Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21). — С. 297–301

УДК 519.8:517.91

# АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИЗВЕСТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

*О. Е. Каледин, Л. А. Сухарев*

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева,
430005, Саранск, ул. Большевистская, 68.

E-mails: kaledinoe@gmail.com, suharev_la@mail.ru

*Предложен метод построения конуса возможных решений по известным статистическим данным. Эти данные являются показаниями приборов, фиксирующих положение материальной точки через определенные промежутки времени. Так получается база данных, по которой можно построить дифференциальное включение. С определенного момента дифференциальное включение можно сделать управляемым и построить конус возможных решений так, чтобы управляемый процесс доставлял минимум заданному функционалу качества. Построен модельный пример, в котором по статистическим данным найдены конус возможных решений и управление с функционалом качества, пропорциональным кинетической энергии.*

**Ключевые слова:** *дифференциальное включение, управляемые системы, конус возможных решений.*

Рассмотрим динамическую механическую систему, движение которой «близко» к периодическому. Пусть положение системы характеризуется обобщёнными координатами $x_j$ и они через постоянные интервалы времени фиксируются несколькими приборами, имеющими различные погрешности.

Движение, определённое временным рядом $(t_i, x(t_i))$, будем называть $T$-периодическим ($T > 0$) с погрешностью $\varepsilon > 0$, если $\|x(t_i + T) - x(t_i)\| < \varepsilon$ по всем имеющимся узлам $t_i$ при условии, что левая часть неравенства определена. Другими словами, считается, что имеет место возмущение периодического движения $x = x(t)$ некоторой функцией $\varphi(t)$ такой, что $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$, то есть $x = x(t) + \varphi(t)$. Таким образом, за промежуток времени, равный периоду $T$, для одного и того же физического процесса в одинаковые моменты времени имеется множество значений обобщённых координат системы, полученных с помощью различных приборов.

Метод исследования таких динамических систем предложен Е. В. Воскресенским в работе [1]. Решаемая при этом задача состоит в том, чтобы по известным статистическим данным (показаниям приборов) спрогнозировать движение механической системы. Под прогнозом здесь понимается область всевозможных значений вектора $x = x(t)$, характеризующих движение системы на некотором промежутке времени. В работах [1, 2] предложено строить прогнозы с помощью дифференциальных включений: предполагается, что статистические данные порождаются некоторой абсолютно непрерывной функцией, производная которой удовлетворяет дифференциальному включению; а на основании решения уравнений сравнения для дифференциальных включений с учётом статистических данных строится конус возможных решений (границы прогноза). В настоящей работе данный подход применяется к задаче оптимального управления механическими системам с функционалом качества, который имеет вполне определённый физический смысл.

Пусть $AC(I_0)$ — класс абсолютно непрерывных функций, определенных на компакте $I_0 = [T_0, T_1]$ числовой оси и $Q \subset AC(I_0)$. На $I_0$ рассматриваются некоторые статистические данные (далее базы данных), которые порождаются абсолютно

*Олег Евгеньевич Каледин*, аспирант, каф. прикладной математики. *Лев Александрович Сухарев* (к.ф.-м.н.), зав. кафедрой, каф. алгебры и геометрии.

непрерывными вектор-функциями $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, $x \in Q$. Пара $(I_0, Q)$ порождает дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x), \quad t \in I_0, \quad 0 \leqslant \|x\| < R_0, \tag{1}$$

для которого справедлива теорема существования решения $x(t : t_0, x_0)$ Зарембы [3]. Далее на компакте $I_1 = [T_1, T_1 + T]$, где $T = T_1 - T_0$, рассматривается включение

$$\frac{dx}{dt} \in F_1(t,x,u), \quad t \in I_1, \quad 0 < \|x\| < R_0, \tag{2}$$

для которого анализируются свойства программных движений $x(t : t_0, x_0, u)$. В (2) функция $u = u(t,x)$ такая, что $u(t+T,x) \equiv u(t,x)$, а многозначная функция $F$ периодически продолжена на $I_1$: $F(t+T,x) = F(t,x)$, $t \in I_1$; $F_1(t,x,u) \stackrel{\text{def}}{=} F(t,u(t,x))$. Очевидно, что

$$F_1(t,x,u) = F(t,u), \quad t \in I_1. \tag{3}$$

Отметим, что $I_1$ называется управляемым промежутком, а $I_0$ — неуправляемым промежутком для (1).

Рассмотрим на числовой оси $\mathbb{R}$ сетку $S_t = \{t_i : T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_m = T_1\}$. Пусть $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, $x(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$, $x \in Q$, тогда $X_{T_0,T_1} = \{x_i : i = 0,1,\ldots,m\}$ — база данных. Будем говорить, что $\bar{x}(t : t_0, x_0)$ реализует базу данных $X_{T_0,T_1}$, если $X_{T_0,T_1} = \{\bar{x}(t_i) : i = 0,1,\ldots,m\}$, где $\bar{x}(t_i) = x_i$, $\bar{x}(t_0 : t_0, x_0) = x_0$. Все статистические данные $X_{T_0,T_1}$ могут быть представлены в виде объединения $l$ наборов данных $X^{(k)}_{T_0,T_1}$, $k = 1,2,\ldots,l$. Это могут быть данные, например, полученные в определённые моменты времени $t_i$ от $l$ приборов. Иначе, если $x^{(k)} \in Q$, $k = 1,2,\ldots,l$, то имеется соответствующая база данных на сетке $S_t$ : $X^{(k)}_{T_0,T_1} = \{x^{(k)}(t_i) : i = 0,1,\ldots,m\}$. В этом случае $X_{T_0,T_1} = \{X^{(k)}_{T_0,T_1} : k = 1,2,\ldots,l\}$ будем называть $l$-значной базой, а функцию $x^{(k)}$ — порождающей (реализующей) базу $X^{(k)}_{T_0,T_1}$. Отношения $\frac{x^{(k)}(t_i) - x^{(k)}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ назовём разделёнными разностями. Очевидно, что

$$\min_k \frac{x^{(k)}_j(t_i) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \leqslant \frac{x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \leqslant \max_k \frac{x^{(k)}_j(t_i) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \; .$$

Если $x^{(k)}$ — функции, реализующие базы $X^{(k)}_{T_0,T_1}$, то для точки $t \in I_0$, близкой к $t_{i-1}$, справедливы неравенства

$$\min_k \frac{x^{(k)}_j(t) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t - t_{i-1}} \leqslant \frac{x_j(t) - x_j(t_{i-1})}{t - t_{i-1}} \leqslant \max_k \frac{x^{(k)}_j(t) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t - t_{i-1}}. \tag{4}$$

Переходя к пределу $t \to t_{i-1}$ в (4), получим

$$\mu_j(t_{i-1}, x(t_{i-1})) \leqslant \frac{dx_j(t_{i-1})}{dt} \leqslant \lambda_j(t_{i-1}, x(t_{i-1})) \tag{5}$$

почти всюду при $i = 1,2,\ldots,m+1$. Здесь

$$\mu_j(t_{i-1}, x(t_{i-1})) = \lim_{t \to t_{i-1}} \min_k \frac{x^{(k)}_j(t) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t - t_{i-1}},$$

$$\lambda_j(t_{i-1}, x(t_{i-1})) = \lim_{t \to t_{i-1}} \max_k \frac{x^{(k)}_j(t) - x^{(k)}_j(t_{i-1})}{t - t_{i-1}}.$$

Задачу локализации неуправляемых движений будем решать без явного присутствия вектор-функций $\lambda$ и $\mu$.

Построение верхней границы локализации движений (конуса возможных траекторий) проводится исходя из следующих соображений. Пусть $\max \dot{x}_j(t) = k_{jm}^{(i)}$ при $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, где $t_i = T_0 + i(T_1 - T_0)/m$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $|k_{jm}^{(i)}| \leqslant \mu_j$. В этом случае на компакте $I_0$ функции $\lambda$ и $\mu$ являются кусочно-постоянными. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy_{jm}}{dt} = k_{jm}^{(i)}, \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

из которого имеем $y_{jm}(t) = k_{jm}^{(i)} t + C^{(i)}$, $C^{(i)} = y_{jm}(t_i) - k_{jm}^{(i)} t_i$ и $y_{j(m-1)}(t) \leqslant y_{jm}(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$, $m \in \mathbb{N}$. Вследствие монотонности значений $y_{jm}(t)$ существует предел

$$\lim_{m \to +\infty} y_{jm}(t) = y_j(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T_1.$$

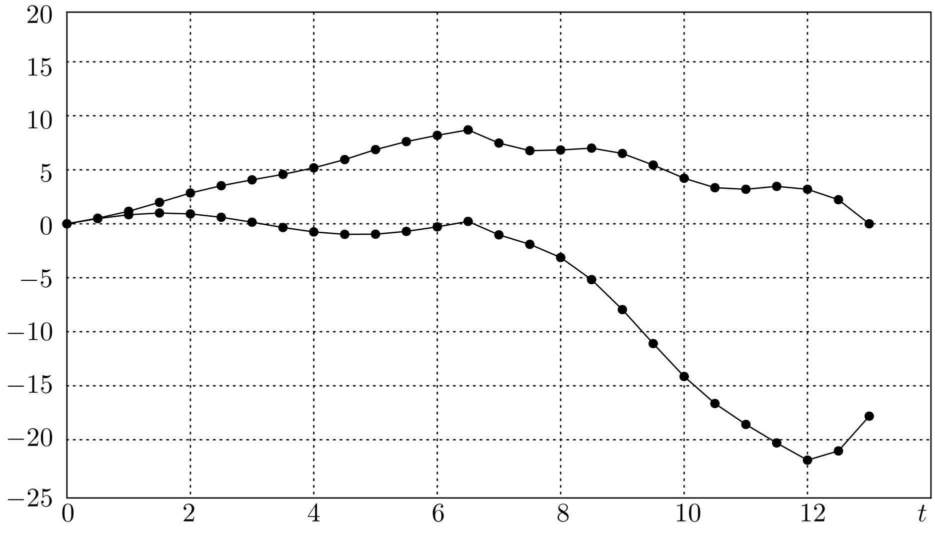
Отметим, что $k_{jm}$ при $m \to +\infty$ стремится к конечному пределу. Поэтому функция $y_j(t)$ является абсолютно непрерывной.

Аналогично строится функция $z_j(t)$, задающая нижнюю границу конуса.

Множество $K = \{x(t) : z(t) \leqslant x(t) \leqslant y(t)\}$ называется конусом возможных траекторий, который характеризует развитие процесса на временном промежутке $[T_0, T_1]$.

Описанным выше методом для любой механической системы, основываясь на статистической базе данных, которая представляет собой значения показаний различных приборов, можно построить конус возможных траекторий. Таким образом, не зная уравнений движения системы, можно определить область (конус возможных траекторий), в которой будет заключено движение, независимо от погрешности приборов. Движение системы всегда будет находиться между верхней и нижней составляющими конуса возможных траекторий. На рисунке при $t \in [0,\ 6{,}5]$ приведён конус возможных перемещений некоторой модельной механической системы.

Рассмотрим задачу управления на отрезке $[T_1, T_2]$ с управлением $u$ верхней границы. Предположим, что необходимо, чтобы в момент времени $t = T_2$ верхняя составляющая конуса была не выше, чем $x(T_2) = 0$, причём действие внешних сил было наименьшим.




Конус возможных траекторий на неуправляемом ($t \in [0, 6{,}5]$) и управляемом ($t \in [6{,}5, 13]$) участках

В период времени $[T_1, T_2]$ на каждом участке разбиения $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ составляющая границы конуса возможных траекторий определяется соответствующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = k_m^{(i)} + u_m^{(i)}, \quad \tau_{i-1} < t < \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $\tau_i = T_1 + (T_2 - T_1)/m$. На этих ломаных рассматривается функционал качества $I = \int_{T_1}^{T_2} f_0(t, y(t), \dot{y}(t))dt$, который на отрезке $[T_1, T_2]$ заменяется интегральной суммой [4]:

$$S = \sum_{i=1}^{m} f_0(\tau_i, y(\tau_i), k_m^{(i)} + u_m^{(i)})(T_2 - T_1)/m.$$

Необходимо найти на интервалах $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ такие кусочно-постоянные управления, чтобы $S = S(u_m^{(1)}, u_m^{(2)}, \dots, u_m^{(m)}) \to \min$.

Для механической системы рассмотрим принцип наименьшего действия, или принцип Гамильтона [5]. Действием $J$ за промежуток времени от $t_1$ до $t_2$ называется интеграл $J = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t)dt$, где $L$ — функция Лагранжа рассматриваемой системы:

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \sum_i \Big(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_i, t)\Big).$$

Интегрирование производится от момента времени $t_1$, в который положение системы характеризуется значениями координат $q_1$, до момента $t_2$, в который положение системы определяется значениями координат $q_2$.

Согласно принципу наименьшего действия система между положениями движется таким образом, что действие принимает наименьшее возможное значение, и функционал качества будет иметь следующий вид: $I = \int_{T_1}^{T_2} L(x, \dot{x}, t)dt \to \min$. Из равенств $y(T_1) = y_1$ и $y(T_2) = y^*$ можно получить условие

$$\sum_{i=1}^{m} u^{(i)} = y^* - \sum_{i=1}^{m} k^{(i)} - y(T_1). \tag{6}$$

Для того чтобы решить задачу по переводу точки $y_1$ в заранее заданную точку $y^*$, необходимо решить задачу на условный экстремум при уравнениях связи (6).

Функционал $I$ заменим соответствующей интегральной суммой $S_I$. Тогда требуется найти её минимум при условии (6):

$$S_I = \sum_{i=1}^{m} (k^{(i)} + u^{(i)})^2 \to \min.$$

Эту задачу в общем случае можно решать методом Лагранжа [6]. Однако в случае, когда для уравнения связи выполнены условия теоремы о неявной функции, выразим $u_k$ через остальные неизвестные и подставим его в функционал качества. Задача поиска условного экстремума сведётся к вопросу об обычном экстремуме [4]. Точка экстремума находится из системы $\partial S_I / \partial u^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Для модельного примера получена следующая система:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + u_j = y^* - y(T_1) - \sum_{i=1}^{m} k^{(i)} + k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{7}$$

где $n = 13$ — количество узлов сетки (показаний конкретного прибора).

Каждый элемент $u_i$ решения системы (7) представляет собой значение скорости, которое нужно придать системе на отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, чтобы в точке $T_2$ достичь необходимого значения $y^* = 0$. При этом в соответствии с принципом наименьшего действия энергия, затраченная на это изменение, будет минимальной, так как поиск решения системы (7) осуществляется исходя из минимума кинетической энергии.

Управление $u_i$ также оказывает влияние и на нижнюю составляющую конуса. Нижняя и верхняя составляющие конуса для модельного примера на управляемом участке изображены на рисунке при $t \in [6{,}5,\ 13]$. Любая прогнозная кривая — решение, описывающее движение, всегда будет находиться внутри конуса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Воскресенский Е. В.* Анализ баз данных и программных движений // *Труды Средневолжского математического общества*, 2008. — Т. 10, № 1. — С. 8–13.
2. *Воскресенский Е. В.* Оптимальные программные движения управляемых дифференциальных включений // *Труды Средневолжского математического общества*, 2007. — Т. 9, № 1. — С. 11–17.
3. *Zaremba S. C.* Sur les équations au paratingent // *Bull. Sci. Math.* (2), 1936. — Vol. 60, No. 5. — P. 139–160.
4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.
5. *Савельев И. В.* Основы теоретической физики. Т. 1. — М.: Наука, 1981. — 304 с.
6. *Алексеев В. М. Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2005. — 384 с.

Поступила в редакцию 06/X/2009;
в окончательном варианте — 18/VI/2010.

**MSC: 93A30, 49J15**

## BEHAVIOR ANALYSIS OF MECHANICAL SYSTEMS BASED ON KNOWN STATISTICAL DATA

***L. F. Sukharev, O. E. Kaledin***

Mordovian State University by N. P. Ogarev,
68, Bolshevistskaya st., Saransk, 430005, Russia.

E-mails: `kaledinoe@gmail.com`, `suharev_la@mail.ru`

*A method of constructing the cone of possible solutions for the known statistics. These data are indications of devices that fix the position of a point after a certain period of time. Thus we obtain the database which helps to construct a differential inclusion. From a certain point differential inclusion can be made manageable, and to build a cone of possible solutions so that the controlled process minimizes a given functional quality. A model example was developed, which according to statistics contains a cone of possible solutions and management with the functional qualities, proportional to the kinetic energy.*

**Key words:** *differential inclusion, control systems, cone of possible solutions.*

Original article submitted 06/X/2009;
revision submitted 18/VI/2010.

*Oleg E. Kaledin*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics. *Lev A. Sukharev* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Algebra & Geometry.