Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 280–284

Математическое моделирование

УДК 534.11

ОБОСНОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТРУНЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ИЗГИБНОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ, С РОЛИКОВОЙ ОПОРОЙ

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, А. Е. Лукьянов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,
446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

E-mail: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрена задача о колебаниях гибкого звена, обладающего изгибной жесткостью, в случае, когда одна из опор представляет собой ролик или шкив. При колебаниях точка касания звена перемещается по опоре. Движение точки касания зависит от колебательного процесса, что делает задачу нелинейной. С помощью разложения функции, описывающей колебания, в ряд вблизи точки касания получены граничные условия, имеющие место при взаимодействии звена и опоры. Произведена оценка зависимости частоты колебаний от амплитуды. Указано, что при малой амплитуде колебаний граничные условия можно записать в виде равенства нулю угла наклона и смещения гибкого звена. Погрешность при использовании таких граничных условий возрастает при увеличении амплитуды.

Ключевые слова: *струна с изгибной жёсткостью, собственные частоты колебаний, движущаяся точка контакта.*

В настоящее время широкое распространение в технике колеблющихся механических объектов обуславливает необходимость все более полного учёта возникающих в них динамических явлений. Во многих технических устройствах колеблющиеся звенья взаимодействуют на границах с опорами типа ролика или шкива. Схема взаимодействия представлена на рисунке. В этом случае возникает необходимость обоснования граничных условий на правой границе звена (см. рисунок).

При колебаниях точка контакта перемещается по опоре. Очевидно, что перемещение границы взаимосвязано с $U(x,\,t)$. Наличие такой связи делает задачу нелинейной, на что указывалось в [1], которая посвящена обоснованию граничных условий, имеющих место при таком взаимодействии гибкого звена с опорой.

Задачу (см. рисунок) можно поставить следующим образом: для дифференциального уравнения $L[U(x,t)] = 0$, описывающего колебания обладающего изгибной жёсткостью гибкого звена, требуется найти решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$U(l_0 + x_0(t),\, t) = f(x_0(t)), \tag{1}$$

$$U_x(l_0 + x_0(t),\, t) = f'(x_0(t)), \tag{2}$$

$$U_{xx}(l_0 + x_0(t),\, t) = f''(x_0(t)). \tag{3}$$

Целью статьи является обоснование граничных условий на правой границе струны (см. рисунок), поэтому граничные условия на левом конце и начальные условия в постановке задачи опускаются: имеется в виду, что решение удовлетворяет им.

Валерий Николаевич Анисимов (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. общетеоретических дисциплин. *Владислав Львович Литвинов*, преподаватель, каф. общетеоретических дисциплин. *Алексей Евгеньевич Лукьянов* (к.ф.-м.н.), доцент, каф. общетеоретических дисциплин.

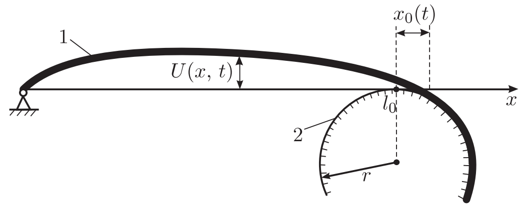

Схема взаимодействия колеблющегося звена с опорой: 1 — гибкое звено; 2 — опора; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - r$ — функция, задающая форму круглой опоры; l_0 — расстояние от начала координат до оси симметрии опоры; $x_0(t)$ — расстояние от оси симметрии до точки касания звена с опорой; $U(x,\,t)$ — поперечное смещение точки с координатой x в момент времени t

Выражение (1) записано исходя из условия контакта звена с опорой, а (2), (3) — из условия совпадения угла наклона касательной и кривизны звена и опоры в точке контакта. Наличие трех граничных условий на одном конце звена обусловлено тем, что закон движения точки контакта $x = x_0(t)$ неизвестен и для его определения записывается дополнительное граничное условие.

Отделяем в поставленной задаче статическую часть $\mu(x)$:

$$U(x,\,t) = V(x,\,t) + \mu(x). \tag{4}$$

В результате получаем задачу для $\mu(x)$:

$$L[\mu(x)] = 0; \tag{5}$$

$$\mu(l_0 + x_0) = f(x_0), \quad \mu'(l_0 + x_0) = f'(x_0), \quad \mu''(l_0 + x_0) = f''(x_0), \tag{6}$$

где $l_0 + x_0$ — координата точки касания звена с опорой в статическом состоянии.

Решение задачи (5) при граничных условиях (6), как правило, трудностей не представляет.

Перейдем к задаче по определению $V(x,\,t)$. Обозначим $\delta(t) = x_0(t) - x_0$, $l = l_0 + x_0$. Тогда для определения $V(x,\,t)$ получим следующую задачу:

$$\begin{gathered} L[V(x,\,t)] = 0; \\ V(l + \delta(t),\,t) = f(x_0 + \delta(t)) - \mu(l + \delta(t)), \\ V_x(l + \delta(t),\,t) = f'(x_0 + \delta(t)) - \mu'(l + \delta(t)), \\ V_{xx}(l + \delta(t),\,t) = f''(x_0 + \delta(t)) - \mu''(l + \delta(t)). \end{gathered} \tag{7}$$

Разложив левые и правые части граничных условий в ряд Тейлора по степеням $\delta(t)$ с удержанием членов до производной третьего порядка включительно и учитывая равенства (6), граничные условия преобразуем к виду:

$$V(l,\,t) + \delta(t)V_x(l,\,t) + \frac{\delta^2(t)}{2}V_{xx}(l,\,t) + \frac{\delta^3(t)}{6}V_{xxx}(l,\,t) = R\frac{\delta^3(t)}{6}, \tag{8}$$

$$V_x(l,\,t) + \delta(t)V_{xx}(l,\,t) + \frac{\delta^2(t)}{2}V_{xxx}(l,\,t) = R\frac{\delta^2(t)}{2}, \tag{9}$$

$$V_{xx}(l,\,t) + \delta(t)V_{xxx}(l,\,t) = R\delta t, \tag{10}$$

где $R = f'''(x_0) - \mu'''(l)$.

Исключая из системы (8)–(10) $\delta(t)$, получим граничные условия на правой границе струны:

$$V(l,\,t) = \frac{V_{xx}^3(l,\,t)}{6\,[R - V_{xxx}(l,\,t)]^2}, \quad V_x(l,\,t) = \frac{-V_{xx}^2(l,\,t)}{2[R - V_{xxx}(l,\,t)]}. \tag{11}$$

Введём в задачу (7), (11) безразмерные переменные:

$$\xi = x/l, \quad \tau = at/l, \quad V(x,\, t) = AZ(\xi,\, \tau), \tag{12}$$

где A — величина, характеризующая амплитуду колебаний; $a^2 = T/\rho$ (T — сила натяжения струны, ρ — линейная плотность массы струны). Тогда задача (7), (11) примет следующий вид:

$$L_1[Z(\xi,\, \tau)] = 0;$$
$$Z(1,\, \tau) = \frac{b^2 Z_{\xi\xi}^3(1,\, \tau)}{6[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1,\, \tau)]^2}, \quad Z_\xi(1,\, \tau) = \frac{-bZ_{\xi\xi}^2(1,\, \tau)}{2[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1,\, \tau)]},$$

где $b = A/(Rl^3)$.

Рассмотрим конкретный пример: дифференциальное уравнение, учитывающее натяжение и изгибную жёсткость струны, имеет вид

$$U_{tt}(x,\, t) + \alpha^4 U_{xxxx}(x,\, t) - a^2 U_{xx}(x,\, t) = 0, \tag{13}$$

где $\alpha^4 = EI/\rho$; E — модуль упругости материала струны; I — момент инерции сечения струны; a^2 и ρ — определены ранее.

Уравнение (13) необходимо решить при граничных условиях на правом конце вида (11) и на левом конце вида

$$U(0,\, t) = 0, \quad U_{xx}(0,\, t) = 0.$$

Отделяя по формуле (4) статическую часть решения, получим следующую задачу для определения $\mu(x)$:

$$\alpha^4 \mu^{IV}(x) - a^2 \mu''(x) = 0; \tag{14}$$
$$\mu(l_0 + x_0) = f(x_0), \quad \mu'(l_0 + x_0) = f'(x_0), \quad \mu''(l_0 + x_0) = f''(x_0); \tag{15}$$
$$\mu(0) = 0; \quad \mu''(0) = 0. \tag{16}$$

В большинстве практических задач влияние на колебательный процесс силы натяжения преобладает над влиянием изгиба, поэтому безразмерная величина $\alpha^2/(al_0)$ мала. Учитывая данный факт и решая задачу (14)–(16), нетрудно прийти к следующим приближенным оценкам: $x_0 \approx \alpha^2/a$, $R \approx 1/(x_0 r)$.

После введения безразмерных переменных вида (12) задача по определению $Z(\xi,\, \tau)$ примет вид

$$\begin{gathered} Z_{\tau\tau}(\xi,\, \tau) + \beta Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\, \tau) - Z_{\xi\xi}(\xi,\, \tau) = 0; \\ Z(1,\, \tau) = \frac{b^2 Z_{\xi\xi}^3(1,\, \tau)}{6\left[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1,\, \tau)\right]^2}, \quad Z_\xi(1,\, \tau) = \frac{-bZ_{\xi\xi}^2(1,\, \tau)}{2\left[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1,\, \tau)\right]}; \\ Z(0,\, \tau) = 0, \quad Z_{\xi\xi}(0,\, \tau) = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\beta \approx x_0^2/l^2$, $b = Ax_0 r/l^3$, $l = l_0 + x_0$.

Будем искать периодическое решение в виде

$$Z(\xi,\, \tau) = \psi(\xi) \cos \omega\tau, \tag{18}$$

где $\psi(\xi)$ с учётом дифференциального уравнения и условий при $\xi = 0$ имеет вид

$$\psi(\xi) = C \operatorname{sh} k_1 \xi + \sin k_2 \xi. \tag{19}$$

Здесь

$$k_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\omega^2\beta}}{2\beta}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\omega^2\beta}}{2\beta}}.$$

Теперь необходимо найти такие C и ω, чтобы решение (18) как можно лучше в среднем квадратичном удовлетворяло условиям (17). Подставим (18) в эти условия. После преобразований будем иметь:

$$F_1(C,\,\omega,\,\xi)\,|_{\xi=1}\, = 0, \quad F_2(C,\,\omega,\,\xi,\,\tau)\,|_{\xi=1}\, = 0,$$

где $F_1(C,\,\omega,\,\xi) = \psi'^2(\xi) - 3\psi(\xi)\psi''(\xi)/2$, $F_2(C,\,\omega,\,\xi,\,\tau) = \psi'(\xi) - b\cos(\omega\tau)\big[\psi'(\xi)\psi'''(\xi) - - 0{,}5\psi''^2(\xi)\big]$.

Составим выражение

$$F(C,\,\omega,\,\xi) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\big[F_1^2(C,\,\omega,\,\xi) + F_2^2(C,\,\omega,\,\xi,\,\tau)\big]\,d\tau. \tag{20}$$

После преобразований получим:

$$F(C,\,\omega,\,\xi) = \psi'^2(\xi) + \big[\psi'^2(\xi) - 1{,}5\psi(\xi)\psi''(\xi)\big]^2 + 0{,}5b^2\left[\psi'(\xi)\psi'''(\xi) - 0{,}5\psi''^2(\xi)\right]^2.$$

Так как функция $F_1^2 + F_2^2$ является периодической по времени, то здесь произведено усреднение её величины по периоду $2\pi/\omega$. Теперь C и ω необходимо определить из условия минимума выражения (20) при $\xi = 1$.

При численной минимизации функционала $F(C,\,\omega,\,\xi)\big|_{\xi=1} \to \min$ относительно собственной частоты ω были получены следующие результаты, сведённые в таблицу. Под значениями частот при $b = 0$ понимается предельное значение, когда амплитуда стремится к нулю.

Частота поперечных колебаний струны

b \ β	0,007	0,008	0,009	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14
0,0000	3,545	3,585	3,623	3,659	3,696	3,732	3,765	3,799
0,0005	3,543	3,584	3,622	3,658	3,695	3,731	3,764	3,798
0,0010	3,539	3,581	3,620	3,656	3,692	3,728	3,763	3,797
0,0015	3,533	3,579	3,617	3,653	3,689	3,725	3,761	3,794
0,0020	3,525	3,572	3,611	3,650	3,686	3,722	3,755	3,791
0,0025	3,515	3,563	3,602	3,641	3,677	3,713	3,749	3,785
0,0030	3,493	3,533	3,583	3,626	3,665	3,704	3,740	3,776

Максимальная относительная погрешность (отношение величины $F(C,\,\omega,\,\xi)\big|_{\xi=1}$ к $F(C,\,\omega,\,\xi)\big|_{\xi=0{,}5}$) наблюдается при $b = 0{,}003$; $\beta = 0{,}007$ и составляет 0,015. Поскольку эта погрешность оказалась небольшой, выражение (18) при вычисленных ω и C можно с достаточной степенью точности считать приближённым решением рассматриваемой задачи.

Анализируя табличные данные, можно сделать следующие выводы:

1) при $b \to 0$ собственные частоты совпадают с частотами при граничных условиях

$$Z(1,\,\tau) = 0; \quad Z_\xi(1,\,\tau) = 0; \tag{21}$$

2) с увеличением β (это равносильно увеличению изгибной жесткости) собственные частоты увеличиваются;

3) с увеличением b (это равносильно увеличению амплитуды) собственные частоты незначительно (в пределах 2% от максимальной величины) уменьшаются;

4) граничные условия при взаимодействии струны с опорой типа ролика или шкива при малых колебаниях можно записать в виде (21). Погрешность решения при этом будет увеличиваться с увеличением b.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарин Ю. П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // *ПММ*, 1964. — Т. 26, № 3. — С. 77–80.

Поступила в редакцию 26/II/2010;
в окончательном варианте — 20/IX/2010.

MSC: 74H45, 74K05

SUBSTATIATION OF BOUNDARY CONDITIONS WHEN DURING INTERACTION OF A STRING WITH BENDING HARDNESS WITH ROLLER BASIS

V. N. Anisimov, V. L. Lintvinov, A. E. Lukyanov

Syzran Branch of Samara State Technical University,
45, Sovetskaya str., Syzran, Samara region, 446001, Russia

E-mail: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

The paper considers the problem of vibrations in flexible link with bending hardness when one of the basis is a roller or a pulley. When vibrating the touch point link moves along the basis. Movement of touch point depends on the vibrating process that makes the problem non-linear. Using decomposition function describing vibrations in the number of touch points, boundary conditions are received when link and basis are interesting. Rating of dependence of frequency vibrations on amplitude is received. Stated, that at low amplitude vibrations boundary conditions can be written in the form of equality of angle to zero and displace of flexible link. Error when using such boundary conditions increases with increasing amplitude.

Key words: *string with bending hardness, private frequency vibrations, moving point of contact.*

Original article submitted 26/II/2010;
revision submitted 20/IX/2010.

Valeriy N. Anisimov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General-Theoretical Disciplines. *Vladislav L. Litvinov*, Teacher, Dept. of General-Theoretical Disciplines. *Alexey E. Lukyanov* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General-Theoretical Disciplines.