УДК 517.956.6

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: leni2006@mail.ru

С помощью метода И. М. Гельфанда и Х. Баррос—Нето, применённого ими к исследованию уравнения Трикоми, в пространстве распределений построены фундаментальные решения для уравнения Геллерстедта, а также для его обобщения. Рассмотрена вырождающаяся система дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, найдены её специальные решения в областях, ограниченных характеристиками уравнений (в гиперболической полуплоскости). В построении использованы элементы теории матриц, теории обобщённых функций и некоторые специальные функции (гипергеометрический ряд).

Ключевые слова: фундаментальное решение, обобщённые функции, функции от матриц.

Фундаментальные решения дифференциальных операторов — важный инструмент решения различных задач для уравнений в частных производных.

Пусть задан некоторый дифференциальный оператор L. Фундаментальное решение E оператора L — обобщённая функция, удовлетворяющая уравнению с δ-функцией в правой части: $LE = \delta$. Известно, что частное решение соответствующего неоднородного уравнения $Lu = f$ можно построить в виде свёртки фундаментального решения оператора L с правой частью уравнения $u = E * f$ [1].

В работах [2–4] И. М. Гельфанд и Х. Баррос—Нето построили фундаментальные решения дифференциального оператора Трикоми относительно точки $(x_0,\, y_0)$, лежащей в полуплоскости $y_0 < 0$, на основе специального решения уравнения Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ вида

$$E(x,\, y;\, x_0,\, y_0) = \\ = \left[4(-y_0)^3 + 4(-y)^3 - 9(x-x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6},\, \frac{1}{6}, 1; \zeta\right),$$

где

$$\zeta = \frac{9(x-x_0)^2 - 4(-y)^3 - 4(-y_0)^3 + 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}{9(x-x_0)^2 - 4(-y)^3 - 4(-y_0)^3 - 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}},$$

а $F(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \zeta)$ — гипергеометрическая функция [5].

Характеристики уравнения Трикоми, проходящие через точку $(x_0,\, y_0)$, делят плоскость на области D_I и D_I^* (D_I лежит ниже обеих характеристик, а D_I^* — дополнение D_I до $\mathbb{R}^2$), в которых $E_I(x, y; x_0, y_0) = \gamma E(x, y; x_0, y_0)$ и

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

$E_I^*(x,y;x_0,y_0) = -\gamma E(x,y;x_0,y_0)$ — фундаментальные решения соответственно в D_I и D_I^*; $\gamma{=}2^{-1/3}$.

Результаты работ [2–4] можно обобщить на случай уравнения Геллерстедта [6]:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где m — положительное нечетное число, а также уравнения с вещественным параметром $\alpha > 0$:

$$\operatorname{sign}(y)|y|^\alpha u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Представляет интерес следующая модификация уравнения:

$$\operatorname{sign}(y)|y|^A u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где A — постоянная квадратная матрица размерности $(n \times n)$, $u = u(x,y)$ — n-мерный вектор-столбец. Назовём это уравнение *матричным уравнением Геллерстедта*.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L_\alpha : C^2(X) \to C(X)$, $X \subset \mathbb{R}^2$, действующий по правилу

$$L_\alpha = \operatorname{sign}(y)|y|^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и его матричный аналог $L_A : M^2(X) \to M(X)$, $X \subset \mathbb{R}^2$ (под пространством $M^p(X)$ понимаем пространство $(n \times n)$-матриц с элементами из $C^p(X)$), действующий как

$$L_A = \operatorname{sign}(y)|y|^A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + I \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь I — единичная матрица $(n \times n)$.

Попытаемся получить частное решение неоднородного матричного уравнения Геллерстедта $L_A u = f$ аналогично скалярному случаю. Для этого построим его специальные частные решения.

Определение. *Специальным решением* матричного уравнения Геллерстедта назовём матрицу-функцию $\boldsymbol{E}$, удовлетворяющую уравнению

$$L_A \boldsymbol{E}(x,y;\, x_0,y_0) = I\delta(x-x_0; y-y_0).$$

Тогда для $\boldsymbol{E}$ получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{sign}(y)|y|^A \boldsymbol{E}_{xx} + \boldsymbol{E}_{yy} = I\delta(x-x_0; y-y_0).$$

Упростим полученное выражение. Пусть J — нормальная Жорданова форма матрицы A, к которой приводит невырожденное преобразование T, то есть $A = TJT^{-1}$ [7]. Поэтому

$$\operatorname{sign}(y) T|y|^J T^{-1} \boldsymbol{E}_{xx} + \boldsymbol{E}_{yy} = I\delta(x-x_0; y-y_0),$$

что после умножения слева на T^{-1} и замены $T^{-1}\boldsymbol{E} = W$ даёт

$$\operatorname{sign}(y)|y|^J W_{xx} + W_{yy} = I\delta(x-x_0; y-y_0).$$

Для определённости будем рассматривать $u = (u_1(x,\, y),\, u_2(x, y))^\top$ и матрицу (2×2) $A = (a_{ij})$ с различными положительными собственными значениями $\lambda_1,\, \lambda_2$. Тогда Жорданова форма J имеет вид $J = \mathrm{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2)$, а $|y|^J = \mathrm{diag}(|y|^{\lambda_1}, |y|^{\lambda_2})$. Распишем матричное равенство покомпонентно

$$\begin{pmatrix} |y|^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & |y|^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11xx} & W_{12xx} \\ W_{21xx} & W_{22xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11yy} & W_{12yy} \\ W_{21yy} & W_{22yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \delta,$$

где $T^{-1} = S = (s_{ij})$, из которого получаем четыре уравнения:

$$\mathrm{sign}(y)|y|^{\lambda_i} W_{ijxx} + W_{ijyy} = s_{ij}\delta, \quad i = 1,\, 2,\ j = 1,\, 2.$$

Применим замены вида $W_{ij} = V_{ij}s_{ij}$, которые сведут их к обычным уравнениям для нахождения фундаментальных решений с δ-функцией в правой части (или нулём, если какая-то из компонент s_{ij} равна нулю; тогда в нуль обратится и соответствующая компонента решения W_{ij}):

$$\mathrm{sign}(y)|y|^{\lambda_i} V_{ijxx} + V_{ijyy} = \delta, \quad i = 1,\, 2,\ j = 1,\, 2.$$

Решения таких уравнений — фундаментальные решения оператора L_{λ_i} относительно точки $(x_0,\, y_0)$, $y_0 < 0$. Они аналогичны решениям И. М. Гельфанда и Х. Баррос—Нето и выражаются через функцию

$$E(x, y;\, x_0, y_0;\, \lambda_i) = \Big[4(-y_0)^{\lambda_i+2} + 4(-y)^{\lambda_i+2} - \\ - (\lambda_i+2)^2(x-x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}\Big]^{-\beta_{\lambda_i}} F(\beta_{\lambda_i},\, \beta_{\lambda_i}, 1; \zeta_{\lambda_i}),$$

где

$$\beta_{\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{2(\lambda_i+2)},$$
$$\zeta_{\lambda_i} = \frac{(\lambda_i+2)^2(x-x_0)^2 - 4(-y)^{\lambda_i+2} - 4(-y_0)^{\lambda_i+2} + 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}}{(\lambda_i+2)^2(x-x_0)^2 - 4(-y)^{\lambda_i+2} - 4(-y_0)^{\lambda_i+2} - 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}},$$

$F(\beta_{\lambda_i},\, \beta_{\lambda_i},\, 1;\, \zeta_{\lambda_i})$ — гипергеометрическая функция. Если обозначить через $D_{I\lambda_i}$ и $D^*_{I\lambda_i}$ области, на которые плоскость делят характеристики уравнения $L_{\lambda_i}u{=}0$, и обозначить

$$\gamma(\lambda_i) = 2^{\frac{\lambda_i-2}{\lambda_i+2}}, \tag{1}$$

то

$$V_{ij} = V_{ij}(x, y; x_0, y_0; \lambda_i) = \begin{cases} \gamma(\lambda_i)E(x, y; x_0, y_0; \lambda_i), & (x, y) \in D_{I\lambda_i}; \\ -\gamma(\lambda_i)E(x, y; x_0, y_0; \lambda_i), & (x, y) \in D^*_{I\lambda_i}. \end{cases}$$

Учитывая, что $W_{ij} = V_{ij}s_{ij}$, и записывая W в виде матрицы, получим (опуская аргументы $(x,\, y;\, x_0, y_0)$)

$$W = \begin{pmatrix} V_{11}(\lambda_1)s_{11} & V_{12}(\lambda_1)s_{12} \\ V_{21}(\lambda_2)s_{21} & V_{22}(\lambda_2)s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\gamma(\lambda_1)E(\lambda_1)s_{11} & \pm\gamma(\lambda_1)E(\lambda_1)s_{12} \\ \pm\gamma(\lambda_2)E(\lambda_2)s_{21} & \pm\gamma(\lambda_2)E(\lambda_2)s_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \Xi_J \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \gamma(\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\lambda_1) & 0 \\ 0 & E(\lambda_2) \end{pmatrix} S,$$

где множитель Ξ_J отвечает за знак выражения в нужной области. Теперь перепишем (1) с использованием функций от матриц:

$$\gamma(J) = \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \gamma(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{\frac{\lambda_1-2}{\lambda_1+2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{\lambda_2-2}{\lambda_2+2}} \end{pmatrix} = 2^{(J-2I)K^{-1}},$$

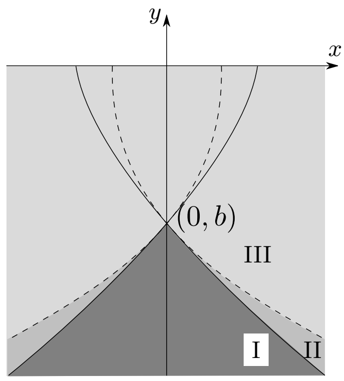
где $K = J + 2I$. Тогда

$$E(J) = \begin{pmatrix} E(\lambda_1) & 0 \\ 0 & E(\lambda_2) \end{pmatrix} = \exp\Big[-\frac{1}{2}JK^{-1}\ln\big(4(-y_0)^K + 4(-y)^K -$$
$$- K^2(x-x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K}\big)\Big] F\Big(\frac{1}{2}JK^{-1}, \frac{1}{2}JK^{-1}, 1; Z(J)\Big),$$

где

$$Z(J) = \begin{pmatrix} \zeta_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \zeta_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \Big(K^2(x-x_0)^2 - 4(-y_0)^K - 4(-y)^K +$$
$$+ 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K}\Big)\Big(K^2(x-x_0)^2 - 4(-y_0)^K - 4(-y)^K - 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K}\Big),$$

$F(A, B, C;\, z)$ — обобщение гипергеометрической функции на случай матричных параметров, а степенная функция выражена через экспоненту и логарифм, обобщения которых на матричный случай описаны, например, в [7]. За знак в областях I, II, III (см. рисунок) отвечает матрица Ξ:



$$\Xi_J = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (x,\, y) \in D_{I\lambda_1}, \quad \text{(I)}; \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (x,\, y) \in D_{I\lambda_2} \setminus D_{I\lambda_1}, \quad \text{(II)}; \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{I\lambda_2}, \quad \text{(III)}. \end{cases}$$

Теперь нужно вернуться к решению $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = TW = T\Xi_J\gamma(J)E(J)T^{-1} = T\Xi_J T^{-1}T\gamma(J)T^{-1}TE(J)T^{-1} = \Xi_A\gamma(A)E(A).$$

Итак, на основе фундаментальных решений, полученных И. М. Гельфандом и Х. Баррос—Нето в [2–4], построено специальное частное решение матричного уравнения Геллерстедта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с. [*Vladimirov V. S.* Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1981. 512 pp.]

2. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator // *Duke Math. J.*, 1999. Vol. 98, no. 3. Pp. 465–483.
3. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // *Duke Math. J.*, 2002. Vol. 111, no. 3. Pp. 561–584.
4. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, III // *Duke Math. J.*, 2005. Vol. 128, no. 1. Pp. 119–140.
5. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
6. *Gellerstedt S.* Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937. Vol. 26, no. 3. Pp. 1–32.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1988. 549 pp.]

Поступила в редакцию 22/XII/2010;
в окончательном варианте — 24/II/2011.

MSC: 35M10; 35A08

SPECIAL SOLUTIONS OF MATRIX GELLERSTEDT EQUATION

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `leni2006@mail.ru`

Fundamental solutions for the Gellerstedt equation and its generalization were obtained in the distribution space using the method applied by I. M. Gelfand and J. Barros–Neto to the studying the Tricomi equation. The degenerating system of the mixed-type partial differential equations was considered, its special solutions were constructed in the regions bounded by the characteristics of these equations (in the hyperbolic half-plane). The elements of the theory of matrices, theory of the generalized functions and the special functions (hypergeometric series) were used for this construction.

Key words: *fundamental solution, generalized functions, matrix functions.*

Original article submitted 22/XII/2010;
revision submitted 24/II/2011.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.