

Небесная механика и астрономия

УДК 521.182, 521.642

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ С УЧЁТОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

Д. А. Заусаев, Л. А. Соловьев

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: zadmitriy@gmail.com

Получены регулярные дифференциальные уравнения для задачи возмущенного движения. Разработаны вычислительный алгоритм и программа численного интегрирования уравнений движения небесных тел методом Эверхарта с учётом регуляризации и использованием оскулирующих элементов больших планет.

Ключевые слова: интерполяция, регуляризация, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения, метод оскулирующих элементов.

Численное интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы проводится путем совместного решения уравнений движения больших планет и исследуемого объекта. При решении задач, связанных с проблемой астероидной опасности, требуется проводить регулярные исследования движения свыше 7000 объектов на интервале времени порядка нескольких столетий. Создание высокоэффективных алгоритмов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел является необходимым условием для оперативного получения результатов проведенных исследований. В настоящее время требования к точности координат больших планет существенно возросли, так как они должны быть согласованы с высокоточными астрономическими наблюдениями.

Целью данной работы является увеличение точности координат планет с помощью банка данных оскулирующих элементов.

Разработаны вычислительный алгоритм и программа, реализующая численное интегрирование уравнения движения небесного тела с использованием оскулирующих элементов больших планет [1].

Основная идея реализации данного алгоритма заключается в следующем. На основе численной теории движения планет DE405 [2] создан банк данных оскулирующих элементов орбит больших планет и Луны с шагом 1 день на интервале времени с 1600 по 2200 гг. Координаты и скорости планет и Луны на любой момент времени внутри вышеуказанного промежутка вычисляются с помощью невозмущенных кеплеровских орбит.

Создание банка данных координат больших планет способствует понижению порядка системы дифференциальных уравнений с 72 до 6, что существенно сокращает расчётное время по сравнению с совместным интегрированием.

Дифференциальные уравнения движения небесного тела в гелиоцентрической системе координат с учётом релятивистских эффектов от Солнца имеют следующий вид [3]:

Дмитрий Анатольевич Заусаев, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.
Леонид Александрович Соловьев, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \\ & + \frac{k^2}{c^2} \left[(4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4}X - (1+\alpha)\frac{\dot{r}^2}{r^3}X + 3\alpha\frac{(X\dot{X})^2}{r^5}X + (4-2\alpha)\frac{(X\dot{X})}{r^3}\dot{X} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

где X — матрица-столбец с элементами x, y, z ; X_i — матрица-столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z — масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела; m_i, x_i, y_i, z_i — массы и гелиоцентрические координаты больших планет; r, Δ_i, r_i — расстояния, вычисляемые по формулам $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\Delta^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$; $\dot{X}$ — матрица-столбец с элементами $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; k — постоянная Гаусса, c — скорость света, α — параметр, характеризующий выбор системы координат. Случай $\alpha = 1$ соответствует стандартным координатам, случай $\alpha = 0$ — гармоническим координатам.

Дифференциальное уравнение (1) можно представить в более компактном виде:

$$\ddot{x} + \frac{K^2}{r^3}x = -\frac{\partial V}{\partial x} + P, \quad (2)$$

где x — вектор положения возмущаемого тела, V — возмущающий потенциал, P — дополнительная сила, $K^2 = k^2(M+m)$, $r = |x|$, M — масса центрального тела, m — масса возмущаемого тела. Уравнения (2) являются сингулярными в начале координат. При прохождении тела вблизи начала координат возникают большие гравитационные силы и происходит резкое изменение орбиты. При численном интегрировании для преодоления этой трудности приходится значительно уменьшать длину шага интегрирования, что приводит к увеличению ошибок округления. Это существенно сказывается на точности результатов проведенных расчётов.

Процедура преобразования сингулярных уравнений в регулярные уравнения называется регуляризацией. Регуляризация уравнений (2) проводится в два этапа. На первом этапе путём введения новой независимой переменной s , называемой фиктивным временем, получают регулярные функции, описывающие движение.

Второй этап регуляризации заключается в устранении сингулярности в самих дифференциальных уравнениях. Это достигается путем преобразования вектора физического пространства в четырехмерное параметрическое пространство с помощью матрицы преобразования Кустаанхеймо [4].

Применяя процедуру регуляризации к уравнению (1), получим следующую систему дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{cases} u'' + \frac{h_k}{2}u = \frac{|u|^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial u} + L^\top P \right), \\ h'_k = \left(\frac{\partial V}{\partial u}, u' \right) - 2(u', L^\top P), \quad t' = (u, u), \end{cases} \quad (3)$$

где u — четырёхмерный вектор с параметрами u_1, u_2, u_3, u_4 ; $h_k = (K^2 - 2|u'|^2)/|u|^2$ — уравнение энергии; $L^\top$ — транспонированная матрица преобразования Кустаанхеймо [4]; штрих означает дифференцирование по s .

Регуляризация уравнений (2) проводилась в два этапа. Сначала были получены дифференциальные уравнения возмущаемого тела с учётом гравитационных и релятивистских эффектов, обусловленных Солнцем, относительно новой независимой переменной s [4]. Координаты планет и Луны при численном интегрировании определялись с помощью банка данных DE405. Эти уравнения являются сингулярными. Затем с помощью преобразования координат были получены регулярные уравнения, подобные уравнениям (3).

Дифференциальные уравнения (3) регулярны, по сравнению с уравнениями (2) они обладают лучшей устойчивостью. Отмечая наиболее существенное преимуще-

ство уравнений (3) по сравнению с классическими уравнениями, следует также отметить, что их можно использовать для исследования движения небесных тел, имеющих любые эксцентриситеты и сближения с большими планетами.

Однако при совместном численном интегрировании уравнений движения больших планет и возмущаемого тела возникают трудности в согласовании физического времени с фиктивными временами, так как одному и тому же физическому времени соответствуют различные фиктивные времена для каждой планеты и возмущаемого тела.

Вычисление координат планет с помощью оскулирующих элементов устраняет вышеуказанную трудность, так как в этом случае нет необходимости в согласовании физического времени с фиктивными временами для координат больших планет.

Для решения системы дифференциальных уравнений (3) авторами разработан и реализован алгоритм с использованием метода Эверхарта [5]. Для определения области применимости данного алгоритма исследовалась эволюция орбит 10 короткопериодических комет.

Эволюция орбит вышеуказанных объектов на интервале времени 400 лет (1800–2200 гг.) исследовалась в работах [7]. Для численного интегрирования уравнений движения 10 короткопериодических комет использовался метод Эверхарта 27-го порядка с переменным шагом. При этом решение уравнений движения проводилось как путем совместного интегрирования, так и с использованием первого этапа регуляризации.

Сопоставление результатов вычислений, полученных путём совместного интегрирования уравнений движения больших планет и кометы, с результатами расчёта с учётом регуляризации и использованием оскулирующих элементов, не выявило существенных различий в элементах орбит, так как полученные расхождения находятся в пределах ошибок наблюдений.

Однако при интегрировании уравнений движения небесных тел, орбиты которых значительно отличаются от круговых, предпочтение следует отдавать методам с учётом регуляризации и использованием оскулирующих элементов больших планет, так как эти методы обладают лучшей устойчивостью и быстродействием.

Кроме того, следует отметить, что метод Эверхарта с учётом регуляризации и использованием банка данных оскулирующих элементов больших планет можно эффективно использовать для исследования эволюции орбит малых тел Солнечной системы, поскольку применение этого метода позволит значительно увеличить интервал интегрирования, а также сократит время проведенных исследований без существенной потери точности.

Работа выполнена в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № РНП.2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заусаев А. Ф., Заусаев Д. А. Численное интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы с использованием оскулирующих элементов больших планет / В сб.: *Тр. Шестой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи.* — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 125–130.
2. Standish E. M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405: Jet Prop Lab Technical Report. IOM 312. F-048, 1998.
3. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. — М.: Наука, 1972. — 382 с.
4. Штифель Е. Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
5. Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits // *Celestial Mechanics*, 1974. — Т. 10. — С. 35–55.
6. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1800 по 2204 гг. — М.: Машиностроение-1, 2007. — 410 с.
7. Заусаев А. Ф., Соловьев Л. А. Применение метода регуляризации к дифференциальным

уравнениям движения комет // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2009. — № 2(19). — С. 288–292.

Поступила в редакцию 30/VI/2010;
в окончательном варианте — 03/IX/2010.

MSC: 85-08

NUMERICAL INTEGRATION OF CELESTIAL BODIES EQUATIONS WITH TAKING INTO ACCOUNT REGULARIZATION AND USE OSCULATING ELEMENTS OF MAJOR PLANETS

D. A. Zausaev, L. A. Solov'ev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: zadmitriy@gmail.com

The regular differential equations for a problem of perturbed motion are received. The computing algorithm and the program of numerical integration of the equations of celestial motion by a method of Everhart taking into account regularization and use osculating of elements of major planets is developed.

Key words: *numerical integration, regularisation, differential equation of motion, method of the osculation elements.*

Original article submitted 30/VI/2010;
revision submitted 03/IX/2010.

Dmitriy A. Zausaev, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Leonid A. Solov'ev*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.