

УДК 517.958+622.233.6

## ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР О ЖЁСТКУЮ ПРЕГРАДУ ОДНОРОДНОГО И СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПОНИЖЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ ЖЁСТКОСТИ

*А. А. Битюрин, В. К. Манжосов*

Ульяновский государственный технический университет,  
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

E-mail: Denjgy0706@yandex.ru

*Рассматривается продольный упругий центральный удар неоднородной стержневой системы о жёсткую преграду при неударяющихся связях путём аналитического решения волнового дифференциального уравнения методом Даламбера. Стержневая система состоит из однородного стержня постоянного поперечного сечения и ступенчатого неоднородного стержня, имеющего два однородных участка различной длины и площади поперечных сечений. Связи с жёсткой преградой и между стержнями неударяющиеся.*

**Ключевые слова:** удар, деформация, математическое моделирование, скорость.

**1. Введение.** В основе технологических операций с использованием машин ударного действия лежит нанесение продольного удара неоднородного многоступенчатого упругого стержня или системы стержней.

Особый интерес представляет рассмотрение процесса удара рабочим инструментом по абсолютной жёсткой преграде, поскольку данная ситуация в технологическом процессе является аварийной. Очень важно, чтобы ударная машина имела минимальные повреждения и сохраняла свою работоспособность. В случае выполнения данного условия машина будет работать абсолютно надёжно при обработке технологической среды любой жёсткости. Следовательно, именно здесь наиболее остро встаёт вопрос правильного подбора рабочих элементов ударной машины.

**2. Постановка задачи.** В известных работах модель учёта неударяющихся связей в задачах продольного удара стержней сводится к тому, что процесс удара считался завершённым, если в ударном сечении возникла деформация растяжения и происходил разрыв связи. Возможность повторного соударения стержней исследователями не рассматривалась. Такая модель продольного удара, с одной стороны, отсекала информацию о последующем нагружении стержня при повторных соударениях, а с другой стороны, представляла некорректную информацию о восстановлении скорости стержня при продольном ударе.

В данной работе представлена математическая модель продольного удара стержней при разрывах связей и возникновении повторных соударений [1–6].

Рассмотрена модель продольного удара о жёсткую преграду системы однородного стержня постоянного поперечного сечения и неоднородного ступенчатого стержня (рис. 1). Масса однородного стержня  $m_1$ , длина  $l_1$ . Начальный и конечный участки ступенчатого стержня имеют длины соответственно  $l_2$  и  $l_3$ , масса стержня  $m_2$ . Общая длина обоих стержней равна  $l$ . Предударная скорость стержневой системы равна  $V_0$ . Все участки состоят из одного материала.

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновым

---

*Анатолий Александрович Битюрин* (к.т.н., доцент), доцент, каф. теоретической и прикладной механики. *Владимир Кузьмич Манжосов* (д.т.н., профессор), зав. кафедрой, каф. теоретической и прикладной механики.

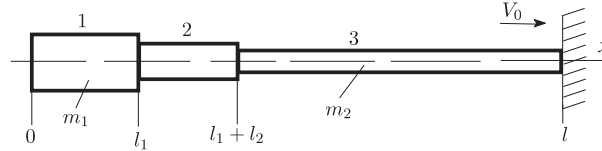


Рис. 1. Схема удара неоднородной стержневой системы о жёсткую преграду при неударяющих связях: 1 — однородный стержень; 2 — начальный участок ступенчатого стержня; 3 — конечный участок ступенчатого стержня

дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{при } i = 1, x \in [0, l_1]; \quad i = 2, x \in [l_1, l_1 + l_2]; \quad i = 3, x \in [l_1 + l_2, l],$$

где  $u_i(x, t)$  — продольное перемещение поперечного сечения соответственно однородного стержня 1, начального 2 и конечного 3 участков неоднородного стержня,  $x$  — координата сечения,  $t$  — время,  $a$  — скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние участков стержневой системы перед их соударением при  $t = t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении  $x = 0$  и равенство нулю скорости сечения  $x = l$  при взаимодействии ступенчатого стержня с жёсткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{если } \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} < 0, \quad (3)$$

а также равенство сил и скоростей в контактных сечениях  $x = l_1$  однородного стержня и начального участка ступенчатого стержня при непосредственном их взаимодействии:

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} < 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t}, \quad \text{если } \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} < 0, \quad (5)$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l_1, t) - u_2(l_1, t) \leq 0, \quad (6)$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода,  $A_1$  — площадь поперечного сечения однородного стержня,  $A_2$  — площадь поперечного сечения участка 2 ступенчатого стержня (участок 2).

В переходном сечении  $x = l_1 + l_2$  начального и конечного участков ступенчатого стержня краевые условия также определяют равенство сил и скоростей:

$$EA_2 \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t}, \quad (8)$$

где  $A_3$  — площадь поперечного сечения участка 3 ступенчатого стержня.

Разрыв контакта в сечениях  $x = l_1$  и  $x = l$  происходит при условии отрицательной разности скоростей в сечениях  $x = l_1$  однородного стержня и начального участка ступенчатого стержня (участка 2 стержневой системы), а также отрицательной скорости сечения  $x = l$  конечного участка ступенчатого стержня:

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} < 0. \quad (9)$$

Повторный удар в сечениях с неудерживающими связями может возникнуть после разрыва контакта в этих сечениях при условии положительной разности скоростей в сечениях  $x = l_1$  однородного стержня (участка 1 стержневой системы) и начального участка ступенчатого стержня, а также положительной скорости сечения  $x = l$ :

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} > 0. \quad (10)$$

**3. Метод решения.** Решение дифференциального уравнения (1) реализуется методом Даламбера в виде суммы двух разрывных функций [1]:

$$u_i(x, t) = f_i(at - x) + \varphi_i(at + x); \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = -f'_i(at - x) + \varphi'_i(at + x), \quad \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = a[f'_i(at - x) + \varphi'_i(at + x)] \quad (12)$$

при  $i = 1, x \in [0, l_1]$ ;  $i = 2, x \in [l_1, l_1 + l_2]$ ;  $i = 3, x \in [l_1 + l_2, l]$ ,

где  $f_i(at - x)$  — функция, описывающая прямые волны, распространяющиеся соответственно по участкам 1, 2 и 3 в направлении оси  $x$ ;  $\varphi_i(at + x)$  — функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам 1, 2 и 3 в противоположном направлении.

Перейдём к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны  $\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x)a/V_0$ ;  $\tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x)a/V_0$ , деформацию в сечении и его скорость  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$ ,  $\tilde{\nu}(x, t) = \nu(x, t)/V_0 = \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$ .

Осуществлено математическое моделирование продольного удара при длинах участков  $l_1, l_2, l_3$  стержневой системы, указанных в таблице. Отношение площадей поперечных сечений каждого предыдущего участка к последующему, выражающему понижению продольной жёсткости поперечных сечений стержневой системы в направлении жёсткой преграды:  $\tilde{A} = 2$ ,  $\tilde{A} = 3$ . Здесь  $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3$ .

| Длина участка 1 | Длина участка 2 | Длина участка 3 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| $l_1$           | $l_2$           | $l_3$           |
| 0,2l            | 0,2l            | 0,6l            |
| 0,2l            | 0,4l            | 0,4l            |
| 0,2l            | 0,6l            | 0,2l            |
| 0,4l            | 0,2l            | 0,4l            |
| 0,4l            | 0,4l            | 0,2l            |
| 0,6l            | 0,2l            | 0,2l            |

**4. Пример.** В качестве примера с применением метода характеристик [1] построено поле волновых состояний при продольном ударе однородного и ступенчатого стержней о жёсткую преграду при  $l_1 = l_2 = 0,2l, l_3 = 0,6l, \tilde{A} = 3$  (рис. 2). Области состояний I<sub>0</sub> — I<sub>16</sub>, II<sub>0</sub> — II<sub>17</sub>, III<sub>0</sub> — III<sub>26</sub> с соответствующими значениями  $\tilde{f}'(at - x)$ ,  $\tilde{\varphi}'(at + x)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(x, t)$ ,  $\tilde{\nu}(x, t)$  определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений.

Зависимость величины максимальной относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  в опасных сечениях от длин участков  $l_1, l_2, l_3$  и значения  $\tilde{A}$  стержневой системы легко проиллюстрировать на графиках  $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l)$ , представленных на рис. 3 (а, б).

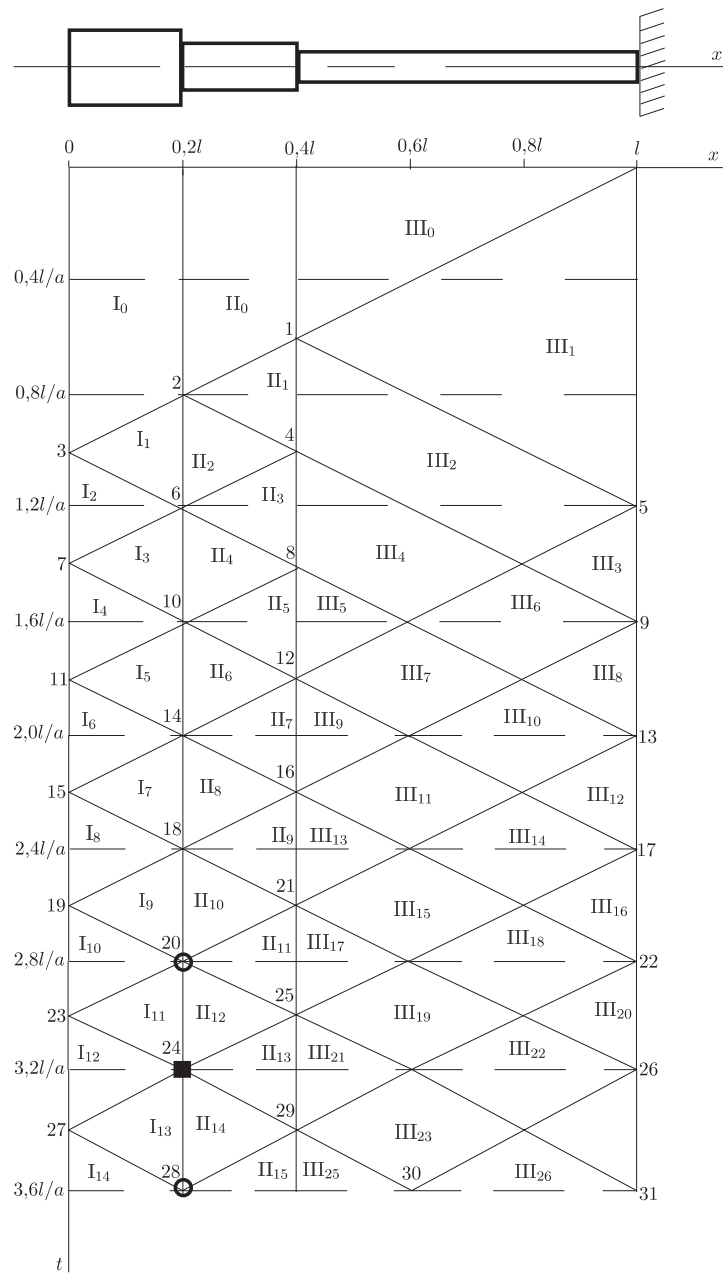


Рис. 2. Поле состояний при ударе стержневой системы о жёсткую преграду

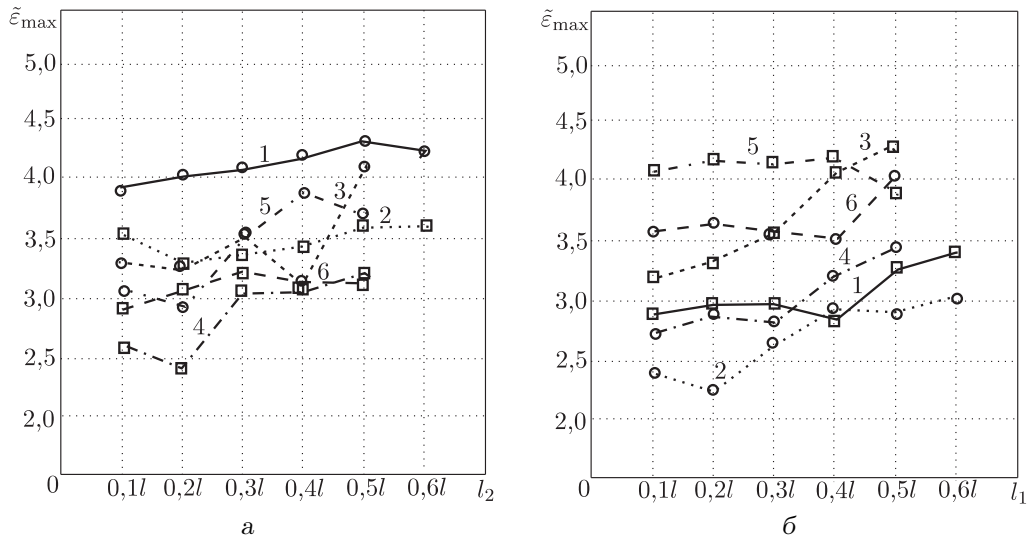


Рис. 3. Графики зависимости величины  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  от соотношения длин и поперечных размеров однородных участков стержневой системы

График на рис. 3, а представлен для  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  в зависимости от длины начального участка ступенчатого стержня  $l_2$  при постоянной длине  $l_1$  однородного стержня. На рис. 3, б представлен график для  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  в зависимости от длины  $l_1$  однородного стержня при постоянной длине  $l_2$  начального участка ступенчатого стержня. Соответственно в обоих случаях будет изменяться длина однородного участка  $l_3$ , поскольку общая длина стержневой системы постоянна и равна  $l$ . На рис. 3, а линия 1 выражает график зависимости  $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l_2)$  при  $\tilde{A} = 3$  и  $l_1 = 0,2l$ , линия 2 выражает график зависимости  $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l_2)$  при  $\tilde{A} = 2$  при  $l_1 = 0,2l$ , линия 3 — при  $\tilde{A} = 3$  и  $l_1 = 0,3l$ , линия 4 — при  $\tilde{A} = 2$  и  $l_1 = 0,3l$ , линия 5 — при  $\tilde{A} = 3$  и  $l_1 = 0,4l$ , линия 6 — при  $\tilde{A} = 2$  и  $l_1 = 0,4l$ . На рис. 3, б представлен график зависимости  $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l_1)$  при значениях  $l_2$ , равных  $0,2l, 0,3l, 0,4l$ , и  $\tilde{A}$ , равных 2 и 3 соответственно.

**Выводы.**

1. Исходя из анализа построенных графиков, можно сделать вывод, что величина максимальной относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  увеличивается с ростом соотношения  $\tilde{A}$ . При  $\tilde{A} = 3$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = 4,3$ , при  $\tilde{A} = 2$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = 4$ .
2. Из анализа этих же графиков, необходимо отметить, что величина  $\tilde{\varepsilon}_{\max}$  слабо зависит от соотношения длин участков стержневой системы  $l_1, l_2, l_3$ .

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. — М.: Наука, 1985. — 354 с.
2. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Возникновение ненагруженного состояния в однородном стержне при соударении стержневой системы с жёсткой преградой // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2006. — № 11. — С. 27–32.
3. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Изменение деформации на участках стержневой системы после повторного удара в контактном сечении // *Вестн. Ульянов. гос. техн. ун-та*, 2007. — № 3. — С. 23–28.
4. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Волновые процессы при продольном ударе стержня о ступенчатый стержень, соприкасающийся с жёсткой преградой // *ПММ*, 2009. — Т. 73, № 2. — С. 226–235.

5. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Математическое моделирование продольного удара неоднородной стержневой системы при увеличении продольной жесткости // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2009. — Т. 9, № 2. — С. 66–73.
6. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Продольный удар неоднородного стержня о жёсткую преграду. — Ульяновск: УлГТУ, 2009. — 164 с.

Поступила в редакцию 04/IX/2009;  
в окончательном варианте — 23/IX/2010.

MSC: 65M25

## LONGITUDINAL IMPACT ON RIGID BARRIER HOMOGENEOUS AND STEPPED BAR IS LOWERED LONGITUDINAL STIFFNESS

*A. A. Bitjurin, V. K. Manzhosov*

Ulyanovsk State Technical University,  
32, Severniy Venetz st., Ulyanovsk, 432027, Russia.

E-mail: Denjgy0706@yandex.ru

*Mathematical modelling of longitudinal elastic central blow of non-uniform rod system about a rigid barrier is carried out, at not keeping communications by the analytical decision of the wave differential equation by a method of D'alambert. The rod system consists of a homogeneous core of constant cross-section section and the step non-uniform core having two homogeneous sites of various length and the area of cross-section sections. Ties with a rigid barrier and between cores are not withholding.*

**Key words:** *blow, deformation, mathematical modelling, speed.*

Original article submitted 04/IX/2009;  
revision submitted 23/IX/2010.

---

*Anatoly A. Bitjurin* (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Theoretical & Applied Mechanics. *Vladimir K. Manzhosov* (Dr. Sci. (Techn.)), Head of Dept., Dept. of Theoretical & Applied Mechanics.