Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 99–107

УДК 530.145

ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АДИАБАТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

М. О. Катанаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: katanaev@mi.ras.ru

Дано простое доказательство адиабатической теоремы в конечномерном случае как для невырожденных, так и для вырожденных состояний. Для отклонения нормы решения уравнения Шрёдингера получена оценка, равномерная по параметру, от которого зависит гамильтониан.

Ключевые слова: *адиабатическая теорема, квантовая механика.*

Адиабатическая теорема [1] занимает одно из центральных мест в нерелятивистской квантовой механике, т. к. позволяет находить приближённое решение уравнения Шрёдингера при медленном изменении гамильтониана во времени. Первоначально она была доказана для дискретного (возможно, бесконечного) спектра гамильтониана при некоторых ограничениях на возможное пересечение уровней энергии. Доказательство для невырожденных уровней энергии приведено, например, в [2]. Различным вариантам адиабатической теоремы посвящено большое количество статей, ссылки на которые можно найти в [3, 4]. Доказательства адиабатической теоремы довольно сложны.

В настоящей статье дано новое простое доказательство адиабатической теоремы для конечномерной квантово-механической системы. Использование базиса, состоящего из собственных векторов исходного гамильтониана, позволяет упростить доказательство и сделать его более прозрачным. Доказательство приведено как для невырожденных, так и для вырожденных состояний. Чтобы сделать доказательство теоремы максимально простым и выделить наиболее существенные моменты, мы предполагаем, что уровни энергии не пересекаются.

Сравнение с существующими доказательствами адиабатической теоремы в конечномерном случае [5–7] сделано в заключении.

В нерелятивистской квантовой механике состояние системы описывается вектором гильбертова пространства (волновой функцией) $\psi \in \mathbb{H}$, зависящего от времени, и некоторого набора других переменных, который определяется рассматриваемой задачей. Эволюция квантовой системы во времени t описывается уравнением Шрёдингера [8, 9]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{1}$$

где H — самосопряженный оператор (гамильтониан), действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, и $\hbar$ — постоянная Планка. Для уравнения Шрёдингера

Михаил Орионович Катанаев (д.ф.-м.н.), ведущий научный сотрудник, отд. математической физики.

ставится задача Коши с начальным условием

$$\psi(0) = \psi_0, \tag{2}$$

где $\psi_0 \in \mathbb{H}$ — некоторый нормированный на единицу вектор гильбертова пространства.

В дальнейшем положим $\hbar = 1$ и обозначим частную производную по времени точкой $\dot{\psi} := \partial_t \psi$.

Предположим для простоты, что гильбертово пространство представляет собой конечномерное комплексное пространство $\mathbb{H} = \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ комплексной размерности $\dim \mathbb{H} = \mathrm{N}$. Рассмотрим задачу Коши (1), (2) в общем случае, когда гамильтониан системы зависит от времени, $H = H(t)$. Для решения этой задачи необходимо выбрать базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Конечно, решение задачи от выбора базиса не зависит, и его выбирают из соображений удобства. Рассмотрим два случая.

Пусть базис $e_k \in \mathbb{H}$, $k = 1, 2, \dots, \mathrm{N}$, ортонормирован и фиксирован, $\dot{e}_k = 0$. Произвольный вектор можно разложить по этому базису: $\psi = \psi^k e_k$. При этом гамильтониан задается эрмитовой $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$-матрицей H_l^k, а задача Коши для уравнения Шрёдингера в компонентах примет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторыми начальными условиями

$$i\dot{\psi}^k = H_l^k \psi^l, \quad \psi^k(0) = \psi_0^k, \tag{3}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Рассмотрим теперь другой ортонормированный базис $b_k = b_k(t)$, который может зависеть от времени. Вектор гильбертова пространства ψ можно разложить также по этому базису $\psi = \psi'^k b_k$. Тогда задача Коши (3) будет выглядеть по другому:

$$i\dot{\psi}'^k = H'^k_l \psi'^l, \quad \psi'^k(0) = \psi_0'^k, \tag{4}$$

где H'^k_l — компоненты гамильтониана относительно нового базиса, которые будут определены ниже. Два базиса связаны между собой некоторым унитарным преобразованием

$$b_k = S_k^l e_l, \quad S \in \mathbb{U}(\mathrm{N}), \tag{5}$$

которое в общем случае зависит от времени, $S = S(t)$. При этом компоненты вектора гильбертова пространства преобразуются с помощью обратной матрицы

$$\psi'^k = S^{-1}{}_l^k \psi^l.$$

Отсюда следует выражение для компонент начального вектора гильбертова пространства $\psi_0'^k = S^{-1}{}_l^k(0)\psi_0^l$. Переписав уравнение Шрёдингера (3) в базисе b_k, получим компоненты гамильтониана относительно нового базиса:

$$H' = S^{-1} H S - i S^{-1} \dot{S}, \tag{6}$$

где для краткости опущены матричные индексы.

Перейдём к определению адиабатического предела и описанию базиса b_k, который будет использован при доказательстве адиабатической теоремы.

Адиабатическая теорема справедлива для гамильтонианов, которые медленно меняются со временем. А именно, мы предполагаем, что гамильтониан достаточно гладко зависит от вещественного параметра $\nu = \varepsilon t$, где $\varepsilon > 0$, который меняется на конечном отрезке, $\nu \in [0, \nu_0]$. Тогда медленное изменение гамильтониана означает, что параметр ν меняется на конечную величину при малых ε и больших временах t. Назовём адиабатическим двойной предел в решении задачи Коши для уравнения Шрёдингера (1) и (2) на отрезке $[0, t]$:

$$\varepsilon \to 0, \quad t \to \infty \quad \text{при условии } \varepsilon t = \nu = \text{const}. \tag{7}$$

При исследовании этого предела время t в уравнении Шрёдингера удобно заменить на параметр ν:

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = H(\nu)\psi. \tag{8}$$

Вектор состояния $\psi(\nu, \varepsilon)$ в таком случае зависит также от параметра ε, а адиабатический предел соответствует простому пределу $\varepsilon \to 0$ при каждом значении параметра ν.

Асимптотическое решение уравнения вида (8) в общем случае построено в [10, 11].

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится специальный базис, зависящий от времени. Пусть исходный гамильтониан $H(\nu)$ квантовой системы задан в некотором фиксированном базисе e_k. Тогда существует унитарная матрица $S(\nu)$, которая диагонализирует гамильтониан:

$$S^{-1} H(\nu) S = H_{\text{D}}(\nu) = \operatorname{diag}\big(E_1(\nu), E_2(\nu), \dots, E_{\text{N}}(\nu)\big), \tag{9}$$

где $E_1 \leqslant E_2 \leqslant \ldots \leqslant E_{\text{N}}$ — уровни энергии собственных состояний гамильтониана H, которые будем считать упорядоченными. Как известно, столбцами матрицы S являются компоненты собственных векторов гамильтониана H. Унитарная матрица S определена неоднозначно, и произвол в её выборе в дальнейшем рассмотрении будет использован.

Мы допускаем, что часть уровней энергии может быть вырождена. Обозначим через Υ_n множество индексов, для которых $E_j(\nu) = E_n(\nu)$ при $j \in \Upsilon_n$. Конечно, в качестве индекса n можно выбрать любой индекс, принадлежащий Υ_n. Если уровень E_n невырожден, то множество индексов состоит из одного элемента: $\Upsilon_n = \{n\}$. Мы докажем адиабатическую теорему в случае, когда множество индексов Υ_n для всех n не меняется со временем, т.е. уровни энергии не пересекаются.

Предполагается, что гамильтониан H, уровни энергии E_1, E_2, $\ldots$, E_{N} и матрица преобразования S достаточно гладко зависят от ν на конечном отрезке $[0, \nu_0]$.

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Существует унитарная матрица S в* (9) *такая, что выполнено условие*

$$\left(S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\right)_k^{\,j} = 0, \quad \forall k \in \Upsilon_j. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть уровень энергии E_k невырожден. Матрица преобразования S определена с точностью до умножения каждого столбца на фазовый множитель $S_k^j \mapsto S_k^j \mathrm{e}^{i\alpha_k(\nu)}$ для всех $j = 1, 2, \dots, \mathrm{N}$. Это соответствует произволу в выборе фазового множителя у собственного вектора состояния. Пусть фазовый множитель удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\alpha_k}{d\nu} = i\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} S^{-1}{}_j^k \frac{dS_k^j}{d\nu},$$

где суммирование по k в правой части отсутствует. Тогда нетрудно проверить, что после преобразования для любого решения этого уравнения выполнено равенство

$$\left(S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\right)_k^k = 0. \tag{11}$$

Это можно проделать для всех невырожденных уровней одновременно.

Теперь предположим, что все уровни энергии вырождены, $E_1 = E_2 = \dots = E_{\mathrm{N}}$. Тогда матрица S определена с точностью до унитарного преобразования

$$S \mapsto SW, \quad W(\nu) \in \mathbb{U}(\mathrm{N}).$$

Пусть матрица W удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW}{d\nu} + S^{-1}\frac{dS}{d\nu}W = 0,$$

которое всегда имеет решение. Тогда после преобразования для любого решения будет выполнено равенство (10) для всех j, k.

Если вырождена только часть уровней, то соответствующее унитарное преобразование необходимо проделать только с этими уровнями. Таким образом, равенство (10) будет выполнено для всех уровней с $E_j = E_k$. □

Доказательство адиабатической теоремы будет проведено в ортонормированном базисе (5), где матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме. Этот базис состоит из собственных векторов исходного гамильтониана H:

$$Hb_k = E_k b_k,$$

и гамильтониан $H(\nu)$ в нём диагонален (9). Компоненты вектора состояния в базисе b_k, как и ранее, пометим штрихом: $\psi = \psi'^k b_k$. Поскольку гамильтониан H в этом базисе диагонален, то квадрат модуля k-той компоненты вектора состояния

$$|(\psi, b_k)|^2 = |\psi'^k|^2,$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{H}$, равен вероятности обнаружить квантовую систему в состоянии E_k в момент времени t.

Для формулировки теоремы нам понадобится функция

$$\triangle E_n(\nu) = \min_{j,\sigma}|E_j(\sigma) - E_n(\sigma)|, \quad \forall\sigma \in [0, \nu],$$

где минимум $|E_j - E_n|$ берётся по всем j, для которых $E_j \neq E_n$, и всем $\sigma \in [0, \nu]$. Поскольку уровни энергии не пересекаются, то для каждого значения параметра ν функция $\triangle E_n(\nu)$ конечна и равна минимальному расстоянию от уровня энергии E_n до остальных уровней энергии.

Адиабатическая теорема. *Пусть гамильтониан $H = H(\nu)$, его собственные состояния $b_k(\nu)$ и уровни энергии $E_k(\nu)$ достаточно гладко зависят от ν на конечном отрезке $\nu \in [0, \nu_0]$. Предположим, что число вырожденных собственных состояний постоянно во времени. Пусть $\psi_{(n)}(\nu, \varepsilon)$ — решение уравнения Шрёдингера, которое в начальный момент времени совпадает с собственным состоянием $b_n(0)$ гамильтониана $H(0)$, соответствующим уровню энергии $E_n(0)$. Тогда в адиабатическом пределе (7) справедлива следующая оценка нормы*:

$$1 - \sum_{j \in \Upsilon_n} |(\psi_{(n)}, b_j)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\varepsilon^2)}{\triangle E_n^2(\nu)}, \quad \forall \nu \in [0, \nu_0], \tag{12}$$

то есть в процессе эволюции квантовая система будет оставаться в собственном состоянии гамильтониана $H(\nu)$, соответствующем уровню энергии $E_n(\nu)$ с точностью порядка ε^2.

Доказательство. Будем решать задачу Коши (4) в базисе (5). Гамильтониан, который входит в уравнение Шрёдингера, в этом базисе диагонален с точностью до линейных членов по ε,

$$H' = H_{\text{D}} - i\varepsilon S^{-1}\frac{dS}{d\nu}. \tag{13}$$

Пусть матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме. Предположим, что в начальный момент времени система находится в собственном состоянии гамильтониана H_{D} и, следовательно, в собственном состоянии исходного гамильтониана $H = SH_{\text{D}}S^{-1}$. Это значит, что начальное условие в базисе b_k имеет вид

$$\psi_{(n)}(0, \varepsilon) = b_n(0) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Любое решение уравнения Шрёдингера представимо в виде

$$\psi_{(n)}(\nu, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}(\sigma)\right)\phi_{(n)}(\nu, \varepsilon), \tag{14}$$

где $\phi_{(n)}$ — некоторый вектор гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Тогда для вектора $phi_{(n)}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\phi_{(n)}}{\partial\nu} = -\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right) S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right)\phi_{(n)}.$$

Полученное уравнение вместе с начальным условием перепишем в виде интегрального уравнения

$$\phi_{(n)}(\nu, \varepsilon) = b_n(0) - \int_0^\nu d\sigma \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right) S^{-1}\frac{dS}{d\sigma}\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right)\phi_{(n)}. \tag{15}$$

При $\varepsilon \to 0$ подынтегральное выражение содержит быстро осциллирующий множитель и его легко оценить. Рассмотрим модуль компоненты решения $\psi'^{j}_{(n)}$, которая соответствует собственному состоянию гамильтониана H с энергией E_j, где $E_j \neq E_n$:

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}\right| = \left|\phi^{j}_{(n)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \int_0^\nu d\sigma \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\sigma d\lambda (E_j - E_k)\right)\left(S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\right)^j_{\ k} \phi^k_{(n)}\right|. \tag{16}$$

В сумме справа слагаемые с $E_k = E_j$ вклада не дают в силу равенства (10). При $E_k \neq E_j$ каждое слагаемое проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{i(E_j - E_k)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\sigma d\lambda (E_j - E_k)\right)\left(S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\right)^j_{\ k} \phi^k_{(n)}\Bigg|_0^\nu - \\ &\qquad - \frac{\varepsilon}{i}\int_0^\nu d\sigma \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\sigma d\lambda (E_j - E_k)\right)\frac{1}{E_j - E_k}\frac{d}{d\sigma}\left[\left(S^{-1}\frac{dS}{d\nu}\right)^j_{\ k} \phi^k_{(n)}\right].\end{aligned} \tag{17}$$

По предположению, подынтегральное выражение во втором слагаемом является дифференцируемой функцией, и его снова можно проинтегрировать по частям. В результате получим, что оно имеет порядок ε^2 и им можно пренебречь. Модуль первого слагаемого, очевидно, ограничен. Таким образом, получаем оценку

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}(\nu, \varepsilon)\right| = \frac{\mathsf{O}(\varepsilon)}{\min\left|E_j(\sigma) - E_k(\sigma)\right|}, \qquad \forall j \notin \Upsilon_n, \tag{18}$$

где минимум берётся по всем k, для которых $E_k \neq E_j$, и всем $\sigma \in [0, \nu]$.

Теперь снова вернёмся к выражению (17). Из оценки (18) вытекает, что $|\phi^k_{(n)}|$ для всех k при $E_k \neq E_n$ имеет порядок не ниже ε. Поэтому в сумме (16) все слагаемые с индексом $k \notin \Upsilon_n$ дают вклад не ниже ε^2 и ими можно пренебречь. Поэтому оценку (18) можно улучшить:

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}(\nu, \varepsilon)\right| = \frac{\mathsf{O}(\varepsilon)}{\min\left|E_j(\sigma) - E_n(\sigma)\right|}, \qquad \forall j \notin \Upsilon_n,$$

где минимум берётся только по $\sigma \in [0, \nu]$.

Норма произвольного решения сохраняется во времени и равна единице. Следовательно,

$$1 - \sum_{j \in \Upsilon_n} |\psi'^{j}_{(n)}(\nu, \varepsilon)|^2 = \sum_{j \notin \Upsilon_n} |\psi'^{j}_{(n)}(\nu, \varepsilon)|^2.$$

Поскольку число уровней конечно, отсюда вытекает оценка (12). $\square$

В теореме функция $\triangle E_n(\nu)$ для каждого ν равна константе и её можно включить в $\mathsf{O}(\varepsilon^2)$. Тем не менее мы выделили множитель $\triangle E_n$ с тем, чтобы показать, что предположение о том, что уровни энергии не пересекаются, является существенным. При пересечении уровней энергии знаменатель в (12) обращается в нуль и доказательство не проходит.

Адиабатическая теорема утверждает, что если в начальный момент времени система находилась в собственном состоянии гамильтониана, соответствующем уровню энергии $E_n(0)$, и этот уровень невырожден, то в адиабатическом пределе она будет оставаться в собственном состоянии $E_n(\nu)$ с точностью порядка ε^2 при конечных значениях параметра ν. Если уровень энергии E_n вырожден, то система будет находиться в одном из собственных состояний E_j, где $j \in \Upsilon_n$, с той же точностью. В процессе эволюции система может оказаться в любом из вырожденных состояний E_j, $j \in \Upsilon_n$, с вероятностью порядка единицы [12]. Эти утверждения, естественно, не зависят от выбора базиса, который использовался при доказательстве адиабатической теоремы.

В статье [12] рассмотрен пример двухуровневой квантово-механической системы, который решается в явном виде. Он показывает, что оценка (12), данная в адиабатической теореме, является неулучшаемой.

Сравним приведённое выше доказательство адиабатической теоремы с первоначальным. В своей оригинальной работе [1] Борн и Фок рассмотрели случай, когда спектр гамильтониана дискретен, но может быть неограничен. Неявно ими было сделано предположение о невырожденности спектра почти для всех моментов времени. Кроме того, допускалась возможность определенного пересечения уровней энергии с течением времени. Мы рассмотрели более простой конечномерный случай, когда уровни энергии не пересекаются. Это позволило упростить доказательство и выявить наиболее существенные моменты. Оценка (12) согласуется с оценкой, приведённой в [1]. Наше доказательство использует базис, в котором исходный гамильтониан диагонален, и это помогло сделать доказательство более прозрачным. Оценка решения интегрального уравнения (15) проведена Борном и Фоком другим способом — путём разложения в ряд. Кроме этого в приведённом нами доказательстве допускается наличие вырожденных уровней энергии для всех моментов времени.

Аналогичное доказательство адиабатической теоремы в конечномерном случае дано в [5] для линейных гамильтоновых систем. Известно, что линейные гамильтоновы системы описываются уравнением Шрёдингера с гамильтонианом специального вида. Идея доказательства сводится к приведению гамильтониана к такому виду, в котором явно выделена зависимость от малого параметра аналогично виду (13). Доказательство, приведённое в настоящей статье, применимо к квантовым системам общего вида, а не только к линейным гамильтоновым системам. Кроме того, для преобразования гамильтониана использовано не симплектическое преобразование, как в [5], а унитарное преобразование, что, на наш взгляд, упрощает доказательство.

Доказательство адиабатической теоремы для конечномерных гамильтоновых систем общего вида, включая нелинейные, приведено в [7]. Доказательство использует каноническое преобразование к переменным «действие – угол». Конечно, оно применимо и для линейных систем. Как было отмечено выше, линейные гамильтоновы системы эквивалентны некоторому классу уравнений Шрёдингера, однако они не охватывают все квантовые нерелятивистские системы. В этом смысле доказательство, приведенное в настоящей статье, является более общим. Оно охватывает все конечномерные квантово-механические системы, и тем самым — все линейные гамильтоновы системы.

В статье [6] приведено доказательство адиабатической теоремы для конечномерной квантово-механической системы в случае малых параметров ν. Доказательство проведено путём разложения решений как по параметру ε, так и по ν с учётом только линейных членов. Это соответствует тому, что правая часть оценки (12) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $\nu \to 0$. В настоящей статье доказательство оценки (12) проведено для малых ε, причём оценка равномерна по ν на произвольном конечном отрезке $[0, \nu_0]$. При этом разложение в ряды не используется.

Автор выражает искреннюю благодарность И. В. Воловичу, Д. В. Трещеву и рецензенту за обсуждение статьи и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 11–01–00828–а и 09–01–12161–офи_м), гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ–7675.2010.1) и программы «Современные проблемы теоретической математики» РАН.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Born M., Fock V.* Beweis des Adiabatensatzes // *Z. f. Physik*, 1928. Vol. 51, no. 3–4. Pp. 165–180; *Born M., Fock V.* Proof of the adiabatic theorem / In: *V. A. Fock – Selected Works: Quantum Mechanics and Quantum Field Theory*; eds. L. D. Faddeev, L. A. Khalfin, I. V. Komarov. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. Pp. 69–86.
2. *Messiah A.* Quantum Mechanics. Vol. 2. Amsterdam: North Holland, 1962; *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 2. М.: Наука, 1979. 584 с.
3. *Joye A.* Geometrical and mathematical aspects of the adiabatic theorem of quantum mechanics: PHD thesis No. 1022. Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, 1992.
4. *Teufel S.* Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics / Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1821. Berlin: Springer, 2003. 236 pp.
5. *Levi M.* Adiabatic invariants of the linear Hamiltonian systems with periodic coefficients // *J. Differential Equations*, 1981. Vol. 42, no. 1. Pp. 47–71.
6. *Arnold V. I.* Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect // *Sel. Math., New Ser.*, 1995. Vol. 1, no. 1. Pp. 1–19.
7. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с. [*Arnol'd V. I., Kozlov V. V. Neishtadt A. I.* Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Moscow: Editorial URSS, 2002. 414 pp.]
8. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung) // *Annalen der Physik*, 1926. Vol. 79, no. 4. Pp. 361–376; русск. пер.: *Шрёдингер Э.* Квантование как задача о собственных значениях (первое сообщение) // *УФН*, 1977. Т. 122, № 8. С. 621—632.
9. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung) // *Annalen der Physik*, 1926. Vol. 79, no. 6. Pp. 489–527.
10. *В. С. Владимиров, И. В. Волович* Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений // *ТМФ*, 1985. Т. 62, № 1. С. 3–29; англ. пер.: *Vladimirov V. S., Volovich I. V.* Local and nonlocal currents for nonlinear equations // *Theoret. and Math. Phys.*, 1985. Vol. 62, no. 1. Pp. 1–20.
11. *В. С. Владимиров, И. В. Волович* Законы сохранения для нелинейных уравнений // *УМН*, 1985. Т. 40, № 4. С. 17–26; англ. пер.: *Vladimirov V. S.* Conservation laws for nonlinear equations // *Russian Math. Surveys*, 1985. Vol. 40, no. 4. Pp. 13–24.
12. *Катанаев М. О.* Адиабатическая теорема для конечномерных квантовомеханических систем // *Извест. вузов. Физика*, 2011. Т. 54 (в печати). [*Katanaev M. O.* Adiabatic theorem for finite-dimensional quantum mechanical systems // *Izvest. vuzov. Fizika*, 2011. Vol. 54 (to appear)].

Поступила в редакцию 17/II/2011;
в окончательном варианте — 07/III/2011.

MSC: 35Q40

SIMPLE PROOF OF THE ADIABATIC THEOREM

M. O. Katanaev

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: `katanaev@mi.ras.ru`

Simple proof of the adiabatic theorem is given in a finite dimensional case for nondegenerate as well as degenerate states. The estimate is obtained for the deviation of the norm of the solution of the Shchrödinger equation which is uniform on the parameter in the Hamiltonian.

Key words: *adiabatic theorem, quantum mechanics.*

Original article submitted 17/II/2011;
revision submitted 07/III/2011.

Mikhail O. Katanaev (Dr. Sc. (Phys. & Math.)), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.