Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 140–150

УДК 517.956.32

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛЫКОВА

***О. А. Репин*[1], *С. К. Кумыкова*[2]**

[1] Самарский государственный экономический университет,
443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru

Доказана однозначная разрешимость задачи со смещением для системы дифференциальных уравнений первого порядка типа Лыкова. Доказательство проведено для различных значений параметров обобщённых операторов дробного интегро-дифференцирования, входящих в краевое условие.

Ключевые слова: *нелокальная краевая задача, система дифференциальных уравнений, интегральные уравнения.*

Введение. Одномерный поток влаги $u = u(\xi, t)$ в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры связан с влажностью $w = w(\xi, t)$ в точке ξ в момент времени t обобщённым законом переноса влаги [1]

$$u = -D\rho\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{D}{a_0^2}\xi^2\frac{\partial u}{\partial t},$$

где D — коэффициент диффузии, ρ — плотность, a_0 — коэффициент пропорциональности, зависящий от пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости.

Если u и w связаны законом сохранения массы

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

то получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$u = -D\rho\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{D}{a_0^2}\xi^2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \rho\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \tag{1}$$

Произведя замену $\rho w = v$, $x = t/a_0$, $y = \xi/a_0$, а затем обозначив $a = -a_0/D$ (a — безразмерная величина), системе (1) придадим следующий вид:

$$y^2 u_x + v_y - au = 0, \quad v_x + u_y = 0. \tag{2}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (2) по x, а второе по y и исключив v_{xy}, получим уравнение А. В. Лыкова для определения $u(x, y)$:

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} - au_x = 0. \tag{3}$$

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., профессор), зав. кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики. *Светлана Каншубиевна Кумыкова* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. теории функций.

Отметим, что уравнение (3) было приведено А. В. Бицадзе [2] как пример уравнения, для которого при $|a| \leqslant 1$ корректна по Адамару задача Коши с начальными данными на любом участке $x_0 < x < x_1$ линии $y = 0$ параболического вырождения, хотя нарушено известное условие Геллерстедта [3]:

$$\lim_{y \to 0} y^{1-\frac{m}{2}} a(x, y) = 0,$$

а А. М. Нахушевым [4] — как пример уравнения, для которого при $|a| = 1$ задача Дарбу поставлена некорректно и характеристики не являются равноправными носителями граничных данных.

Данная работа посвящена исследованию однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений Лыкова первого порядка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему (2) в области D, ограниченной характеристиками $AC : x - y^2/2 = 0$, $BC : x + y^2/2 = 1$ и отрезком $\overline{J}$: $0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$.

Задача. *Найти решения $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы (2) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup J)$, имеющие непрерывные вторые производные в области D, причём $u_x(x, 0)$, $u_y(x, 0)$ могут иметь интегрируемые особенности при стремлении x к точкам A и B, и удовлетворяющие условиям*

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

$$A(x)\Big(I_{0+}^{\delta_1, \delta_2, \frac{a-3}{4} - \delta_1} u[\theta_0(t)]\Big)(x) + \\ + B(x)\Big(I_{1-}^{\mu_1, \mu_2, -\frac{a+3}{4} - \mu_1} u[\theta_1(t)]\Big)(x) = C(x), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

где $|a| < 1$; $\varphi(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — известные функции такие, что

$$\varphi(x) \in C^2(\overline{J}) \cap C^3(J), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0, \tag{6}$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^3(J)$, $A^2(x) + B^2(x) \neq 0$ для $\forall (x) \in [0,1]$; δ_1, δ_2, μ_1, μ_2 — действительные постоянные, на которые ниже будут наложены определенные условия.

Здесь $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик системы (2), выходящих из точки $(x, 0)$ $(0 < x < 1)$, с характеристиками AC и BC соответственно; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — обобщённые интегралы и производные с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b;\, c;\, z)$, введённые в [5] (см. также [6, с. 326, 327]) и имеющие при действительных α, β, η и $x > 0$ следующий вид:

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} F\Big(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\Big) f(t) dt, \tag{7}$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$;

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (I_{0+}^{\alpha + n, \beta - n, \eta - n} f)(x), \tag{8}$$

где $0 < x < 1$, $\alpha < 0$, $n = [-\alpha] + 1$;

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\Big) f(t)dt, \quad (9)$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$;

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n (I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x), \quad (10)$$

где $0 < x < 1$, $\alpha < 0$, $n = [-\alpha] + 1$.

При $\beta = -\alpha$ операторы (7)–(10) сводятся к дробным интегралам и производным Римана—Лиувилля [6, с. 42, 44]:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad (11)$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$;

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = (I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta} f)(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (I_{0+}^{n-\alpha} f)(x),$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$;

$$(I_{1-}^{\alpha} f)(x) = (I_{1-}^{\alpha,-\alpha,\eta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad (12)$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$;

$$(D_{1-}^{\alpha} f)(x) = (I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta} f)(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n (I_{1-}^{n-\alpha} f)(x),$$

где $0 < x < 1$, $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$.

2. Однозначная разрешимость исследуемой задачи. Дифференцируя первое уравнение системы (2) по x, а второе — по y, получим

$$\begin{cases} y^2 u_{xx} + v_{yx} - a u_x = 0, \\ v_{xy} + u_{yy} = 0. \end{cases}$$

Исключая v_{xy} из системы, получим уравнение А. В. Лыкова для определения $u(x, y)$:

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} - a u_x = 0. \quad (13)$$

В характеристических координатах $\xi = x - y^2/2$, $\eta = x + y^2/2$ уравнение (13) преобразуется в хорошо известное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД).

Используя общее решение уравнения ЭПД [7] и возвращаясь к прежним координатам (x, y), выпишем общее решение уравнения (13):

$$u(x,\,y) = \int_0^1 \Phi\Big[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\Big] t^{-\frac{a+3}{4}} (1-t)^{\frac{a-3}{4}} dt - \\ - y\int_0^1 \Psi'\Big[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\Big] t^{-\frac{1+a}{4}} (1-t)^{\frac{a-1}{4}} dt. \quad (14)$$

На основании (14) и второго уравнения системы (2) ($v_x = -u_y$) имеем

$$v(x,y) = y\int_0^1 (2t-1)\Phi\Big[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\Big] t^{-\frac{a+3}{4}} (1-t)^{\frac{a-3}{4}} dt + \\ + \int_0^1 \Psi\Big[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\Big] t^{-\frac{1+a}{4}} (1-t)^{\frac{a-1}{4}} dt - \\ - y^2\int_0^1 (2t-1)\Psi'\Big[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\Big] t^{-\frac{1+a}{4}} (1-t)^{\frac{a-1}{4}} dt. \quad (15)$$

Здесь $\Phi(x)$ и $\Psi'(x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Полагая в (15) $y = 0$, найдём

$$v(x,\,0) = \Psi(x)\int_0^1 t^{-\frac{1+a}{4}} (1-t)^{\frac{a-1}{4}} dt.$$

Принимая во внимание условие (4) и формулу [8, п. 1.5 (1), с. 23]

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = B(\alpha,\beta), \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0,$$

где $B(\alpha,\,\beta)$ — бета–функция, будем иметь

$$\Psi(x) = \frac{\varphi(x)}{B\big(\frac{3-a}{4},\,\frac{3+a}{4}\big)}. \quad (16)$$

На основании формулы (14) и определений (7), (9) вычислим $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_1(x)]$ [9]:

$$u[\theta_0(x)] = \Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\frac{1-a}{4},0,\frac{a-3}{4}}\Phi(t)\Big)(x) - \Gamma\Big(\frac{3-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\frac{3-a}{4},-\frac{1}{2},\frac{a-3}{4}}\Psi'(t)\Big)(x),$$
$$u[\theta_1(x)] = \Gamma\Big(\frac{a+1}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\frac{a+1}{4},0,-\frac{a+3}{4}}\Phi(t)\Big)(x) - \Gamma\Big(\frac{a+3}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\frac{a+3}{4},-\frac{1}{2},-\frac{a+3}{4}}\Psi'(t)\Big)(x).$$

Подставив $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_1(x)]$ в краевое условие (5) и воспользовавшись формулами композиций [6, с. 327]

$$\begin{aligned} \big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\big)(x) &= \big(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f(t)\big)(x), \\ \big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\big)(x) &= \big(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f(t)\big)(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\gamma > 0$, будем иметь

$$A(x)\Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\delta_1+\frac{1-a}{4},\delta_2,\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Phi(t)\Big)(x)+ \\ +B(x)\Gamma\Big(\frac{1+a}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\mu_1+\frac{a+1}{4},\mu_2,-\frac{a+3}{4}-\mu_1}\Phi(t)\Big)(x)=F(x), \quad (18)$$

где

$$F(x)=C(x)+A(x)\Gamma\Big(\frac{3-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\delta_1+\frac{3-a}{4},\delta_2-\frac{1}{2},\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Psi'(t)\Big)(x)+ \\ +B(x)\Gamma\Big(\frac{3+a}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\mu_1+\frac{a+3}{4},\mu_2-\frac{1}{2},-\frac{a+3}{4}-\mu_1}\Psi'(t)\Big)(x).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$\delta_1=\tfrac{1-a}{4},\ \ \delta_2=0,\ \ \mu_1+\mu_2=-\tfrac{a+1}{4},\ \ -\tfrac{5+a}{4}<\mu_1<-\tfrac{a+3}{4},\ \ B(x)\neq 0 \quad (19)$$

или

$$\delta_1=\tfrac{1-a}{4},\ \ \delta_2=0,\ \ \mu_1+\mu_2=-\tfrac{a+1}{4},\ \ -\tfrac{1+a}{4}<\mu_1<\tfrac{3-a}{4},\ \ A(x)\neq 0, \quad (20)$$

то решение задачи (2), (4), (5) *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть справедливы условия (19) теоремы 1. Тогда в силу формулы (12) уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\Gamma\big(\frac{1-a}{4}\big)}{\Gamma\big(\frac{1+a}{4}\big)}\frac{A(x)}{B(x)}\Phi(x)+\Big(D_{1-}^{-(\mu_1+\frac{a+1}{4})}\Phi(t)\Big)(x)=\frac{1}{\Gamma\big(\frac{1+a}{4}\big)}\frac{F(x)}{B(x)}$$

или

$$\frac{\Gamma\big(\frac{1-a}{4}\big)}{\Gamma\big(\frac{1+a}{4}\big)}\frac{A(x)}{B(x)}\Phi(x)-\frac{1}{\Gamma\big(\frac{5+a}{4}+\mu_1\big)}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\Phi(t)dt}{(t-x)^{-\frac{1+a}{4}-\mu_1}}=\frac{1}{\Gamma\big(\frac{1+a}{4}\big)}\frac{F(x)}{B(x)}. \quad (21)$$

К уравнению (21) применим формулу обращения [6, с. 38, 39], [10, с. 47, 48]

$$f(x)=-\frac{\sin\pi\mu}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{F(t)dt}{(t-x)^{1-\mu}}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int_x^1\frac{f(t)dt}{(t-x)^{\mu}}=F(x), \quad 0<\mu<1,$$

и в результате получим

$$\Phi(x)+\int_x^1 K(x,t)\Phi(t)dt=F_1(x), \quad (22)$$

где

$$K(x,\,t)=\frac{\pi\Gamma\big(\frac{a+5}{4}+\mu_1\big)\Gamma\big(\frac{1-a}{4}\big)}{\sin\pi\big(\frac{a+5}{4}+\mu_1\big)\Gamma\big(\frac{1+a}{4}\big)}\frac{A(t)}{B(t)}\frac{1}{(t-x)^{\frac{a+5}{4}+\mu_1}},$$

$$F_1(x) = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{a+5}{4}+\mu_1\right)}{\sin\pi\left(\frac{a+5}{4}+\mu_1\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}\int_x^1 \frac{F(t)dt}{B(t)(t-x)^{\frac{a+5}{4}+\mu_1}}.$$

Уравнение (22) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре. Для исследования гладкости правой части $F_1(x)$ уравнения (22) преобразуем интегралы, входящие в $F(x)$.

Нетрудно видеть, что при $\delta_1 = (1-a)/4$, $\delta_2 = 0$ имеем

$$J_1(x) = \left(I_{0+}^{\delta_1+\frac{3-a}{4},\delta_2-\frac{1}{2},\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Psi'(t)\right)(x) = \left(I_{0+}^{1-\frac{a}{2},-\frac{1}{2},\frac{a}{2}-1}\psi'(t)\right)(x) =$$

$$= \frac{x^{\frac{a-1}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}\int_0^x \Psi'(t)(x-t)^{-\frac{a}{2}}F\left(\frac{1-a}{2},1-\frac{a}{2};1-\frac{a}{2};1-\frac{t}{x}\right)dt.$$

Известное свойство гипергеометрической функции $F(a;\, b;\, b;\, z) = (1-z)^{-a}$ [8, п. 2.8 (4), с. 109] позволяет записать $J_1(x)$ следующим образом:

$$J_1(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}\int_0^x \Psi'(t)(x-t)^{-\frac{a}{2}}t^{\frac{a-1}{2}}dt =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}\int_0^1 \Psi'(xz)z^{\frac{a-1}{2}}(1-z)^{-\frac{a}{2}}dz. \quad (23)$$

Так как $\mu_1 + (a+3)/4 < 0$, $\mu_1+\mu_2 = -(a+1)/4$, то

$$J_2(x) = \left(I_{1-}^{\mu_1+\frac{a+3}{4},\mu_2-\frac{1}{2},-\frac{a+3}{4}-\mu_1}\Psi'(t)\right)(x) = \left(D_{1-}^{-(\mu_1+\frac{a+3}{4})}\Psi'(t)\right)(x) =$$

$$= \frac{-1}{\Gamma\left(\frac{a+7}{4}+\mu_1\right)}\frac{d}{dx}\int_x^1 (t-x)^{\frac{a+3}{4}+\mu_1}\Psi'(t)dt =$$

$$= \frac{-(1-x)^{\frac{a+7}{4}+\mu_1}}{\Gamma\left(\frac{a+7}{4}+\mu_1\right)}\int_0^1 \Psi''\big(1-(1-x)z\big)(1-z)^{\frac{a+3}{4}+\mu_1}dz. \quad (24)$$

Соотношения (23), (24) и условия (6) позволяют утверждать, что $F(x) \in C([0,\, 1]) \cap C^1(J)$. Отсюда заключаем, что $F_1(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Таким образом, уравнение (22) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода при $B(x) \neq 0$ со слабой особенностью в ядре и правой частью $F_1(x) \in C(\overline{J})\cap C^2(J)$. В этом классе функций уравнение (22) имеет единственное решение $\Phi(x)$, которое может быть построено методом последовательных приближений [10].

По найденным $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ решения $u(x,\, y)$, $v(x,\, y)$ задачи (4), (5) для системы (2) находятся по формулам (14), (15).

При выполнении условий (20) теоремы 1 уравнение (22) принимает вид

$$\Phi(x) + \int_x^1 K_1(x,t)\Phi(t)dt = F_2(x), \quad (25)$$

где

$$K_1(x,\, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}\frac{B(x)}{A(x)}\frac{1}{(t-x)^{\frac{3-a}{4}-\mu_1}}, \quad F_2(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)A(x)}F(x).$$

Уравнение (25) также является интегральным уравнением Вольтерра второго рода при $A(x) \neq 0$ со слабой особенностью в ядре $K_1(x, t)$ и правой частью $F_2(x) \in C(\overline{J}) \cap C^1(J)$.

Далее аргументация доказательства теоремы 1 аналогична. □

Теорема 2. *Если* $\mu_1 = -(a+1)/4$, $\mu_2 = 0$, $\delta_1 + \delta_2 = (a-1)/4$, $(a-5)/4 < < \delta_1 < (a-1)/4$, $A(x) \neq 0$ *или* $\mu_1 = -(a+1)/4$, $\mu_2 = 0$, $\delta_1 + \delta_2 = (a-1)/4$, $(a-1)/4 < \delta_1 < (a+3)/4$, $B(x) \neq 0$, *то решение задачи* (2), (4), (5) *существует и единственно.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Если* $(a+1)/4 < \delta_1 < (a+3)/4$, $\delta_2 = -1$, $\mu_1 = \delta_1 - a/2$, $\mu_2 = -\big(\delta_1 + (1-a)/4\big)$, $A(x) = A = const \neq 0$, $B(x) = B = const \neq 0$ *и выполняются условия* (6), *то решение задачи* (2), (4), (5) *существует.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 3 соотношение (18) принимает вид

$$A\Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\delta_1+\frac{1-a}{4},-1,\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Phi(t)\Big)(x)+ \\ + B\Gamma\Big(\frac{1+a}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\delta_1+\frac{1-a}{4},-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Phi(t)\Big)(x) = F_3(x), \quad (26)$$

где

$$F_3(x) = C(x) + A\Gamma\Big(\frac{3-a}{4}\Big)\Big(I_{0+}^{\delta_1+\frac{3-a}{4},-\frac{3}{2},\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Psi'(t)\Big)(x)+ \\ + B\Gamma\Big(\frac{3+a}{4}\Big)\Big(I_{1-}^{\delta_1+\frac{3-a}{4},\frac{a-3}{4}-\delta_1,-\delta_1-\frac{3-a}{4}}\Psi'(t)\Big)(x).$$

Применив к обеим частям (26) оператор $I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}$ и используя первую формулу композиций из (17), будем иметь

$$A\Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big)\Phi(x) + B\Gamma\Big(\frac{1+a}{4}\Big)\times \\ \times\Big(I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}I_{1-}^{\delta_1+\frac{1-a}{4},-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Phi(t)\Big)(x) = \\ = \Big(I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}F_3(t)\Big)(x). \quad (27)$$

В работе [11, с. 349] получена формула

$$I_{0+}^{-p,1,r}\left(I_{1-}^{p,-p,s}f(t)\right)(x) = x^{p-1}\cos\pi p f(x) + \int_0^1 K(x,u)f(u)du, \quad (28)$$

где $0 < p < 1$ и

$$K(x, u) = \begin{cases} \frac{-\Gamma(r+1)}{\Gamma(1-p)\Gamma(p+r)}x^{-r-1}u^{p+r-1}F\left(p; r+1; r+p; \frac{u}{x}\right), & 0 < u < x; \\ \frac{-\Gamma(r+1)}{\Gamma(p-1)\Gamma(-p+r+2)}u^{p-2}F\left(r+1; 2-p; -p+r+2; \frac{x}{u}\right), & x < u < 1. \end{cases}$$

Используя (28), полагая $p = \delta_1 + (1-a)/4$, $r = -1/2$, $s = (a-3)/4$ и учитывая, что $\Gamma\big(1/2\big) = \sqrt{\pi}$ [8, п. 1.2 (10), с. 18], перепишем (27) в виде интегрального уравнения

$$\left[A\Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big) + B\Gamma\Big(\frac{1+a}{4}\Big)\cos\pi\Big(\delta_1 + \frac{1-a}{4}\Big)x^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}\right]\Phi(x)+$$
$$+\int_0^x K_{11}(x,t)\Phi(t)dt + \int_x^1 K_{12}(x,t)\Phi(t)dt = \Big(I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}F_3(t)\Big)(x), \quad (29)$$

где

$$K_{11}(x,\,t) = \frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}-\delta_1\right)\Gamma\left(\delta_1-\frac{a+1}{4}\right)}x^{-\frac{1}{2}}t^{\delta_1-\frac{a+5}{4}}\times$$
$$\times F\Big(\delta_1+\frac{1-a}{4},\frac{1}{2};\delta_1-\frac{a+1}{4};\frac{t}{x}\Big), \quad 0<t<x;$$

$$K_{12}(x,\,t) = \frac{-\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\delta_1-\frac{a+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5+a}{4}-\delta_1\right)}t^{\delta_1-\frac{a+7}{4}}\times$$
$$\times F\Big(\frac{1}{2},\frac{a+7}{4}-\delta_1;\frac{a+5}{4}-\delta_1;\frac{x}{t}\Big), \quad x<t<1.$$

Таким образом, существование решения задачи редуцировано к вопросу разрешимости уравнения (29). Исследуем гладкость его правой части. Найдем композиции обобщённых операторов правой части уравнения (29). Воспользуемся вначале первой формулой из (17):

$$I_3(x) = I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}\Big(I_{0+}^{\delta_1+\frac{3-a}{4},-\frac{3}{2},\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Psi'(t)\Big)(x) =$$
$$= \Big(I_{0+}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\Psi'(t)\Big)(x) = \Big(I_{0+}^{\frac{1}{2}}\Psi'(t)\Big)(x).$$

Учитывая определение (11) и равенство $\Psi'(0)=0$, после интегрирования по частям можно записать

$$I_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\Psi'(t)dt = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^1 \frac{\Psi'(xz)dz}{\sqrt{1-z}}.$$

Откуда следует, что $I_3(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Далее рассмотрим

$$I_4(x) = I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}\Big(I_{1-}^{\delta_1+\frac{1-a}{4},-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),\frac{a-3}{4}-\delta_1}\Psi'(t)\Big)(x) =$$
$$= \frac{d}{dx}\Big(I_{0+}^{\frac{a+3}{4}-\delta_1,0,-\frac{3}{2}}\Big(I_{1-}^{\delta_1+\frac{3-a}{4}}\Psi'(t)\Big)(s)\Big)(x) =$$
$$= \frac{d}{dx}\frac{x^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}-\delta_1\right)}\int_0^x (x-t)^{\frac{a-1}{4}-\delta_1}F\Big(\frac{a+3}{4}-\delta_1,\frac{3}{2};\frac{a+3}{4}-\delta_1;1-\frac{t}{x}\Big)dt\times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma\left(\delta_1+\frac{3-a}{4}\right)} \int_t^1 (s-t)^{\delta_1-\frac{a+1}{4}} \Psi'(s)ds.$$

Поменяв порядок интегрирования, с учётом формулы

$$\int_0^x dt \int_t^1 ds = \int_0^x ds \int_0^s dt + \int_x^1 ds \int_0^x dt$$

и свойства гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;\,a;z) = (1-z)^{-b}$ получим

$$I_4(x) = \frac{1}{\Gamma\big(\frac{a+3}{4}-\delta_1\big)\Gamma\big(\delta_1+\frac{3-a}{4}\big)} \frac{d}{dx} x^{\delta_1-\frac{a+3}{4}} \times$$
$$\times \left[\int_0^x \Psi'(s)ds \int_0^s t^{-\frac{3}{2}}(x-t)^{\frac{a-1}{4}-\delta_1}(s-t)^{\delta_1-\frac{a+1}{4}}dt+\right.$$
$$\left. + \int_x^1 \Psi'(s)ds \int_0^x t^{-\frac{3}{2}}(x-t)^{\frac{a-1}{4}-\delta_1}(s-t)^{\delta_1-\frac{a+1}{4}}dt\right] =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\big(\frac{a+3}{4}-\delta_1\big)\Gamma\big(\delta_1+\frac{3-a}{4}\big)} \frac{d}{dx} x^{\delta_1-\frac{a+3}{4}} \left[\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\delta_1+\frac{3-a}{4}\right)}{\Gamma\left(\delta_1+\frac{1-a}{4}\right)} \times\right.$$
$$\times \int_0^x s^{\delta_1-\frac{a+3}{4}} x^{\frac{a-1}{4}-\delta_1} F\Big(-\frac{1}{2}, \delta_1-\frac{a-1}{4}; \delta_1-\frac{a-1}{4}; \frac{s}{x}\Big)\Psi'(s)ds+$$
$$+ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+3}{4}-\delta_1\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}-\delta_1\right)} \times$$
$$\left.\times \int_x^1 s^{\delta_1-\frac{a+1}{4}} x^{\frac{a-3}{4}-\delta_1} F\Big(-\frac{1}{2}, \frac{a+1}{4}-\delta_1; \frac{a+1}{4}-\delta_1; \frac{x}{s}\Big)\Psi'(s)ds\right].$$

В силу формулы $\Gamma\left(-1/2\right) = -2\sqrt{\pi}$ [12, п. II.1, с. 773] окончательно имеем

$$I_4(x) = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\big(\frac{a+3}{4}-\delta_1\big)\Gamma\big(\delta_1+\frac{1-a}{4}\big)} \frac{d}{dx} \int_0^x s^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}(x-s)^{\frac{1}{2}}\Psi'(s)ds-$$
$$- \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\big(\delta_1+\frac{3-a}{4}\big)\Gamma\big(\frac{a+1}{4}-\delta_1\big)} \frac{d}{dx} \int_x^1 s^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}(s-x)^{\frac{1}{2}}\Psi'(s)ds.$$

Дифференцируя по x, производя замену в первом интеграле $s = xz$, а во втором — $s = 1-(1-x)z$ и учитывая формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$ [8, п. 1.2 (6), с. 18], получим

$$I_4(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\pi\Big(\frac{3+a}{4}-\delta_1\Big) x^{\delta_1-\frac{a+1}{4}} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}\Psi'(xz)dz-\right.$$
$$\left. -\sin\pi\Big(\frac{3-a}{4}+\delta_1\Big)(1-x)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}}\big(1-(1-x)z\big)^{\delta_1-\frac{a+3}{4}}\Psi'\big(1-(1-x)z\big)dz\right].$$

Отсюда следует, что $I_4(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Теперь преобразуем первое слагаемое в правой части интегрального уравнения (29):

$$I_5(x) = \left(I_{0+}^{-(\delta_1+\frac{1-a}{4}),1,-\frac{1}{2}}C(t)\right)(x) = \frac{d}{dx}\left(I_{0+}^{\frac{a+3}{4}-\delta_1,0,-\frac{3}{2}}C(t)\right)(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}-\delta_1\right)}\frac{d}{dx}\left[x^{\delta_1-\frac{a-3}{4}}\int_0^x (x-t)^{\frac{a-1}{4}-\delta_1}t^{-\frac{3}{2}}C(t)dt\right] =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}-\delta_1\right)}\int_0^1 (1-z)^{\frac{a-1}{4}-\delta_1}z^{-\frac{1}{2}}C'(xz)dz.$$

Откуда следует, что $I_5(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Из явного вида ядер $K_{11}(x, t)$ и $K_{12}(x, t)$, а также свойств слагаемых $I_3(x)$, $I_4(x)$, $I_5(x)$ правой части уравнения (29) при

$$A\Gamma\Big(\frac{1-a}{4}\Big) + B\Gamma\Big(\frac{1+a}{4}\Big)\cos\pi\Big(\delta_1 + \frac{1-a}{4}\Big)x^{\delta_1-\frac{a+3}{4}} \neq 0$$

следует, что уравнение (29) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре относительно $\Phi(x)$, где правая часть принадлежит классу $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. В этом классе существует решение $\Phi(x)$ уравнения (29). Зная $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, используя формулы (14), (15), нетрудно найти решения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задачи (4), (5) для системы (2). Доказательство теоремы 3 закончено. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лыков А. В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена // *Инж.-физ. ж.*, 1965. Т. 9, №3. С. 287–304. [*Lykov A. V.* Application of methods of thermodynamics of irreversible process to heat and mass transfer problems // *Inzh.-fiz. Zh.*, 1965. Vol. 9, no. 3. Pp. 287–304].
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
3. *Gellerstedt S.* Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937. Vol. 25, no. 29. Pp. 1–23.
4. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // *ДАН СССР*, 1970. Т. 195, №4. С. 776–779; англ. пер.: *Nakhushev A. M.* On the Darboux problem for hyperbolic equations // *Sov. Math., Dokl.*, 1970. Vol. 195, no. 4. Pp. 1567–1570.
5. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1978. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
7. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Высш. шк., 1977. 160 с. [*Smirnov M. M.* Degenerate hyperbolic equations. Minsk: Vyssh. shk., 1977. 160 pp.]
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.; ориг.: *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.

9. *Репин О. А.* О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1998. Т. 34, № 1. С. 110–113; англ. пер.: *Repin O. A.* Solvability of a problem with boundary conditions on characteristics for a degenerate hyperbolic equation // *Differ. Equations*, 1998. Vol. 34, no. 1. Pp. 113–116.
10. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. 232 с. [*Mihlin S. G.* Lectures on linear integral equations. Moscow: Fizmatlit, 1959. 232 pp.]
11. *Srivastava N. M., Saigo M.* Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problems involving the Euler–Darboux equation // *J. Math. Anal. Appl.*, 1987. Vol. 121, no. 2. Pp. 325–369.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 799 с. [*Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Integrals and series. Elementary functions. Moskva: Nauka, 1981. 799 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 26/II/2011.

MSC: 35L50; 35Q05, 47G20, 34B10

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LYKOV'S TYPE SYSTEM OF FIRST-ORDER

***O. A. Repin*[1], *S. K. Kumykova*[2]**

[1] Samara State Economic University,
141, Soviet Army st., Samara, 443090, Russia.
[2] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nal'chik, 360004, Russia.

E-mail: `matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru`

In this paper we prove the unique solution of the problem with a shift to a Lykov's type system of differential equations of first order. The proof is given for different values of the generalized operators of fractional integro-differentiation included in the boundary condition.

Key words: *nonlocal value boundary problem, system of differential equations, integral equations.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 26/II/2011.

Oleg A. Repin (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics & Econometrics. *Svetlana K. Kumykova* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Function Theory.