

УДК 539.3

СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ
ВЫСОКОПОРИСТЫХ КОМПОЗИТОВ*Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин, А. А. Чекалкин*Пермский государственный технический университет
(национальный исследовательский университет),
614990 Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

E-mail: dopstu@yandex.ru

Рассматривается структурно-феноменологический подход к прогнозированию упругих свойств высокопористых композитов. Предлагаются нелинейные локально-эргодические модели прогнозирования упругих свойств, которые характеризуются более узкой вилкой Фойгта–Рейсса по сравнению с аналогичной вилкой, полученной на основе линейных моделей. Выводятся аналитические формулы для расчёта корреляционной поправки. Последующие приближения, учитывающие моментные функции высших порядков поля упругих свойств, не приводятся, так как они не вносят заметного вклада в полученное первое приближение.

Ключевые слова: высокопористые композиты, структурно-феноменологический подход, упругие свойства, нелинейные локально-эргодические модели, моментные функции.

В работах [1, 2] рассматривается линейная модель прогнозирования макроскопических свойств квазиизотропных композитов для учёта влияния пористости структуры:

$$\theta_{ijmn}(r) = C_{ijmn}^{\Pi}(1 - \lambda(r)), \quad (1)$$

где $\theta_{ijmn}(r)$ — структурные модули упругости композита; C_{ijmn}^{Π} — модули упругости матрицы; p — объёмная пористость композита; $\lambda(r)$ — случайная индикаторная функция:

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ 0, & \text{с вероятностью } (1 - p). \end{cases} \quad (2)$$

Из соотношения (1) с учётом (2) в работе [1] вычислены эффективные модули упругости в приближении Фойгта и с учётом корреляционной поправки. Проведённые экспериментальные и теоретические исследования свидетельствуют о том, что линейная модель (1) имеет достаточную для практики точность лишь для пористости, не превышающей 8%, что имеет важное практическое значение для спечённых порошковых структурно-неоднородных материалов. Для нового класса высокопористых композитов эта теория не даёт удовлетворительной точности. Поэтому в данной работе поставлена задача разработать нелинейную структурно-феноменологическую модель механики композитов, которая имеет необходимую для инженерной практики точность прогнозирования эффективных свойств. Отметим при этом, что впервые нелинейные структурно-феноменологические модели применены к прогнозированию эффективных свойств гранулированных композитов с полимер-

Елена Юрьевна Макарова (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. механики композиционных материалов и конструкций. Юрий Викторович Соколкин (д.ф.-м.н., профессор), зав. кафедрой, каф. механики композиционных материалов и конструкций. Андрей Алексеевич Чекалкин (д.ф.-м.н., профессор), декан, факультет повышения квалификации преподавателей.

ными матрицами, наполненными жёсткими сферическими включениями [1, 3]. Эти модели дали удовлетворительную сходимость теории и эксперимента.

В качестве нелинейной структурно-феноменологической модели для описания упругих свойств высокопористых композитов предлагается следующая локально-эргодическая модель:

$$\theta_{ijmn}(r) = C_{ijmn}^H(1-p)(1-\lambda(r)). \quad (3)$$

Из соотношений (3) с учётом (2) находим эффективные модули упругости композита в приближении Фойгта

$$C_{ijmn}(r) = \langle \theta_{ijmn}^H(r) \rangle = C_{ijmn}^H(1-p)^2. \quad (4)$$

Из соотношения (4) видно, что в данном случае в приближении Фойгта эффективные модули упругости определяются нелинейной моделью. Обозначим через $\Pi_{ijmn}(r)$ коэффициенты податливости микронеоднородной среды. Тогда между модулями упругости и коэффициентами податливости существует следующая зависимость:

$$\theta_{ij\alpha\beta}(r)\Pi_{ijmn}(r) = I_{ijmn}, \quad (5)$$

где $I_{ijmn}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2$ — единичный тензор четвёртого ранга.

Наложим на условие (5) более слабое ограничение и потребуем выполнения условия (5) в среднем, то есть, иначе говоря, осредним соотношение (5). Имеем

$$\langle \theta_{ij\alpha\beta}(r)\Pi_{ijmn}(r) \rangle = I_{ijmn}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) построим теперь нелинейную модель для коэффициентов податливости. В результате находим

$$\Pi_{ijmn}(r) = \Pi_{ijmn}^H \frac{(1+\overset{\circ}{\lambda})}{(1-p)^3}, \quad \overset{\circ}{\lambda} = \lambda - p. \quad (7)$$

Перемножая соотношения (3) и (7) и осредняя, убеждаемся в том, что уравнение (6) действительно выполняется. Из соотношения (7) находим эффективные коэффициенты податливости для модели Рейса

$$\langle \Pi_{ijmn} \rangle = \Pi_{ijmn}^H \frac{1}{(1-p)^3}. \quad (8)$$

Если приближение Фойгта (4) даёт верхнюю оценку эффективных модулей упругости, то приближение Рейса (8) — соответственно нижнюю оценку эффективных модулей упругости. Согласно теории [1], истинные значения эффективных модулей лежат внутри этой вилки.

Вычислим корреляционную поправку для модели Фойгта. Будем предполагать, что микронеоднородная среда макроскопически однородна и квазиизотропна [1]. Напомним, что под макроскопически однородной сплошной средой понимается такая микронеоднородная среда, упругие модули которой описываются случайными локально-эргодическими полями [1]. Микронеоднородная упругая среда квазиизотропна, если:

- 1) $C = C_{ijmn} = \langle \theta_{ijmn} \rangle$ — есть тензор модулей упругости изотропной среды;
- 2) моментные функции второго порядка структурных модулей упругости зависят только от модуля расстояния между точками твёрдого тела:

$$K_{ijmn,pqrs}(|r_1 - r_2|) = \langle \overset{\circ}{\theta}_{ijmn}(r_1) \overset{\circ}{\theta}_{pqrs}(r_2) \rangle.$$

Для макроскопически однородной квазиизотропной среды с однородными свойствами впервые в работе [4] показано, что структурные деформации $\overset{\circ}{\epsilon}(r)$ связаны с макродеформациями $e_{ij} = \langle \epsilon_{ij} \rangle$ следующими зависимостями:

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{ij}(r) = \Phi_{ij\alpha\beta}(\theta) e_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где $\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - e_{ij}$, $\Phi_{ijmn}(\theta)$ — случайный функционал краевой задачи, определяемый соотношением

$$\Phi_{ijmn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho_{imn}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_{jmn}}{\partial x_i} \right). \quad (10)$$

В работе [1] показано, что функционал $\partial \rho_{imn} / \partial x_j$ в корреляционном приближении может быть аппроксимирован следующей зависимостью:

$$\frac{\partial \rho_{imn}}{\partial x_j} = J_{i\alpha j\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta mn}, \quad (11)$$

где

$$J_{mnpq} = -\frac{4\pi}{15} (5A + 3B) \delta_{mn} \delta_{pq} + \frac{8\pi}{15} B (\delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np}) \quad (12)$$

— изотропный тензор четвертого ранга. Здесь материальные постоянные A и B определяются через средние модули упругости микронеоднородной среды:

$$A = \frac{C_{1122} + 3C_{2323}}{8\pi C_{2323}(C_{1122} + 2C_{2323})}, \quad B^* = \frac{C_{1122} + C_{2323}}{8\pi C_{2323}(C_{1122} + 2C_{2323})}. \quad (13)$$

Таким образом, на основании формул (9)–(13) достаточно просто вычислить эффективные модули упругости квазиизотропного композита.

Осредняя физические уравнения

$$\sigma_{ij}(r) = \theta_{ij\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (14)$$

и используя соотношения (9), (10), приходим к следующей формуле расчёта эффективных модулей упругости:

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn} + \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\gamma\delta} \frac{\partial \rho_{\gamma mn}}{\partial x_\delta} \right\rangle. \quad (15)$$

Подставляя формулу (11) в (15), получаем $C_{ijmn}^* = C_{ijmn} + \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\gamma\delta} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta mn} \right\rangle J_{\gamma\alpha\delta\beta}$, и окончательно приходим к следующим зависимостям:

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn} - \frac{4\pi}{3} \left(A + \frac{B}{5} \right) \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\alpha\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta mn} \right\rangle + \frac{8\pi}{15} B \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\alpha\alpha} \overset{\circ}{\theta}_{\beta\beta mn} \right\rangle. \quad (16)$$

Формула (16) представляет собой общую формулу для расчёта эффективных модулей упругости макроскопически однородных квазиизотропных сред в корреляционном приближении.

Выполним свёртки соответствующих тензоров восьмого ранга, используя соотношения (3) и (4):

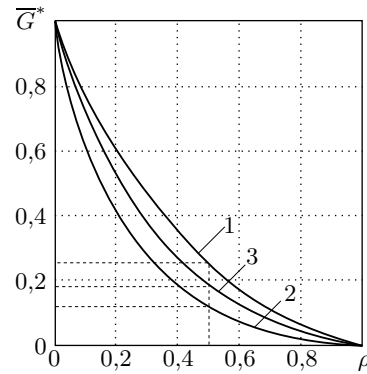
$$\begin{aligned} \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\alpha\beta} \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta mn} \right\rangle &= C_{ij\alpha\beta}^{\Pi} C_{\alpha\beta mn}^{\Pi} (1-p)^3 p, \\ \left\langle \overset{\circ}{\theta}_{ij\alpha\alpha} \overset{\circ}{\theta}_{\beta\beta mn} \right\rangle &= C_{ij\alpha\alpha}^{\Pi} C_{\beta\beta mn}^{\Pi} (1-p)^3 p. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя теперь (17) в (16), окончательно получаем формулы для расчёта эффективных модулей упругости:

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn} - \left[\frac{4\pi}{3} \left(A + \frac{B}{5} \right) C_{ij\alpha\beta}^{\Pi} C_{\alpha\beta mn}^{\Pi} - \frac{8\pi}{15} B C_{ij\alpha\alpha}^{\Pi} C_{\beta\beta mn}^{\Pi} \right] (1-p)^3 p. \quad (18)$$

На рисунке построены зависимости от пористости относительного макроскопического модуля сдвига $\bar{G}^* = C_{2323}^*/C_{2323}^H$, рассчитанные как по моделям Фойгта (4) (линия 1) и Рейса (8) (линия 2), так и с учётом корреляционной поправки (18) (линия 3).

Приведённые на рисунке данные показывают, что корреляционная поправка невелика и значение эффективного модуля сдвига попадает в вилку Фойгта—Рейса. Расчёты свидетельствуют о необходимости применения нелинейных моделей к прогнозированию эффективных упругих свойств высокопористых композитов.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Соколкин Ю. В., Тажикинов А. А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. — М.: Наука, 1984. — 116 с.
2. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Тажикинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — М.: Наука, 1997. — 288 с.
3. Соколкин Ю. В., Тажикинов А. А. Микроскопические упругие модули гранулированных эластомерных композитов // Механика эластомеров, 1981. — № 5. — С. 46–53.
4. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов. — Минск: Белорус. гос. ун-т, 1978. — 208 с.

Поступила в редакцию 20/III/2010;
в окончательном варианте — 12/VIII/2010.

MSC: 74A40

STRUCTURAL-PHENOMENOLOGICAL MODELS FOR PREDICTING OF THE ELASTIC PROPERTIES FOR HIGH-PORE COMPOSITES

E. Yu. Makarova, Yu. V. Sokolkin, A. A. Chekalkin

Perm State Technical University (National Research University),
29, Komsomolskiy pr., Perm, 614990, Russia.

E-mail: dopstu@yandex.ru

Structural-phenomenological approach for predicting of the elastic properties for high-pore composites is used. Nonlinear local-ergodic models for the elastic properties predicting are proposed. They give us narrower Voigt-Reiss results, than calculations for the linear models. Analytical solution for calculation of the correlate approximation is developed. The following approximations deal with the higher orders moment functions for the elastic properties. They do not practically affect the first approximation obtained, that is why the following approximations are not given.

Key words: *high-pore composites, structural-phenomenological approach, elastic properties, nonlinear local-ergodic models, moment functions.*

Original article submitted 20/III/2010;
revision submitted 12/VIII/2010.

Elena Yu. Makarova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mechanics of Composite Materials & Structures. *Yuriy V. Sokolkin* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mechanics of Composite Materials & Structures. *Andrey A. Chekalkin* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Dean of Faculty, Faculty of Staff Qualification Improvement.