Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 118–123

УДК 530:512.81

МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА—ЯНГА—МИЛЛСА СО СПИНОРНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Н. Г. Марчук

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mails: nmarchuk2005@yandex.ru, nmarchuk@mi.ras.ru

Обсуждается модель, в которой частицы спина $1/2$ *обладают зарядом, порождающим неабелево калибровочное поле спина* 1 *со спинорной калибровочной симметрией. Масса частицы определяется константой взаимодействия частицы с этим калибровочным полем.*

Ключевые слова: *уравнение Дирака, уравнения Янга—Миллса, калибровочная симметрия, спинорная группа.*

В работах [1,2] предложен новый подход к уравнениям теории поля, основанный на так называемых *модельных уравнениях теории поля*. В настоящей работе указанный подход к уравнениям теории поля развивается в следующем направлении: предложены модельные уравнения Дирака—Янга—Миллса, описывающие взаимодействие частицы спина $1/2$ одновременно с двумя полями Янга—Миллса, причём одно из них обладает унитарной калибровочной симметрией, а другое — спинорной калибровочной симметрией.

Пусть $\mathcal{C}\ell(1, 3)$ — комплексная алгебра Клиффорда [1] с единицей e, с генераторами e^a, $a = 0, 1, 2, 3$, удовлетворяющими соотношениям $e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab}e$, где $\eta = \|\eta^{ab}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — диагональная матрица. И пусть $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(1, 3)$ — вещественная алгебра Клиффорда; $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(1, 3)$, $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(1, 3)$ — множества чётных и нечётных элементов вещественной алгебры Клиффорда соответственно.

Обозначим $\beta = e^0 \in \mathcal{C}\ell(1, 3)$. Введём операцию псевдоэрмитова сопряжения (антиинволюции) $* : \mathcal{C}\ell(1, 3) \to \mathcal{C}\ell(1, 3)$ формулами $(e^a)^* = e^a$, $a = 0, 1, 2, 3$, и

$$(\lambda U)^* = \bar\lambda U^*, \quad (UV)^* = V^* U^*, \quad (U + V)^* = U^* + V^*,$$

где U, V — произвольные элементы $\mathcal{C}\ell(1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\bar\lambda$ — комплексно сопряжённое число. Имеем $U^{**} = U$.

Теперь можно ввести операцию эрмитова сопряжения элементов алгебры Клиффорда формулой [3] $U^\dagger = \beta U^* \beta$.

Введём множество элементов алгебры Клиффорда [2]

$$\mathrm{Spin}_+(1, 3) = \{V \in \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(1, 3) : V^* V = e\}.$$

Множество $\mathrm{Spin}_+(1, 3)$ замкнуто по отношению к умножению элементов и образует группу (группу Ли) по отношению к умножению, называемую *связной спинорной группой*. В [2] обсуждается связь (двойное накрытие) группы $\mathrm{Spin}_+(1, 3)$ с собственной ортохронной группой Лоренца $\mathrm{SO}_+(1, 3)$.

Николай Гурьевич Марчук (к.ф.-м.н.), старший научный сотрудник, отд. математической физики.

Множество $\mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3)$ замкнуто по отношению к коммутатору $[u,v] = uv - vu$ и образует вещественную алгебру Ли группы Ли $\mathrm{Spin}_+(1,3)$ [4].

Пусть $t \in \mathcal{C}\ell(1,3)$ — ненулевой элемент, удовлетворяющий условиям

$$t^2 = t, \quad t^\dagger = t \tag{1}$$

и называемый *эрмитовым идемпотентом*. И пусть $\bar{t}J = Jt$, где $J = -e^1e^3$. В частности, в качестве такого эрмитова идемпотента t можно взять

$$\begin{aligned}
t_{(1)} &= \frac{1}{4}(e + e^0)(e + ie^{12}),\\
t_{(2)} &= \frac{1}{2}(e + e^0),\\
t_{(3)} &= \frac{1}{4}(3e + e^0 + ie^{12} - ie^{012}),\\
t_{(4)} &= e.
\end{aligned}$$

Эрмитов идемпотент t порождает левый идеал $I(t)$, двусторонний идеал $K(t)$, алгебру Ли $L(t)$ и группу Ли $G(t)$:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \{U \in \mathcal{C}\ell(1,3) : U = Ut\},\\
K(t) &= \{U \in I(t) : U = tU\},\\
L(t) &= \{U \in K(t) : U^\dagger = -U\},\\
G(t) &= \{U \in \mathcal{C}\ell(1,3) : U^\dagger U = e,\, U - e \in K(t)\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $\mathbb{R}^{1,3}$ — пространство Минковского с декартовыми координатами x^μ, где $\mu = 0,1,2,3$ и $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ — частные производные. Индексы, соответствующие координатам, обозначаются малыми греческими буквами μ, ν, α, β, …, пробегающими значения от 0 до 3. Метрика Минковского задаётся диагональной матрицей η. Обозначим через T^r_s множество тензорных полей типа (r,s) и ранга $r+s$ в пространстве Минковского. Через $\mathrm{T}_{[s]}$ обозначим множество ковариантных кососимметрических тензорных полей ранга s. Дальше будут рассматриваться тензорные величины со значениями в алгебрах Ли. Например, если u_μ — ковектор со значениями в алгебре Ли $L(t)$, то пишем $u_\mu \in L(t)\mathrm{T}_1$.

Генераторы алгебры Клиффорда и введенный в (1) элемент t являются скалярами пространства Минковского — они не меняются при лоренцевых заменах координат и не зависят от x.

Рассмотрим модельное уравнение Дирака [2]

$$ih^\mu(\partial_\mu\phi + \phi A_\mu - C_\mu\phi) - m\phi = 0, \tag{3}$$

где

i $C_\mu = C_\mu(x) \in \mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3)\mathrm{T}_1$ и вектор $ih^\mu = ih^\mu(x) \in i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3)\mathrm{T}^1$ удовлетворяет условиям

$$h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu = 2\eta^{\mu\nu}e, \quad \mu,\nu = 0,\,1,\,2,\,3; \tag{4}$$

ii элемент $\phi = \phi(x) \in I(t)$ является скаляром пространства Минковского, т.е. не меняется при лоренцевых заменах координат $(\phi(x) \to \phi(x(\acute{x})))$;

iii $A_\mu = A_\mu(x) \in L(t)\mathrm{T}_1$;
iv $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(x) \in L(t)\mathrm{T}_{[2]}$;
v m — вещественная константа.
Кроме этого полагаем, что элемент t, постоянная m и генераторы алгебры Клиффорда e^a являются известными, а все остальные величины h^μ, ϕ, A_μ, $F_{\mu\nu}$, C_μ — неизвестны.

В этом случае уравнение (3) называется *модельным уравнением Дирака с локальной спинорной симметрией.*

С помощью соотношения $\frac{1}{4}h^\mu h_\mu = e$ из уравнения (3) получим уравнение

$$ih^\mu(\partial_\mu\phi + \phi A_\mu - B_\mu\phi) = 0,$$

в которое входит новая переменная

$$B_\mu = C_\mu - \frac{m}{4} ih_\mu \in (\mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3) \oplus i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3))\mathrm{T}_1.$$

Нетрудно показать, что если величины ϕ, h^μ, A_μ, C_μ, $F_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям (4) и уравнениям Дирака—Янга—Миллса с унитарной калибровочной симметрией

$$\begin{aligned}
&ih^\mu(\partial_\mu\phi + \phi A_\mu - C_\mu\phi) - m\phi = 0,\\
&\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu},\\
&\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = \phi^\dagger\beta ih^\nu\phi,\\
&\partial_\mu h^\nu - [C_\mu, h^\nu] = 0,
\end{aligned}\tag{5}$$

то величины

$$\phi,\ h^\mu,\ A_\mu,\ B_\mu = C_\mu - \frac{m}{4}ih_\mu,\ F_{\mu\nu},\ G_{\mu\nu} = -\left(\frac{m}{4}\right)^2[ih_\mu, ih_\nu]$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&ih^\mu(\partial_\mu\phi + \phi A_\mu - B_\mu\phi) = 0,\\
&\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu},\\
&\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = \phi^\dagger\beta ih^\nu\phi,\\
&\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - [B_\mu, B_\nu] = G_{\mu\nu},\\
&\partial_\mu G^{\mu\nu} - [B_\mu, G^{\mu\nu}] = \frac{3}{16}m^3 ih^\nu.
\end{aligned}\tag{6}$$

Дальше эту систему уравнений будем считать основной. В систему уравнений (6) входят две пары уравнений Янга—Миллса для полей (A_μ, $F_{\mu\nu}$) и (B_μ, $G_{\mu\nu}$), соответственно.

Рассмотрим систему уравнений (6), в которой элемент t, постоянная m и генераторы алгебры Клиффорда e^a являются известными, а все остальные величины h^μ, ϕ, A_μ, $F_{\mu\nu}$, B_μ, $G_{\mu\nu}$ — неизвестны. Кроме этого
i вектор $ih^\mu = ih^\mu(x) \in i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3)\mathrm{T}^1$ удовлетворяет условиям (4);
ii элемент $\phi = \phi(x) \in I(t)$ является скаляром пространства Минковского;
iii $A_\mu = A_\mu(x) \in L(t)\mathrm{T}_1$;

iv $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(x) \in L(t)\mathrm{T}_{[2]}$;
v $B_\mu = B_\mu(x) \in (\mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3) \oplus i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3))\mathrm{T}_1$;
vi $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(x) \in (\mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3) \oplus i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3))\mathrm{T}_{[2]}$.

Отметим, что множество $\mathcal{C}\ell_2^{\mathbb{R}}(1,3) \oplus i\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(1,3)$ замкнуто по отношению к коммутатору и образует алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли симплектической группы [5].

Систему уравнений (6) будем называть *модельной системой уравнений Дирака—Янга—Миллса с двумя полями Янга—Миллса.*

В системе уравнений (6) масса частицы m входит только в правую часть уравнений Янга—Миллса и не входит в модельное уравнение Дирака. Поэтому система уравнений (6) позволяет дать новую трактовку массам элементарных частиц спина 1/2. А именно, масса частиц спина 1/2 возникает в результате взаимодействия этих частиц с полем Янга—Миллса (B_μ, $G_{\mu\nu}$) со спинорной калибровочной симметрией. Причём константа взаимодействия имеет вид $3m^3/16$.

Пусть величины ϕ, h^μ, A_μ, B_μ, $F_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям **i**–**vi** и уравнениям (6). Так как вектор h^μ стоит в правой части уравнений Янга—Миллса

$$\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - [B_\mu, B_\nu] = G_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu G^{\mu\nu} - [B_\mu, G^{\mu\nu}] = \frac{3}{16} m^3 i h^\nu,$$

для вектора h^μ выполняется неабелев закон сохранения

$$\partial_\mu h^\mu - [B_\mu, h^\mu] = 0. \tag{7}$$

Систему уравнений (6) следует рассматривать как обобщение системы уравнений (5). Рассмотрим те свойства модельных уравнений (6), которые связаны с эквивалентными преобразованиями и симметриями. Пусть h^μ, ϕ, B_μ, A_μ, $F_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям (6). Обозначим

$$\Theta = \{h^\mu, \phi, B_\mu, G_{\mu\nu}, A_\mu, F_{\mu\nu}, t\}.$$

Симметриями мы называем такие эквивалентные преобразования переменных, входящих в систему уравнений (6), при которых генераторы e^a алгебры Клиффорда и элемент t не меняются.

1 (Симметрия). Так как в систему уравнений (6) входят только тензорные величины, она является ковариантной относительно замен координат из группы Лоренца $\mathrm{O}(1,3)$.

2. Введём билинейные ковариантны модельной системы уравнений Дирака—Янга—Миллса (6):

$$iJ^{\mu_1\dots\mu_k} = i^{\frac{k(k-1)}{2}+1} \phi^\dagger \beta h^{[\mu_1} \dots h^{\mu_k]} \phi \in L(t)\mathrm{T}^{[k]}.$$

Билинейные ковариантны $J^{\mu_1\dots\mu_k}$ являются контравариантными кососимметрическими тензорами ранга k со значениями в эрмитовых элементах алгебры Клиффорда. Собственные значения билинейных ковариант вещественны.

3. Вектор $iJ^\mu = \phi^\dagger \beta i h^\mu \phi \in L(t)\mathrm{T}^1$ удовлетворяет неабелеву закону сохранения $\partial_\mu J^\mu - [A_\mu, J^\mu] = 0$.

4. Уравнения (6) являются ковариантными по отношению к следующему глобальному преобразованию, заданному унитарным элементом $U \in \mathcal{C}\!\ell(1,3)$, $U^\dagger = U^{-1}$, $\partial_\mu U = 0$,

$$\phi \to \phi U, \quad A_\mu \to U^{-1} A_\mu U, \quad F_{\mu\nu} \to U^{-1} F_{\mu\nu} U, \quad t \to U^{-1} t U. \tag{8}$$

5 (Симметрия). Уравнения (6) являются ковариантными относительно локального (калибровочного) преобразования с $U = U(x) \in G(t)$

$$\phi \to \phi U, \quad A_\mu \to U^{-1} A_\mu U - U^{-1}\partial_\mu U, \quad F_{\mu\nu} \to U^{-1} F_{\mu\nu} U. \tag{9}$$

Заметим, что для $U \in G(t)$ имеем $[U,\, t] = 0$ и, в отличие от преобразования (8), при рассматриваемом преобразовании эрмитов идемпотент t не меняется.

6 (Симметрия). Система уравнений (6) ковариантна относительно следующего локального преобразования переменных $\Theta \to \hat{\Theta}$, осуществляемого с помощью произвольного элемента $W = W(x) \in \mathrm{Spin}_+(1,3)$:

$$\hat{\phi} = W^{-1}\phi, \quad \hat{h}^\mu = W^{-1} h^\mu W, \quad \hat{B}_\mu = W^{-1} B_\mu W - W^{-1}\partial_\mu W.$$

7. Система уравнений (6) является ковариантной относительно преобразования (комплексного сопряжения)

$$ih^\mu \to \overline{ih^\mu} \quad (h^\mu \to -\bar{h}^\mu), \quad t \to \bar{t},$$
$$\phi \to \bar{\phi}, \quad A_\mu \to \bar{A}_\mu, \quad F_{\mu\nu} \to \bar{F}_{\mu\nu}, \quad B_\mu \to \bar{B}_\mu,$$

при этом предполагаем, что $\bar{e}^{a_1\ldots a_k} = e^{a_1\ldots a_k}$.

8 (Симметрия). Система уравнений (6) является ковариантной относительно дискретного преобразования (где $J = -e^1 e^3$):

$$ih^\mu \to \overline{ih^\mu} \quad (h^\mu \to -\bar{h}^\mu), \quad \phi \to \bar{\phi} J, \quad B_\mu \to \bar{B}_\mu,$$
$$A_\mu \to J^{-1}\bar{A}_\mu J, \quad F_{\mu\nu} \to J^{-1}\bar{F}_{\mu\nu} J.$$

В квантовой теории поля важную роль играют симметрии относительно унитарных групп. В [2] показано, что у спинорной группы $\mathrm{Spin}_+(1,3)$ есть унитарная подгруппа, изоморфная группе $\mathrm{SU}(2)$. С этой точки зрения систему уравнений (6) можно рассматривать так же, как систему уравнений с калибровочной симметрией относительно унитарной подгруппы спинорной группы.

Работа поддержана грантом президента РФ (НШ-7675.2010.1) и Отделением математики РАН (программа «Современные проблемы теоретической математики»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Марчук Н. Г.* Модельные уравнения Дирака–Максвелла с псевдоунитарной симметрией // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 425–435; англ. пер.: *Marchuk N. G.* Model Dirac–Maxwell equations with pseudounitary symmetry // *Theoret. and Math. Phys.*, 2008. Vol. 157, no. 3. Pp. 1723–1732.

2. *Марчук Н. Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2009. 304 с. [*Marchuk N. G.* Equations of field theory and Clifford algebras. Moscow, Izhevsk: RKhD, 2009. 304 pp.]
3. *Marchuk N. G., Shirokov D. S.* Unitary spaces on Clifford algebras // *Adv. in Appl. Cliff. Alg.*, 2008. Vol. 18, no. 2. Pp. 237–254.
4. *Lounesto P.* Clifford algebras and spinors / L.M.S. Lecture Notes. Vol. 239. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 306 pp.
5. *Marchuk N., Dyabirov R.* A symplectic subgroup of a pseudounitary group as a subset of Clifford algebra // *Adv. in Appl. Cliff. Alg.*, 2009. Vol. 20, no. 2. Pp. 343–350.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 13/II/2011.

MSC: 81T13; 15B99

DIRAC–YANG–MILLS MODEL EQUATIONS WITH A SPINOR GAUGE SYMMETRY

N. G. Marchuk

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mails: `nmarchuk2005@yandex.ru, nmarchuk@mi.ras.ru`

In the developed model where spin $1/2$ fermions acquire masses by an interaction with (spin 1) gauge field with spinor symmetry. Particle mass is determined by the constant interaction of the particle with the gauge field.

Key words: *Dirac equation, Yang–Mills equations, gauge symmetry, spinor group.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 13/II/2011.

Nikolay G. Marchuk (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Researcher, Dept. of Mathematical Physics.