найдётся* $u_0 \in X$, *для которого* $J_2(u_0) > 0$;
4) *если пространство* $N(L)$ *решений задачи*

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u\in N(L),\ ||u||\to+\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Тогда существует $0 < \lambda_0 \leqslant \inf\limits_{u_0\in U}\frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$ *такое, что* $\forall\ \lambda > \lambda_0$: $\inf\limits_{v\in X} J^{\lambda}(v) < 0$, *и найдется* $u \in X$, *для которого*

$$J^{\lambda}(u) = \inf_{v\in X} J^{\lambda}(v), \tag{3}$$

и любое u, удовлетворяющее (3), является ненулевым полуправильным решением задачи (1)–(2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 3), 4) *теоремы* 1 *и дополнительно следующие условия*:

1$'$) *для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$, и для некоторой $a \in \mathbf{L}_{2n/(n+2)}(\Omega)$ справедливо неравенство $|g(x,u)| \leqslant a(x)\ \ \forall u \in \mathbb{R}$;*

2$'$) *для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x,\cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I — не более чем счётно), и если $g(x,u_i-) > g(x,u_i+)$, то $g(x,u_i-) \times g(x,u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.*

Тогда утверждение теоремы 1 остаётся верным.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 2 *соответственно. Тогда для почти всех $x \in \Omega$ имеют место следующие оценки дифференциального оператора L*:

$$0 \leqslant \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}|g(x,u(x))| < |Lu(x)| \leqslant b(x),$$

где $b(x)$ — некоторая функция из $\mathbf{L}_q(\Omega)$, $q \geqslant 2n/(n+2)$.

Доказательство теоремы 3. Согласно теоремам 1, 2 задача (1)–(2) разрешима при $\lambda > \lambda_0 > 0$ $\big(\lambda_0 \leqslant \inf\limits_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}\big)$. Зафиксируем λ больше этого λ_0. Тогда из уравнения (1) и в силу условия 2) теоремы 1, условия 1$'$) теоремы 2 соответственно имеем

$$|Lu(x)| = |\lambda| \cdot |g(x,u(x))| \leqslant \lambda a(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Положив $b(x) = \lambda a(x)$, получим правую часть искомого неравенства. При сделанных предположениях в работе [6] получено неравенство $\lambda > J_1(u_0)/J_2(u_0)$. Поэтому имеем

$$|Lu(x)| = \lambda|g(x,u(x))| > \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}|g(x,u(x))| \geqslant 0,$$

т. к. в силу условий 1) и 3) теоремы 1 $J_1(u_0) \geqslant 0$ и $J_2(u_0) > 0$, что даёт левую часть искомого неравенства. Таким образом, получены оценки дифференциального оператора в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983. — 272 с.
2. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // *Докл. АН СССР*, 1976. — Т. 226, № 3. — С. 506–509.
3. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // *Сиб. мат. журн.*, 2001. — Т. 42, № 4. — С. 911–919; англ. пер.: *Pavlenko V. N., Potapov D. K.* Existence of a Ray of Eigenvalues for Equations with Discontinuous Operators // *Siberian Math. J.*, 2001. — Vol. 42, No. 4. — P. 766–773.
4. *Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.* 10. *Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2004. — № 4. — С. 125–132.

5. *Потапов Д. К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. — СПб.: ИБП, 2008. — 99 с.
6. *Потапов Д. К.* Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // *Дифференц. уравнения*, 2008. — Т. 44, № 5. — С. 715–716; англ. пер.: *Potapov D. K.* On an Upper Bound for the Value of the Bifurcation Parameter in Eigenvalue Problems for Elliptic Equations with Discontinuous Nonlinearities // *Differ. Equ.*, 2008. — Vol. 44, No. 5. — P. 737–739.

Поступила в редакцию 21/VI/2010;
в окончательном варианте — 06/VII/2010.

MSC: 35J25, 35J60, 35P30

ESTIMATIONS OF A DIFFERENTIAL OPERATOR IN SPECTRAL PARAMETER PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS NONLINEARITIES

D. K. Potapov

St. Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
35, Universitetsky pr., Old Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia.

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

The basic boundary value problems for semilinear equations of elliptic type with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity are considered in a bounded domain with a sufficiently smooth boundary. The parameter values for which the corresponding problem has the nonzero solution are called eigenvalues. The existence of eigenvalue problem solutions for equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities is considered in this paper. Estimations of the differential operator are obtained for these problems.

Key words: *boundary value problems, equations of elliptic type, spectral parameter, discontinuous nonlinearity, estimations of differential operator.*

Original article submitted 21/VI/2010;
revision submitted 06/VII/2010.

Dmitrij K. Potapov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.