Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 151–157

УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

С. А. Сайганова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: syomina_sa@mail.ru

Для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана—Лиувилля исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования. Доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: *краевая задача, дробные производные и интегралы, дифференциальное уравнение дробного порядка, функция Миттаг—Лефлера.*

1. Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,\,y} u = 0 & (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ x u_{xx} + y u_{yy} + p u_x + q u_y = 0 & (y < 0,\ \frac{1}{2} < p,\ q < 1,\ q \geqslant p), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,\,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$ от функции $u(x,\,y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\,y} u\right)(x,\,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x,\,t)}{(y-t)^{\alpha}}\,dt \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0).$$

Результаты настоящей работы являются продолжением исследований, проведённых для уравнения (1) в [2]. Уравнение (1) рассматривается в области D, которая представляет собой объединение квадрата $D^{+} = \{(x,y):\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$, единичного интервала $I = (0,1)$ прямой $y = 0$ и области D^{-}, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками AC: $x + y = 0$, BC: $\sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$, $A(0,0)$, $B(1,0)$.

В настоящей работе используется $\left(I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+} f\right)(x)$ — оператор обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,\,b;\,c;\,z)$, введённый в [3] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$\left(I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+} f\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta,\,-\eta;\,\alpha;\,1-\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt \\ \hfill (\alpha > 0), \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n} \left(I^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}_{0+} f\right)(x) \quad (\alpha \leqslant 0, n = [-\alpha]+1), \end{cases}$$

Светлана Александровна Сайганова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

в частности $\left(I_{0+}^{0,\,0,\,\eta}f\right)(x) = f(x)$. Отметим, что если $\alpha > 0$, то справедливы следующие формулы:

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,-\alpha,\,\eta}f\right)(x) = \left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x), \qquad \left(I_{0+}^{-\alpha,\,\alpha,\,\eta}f\right)(x) = \left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x), \tag{2}$$

где $\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$ и $\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$ — операторы дробного соответственно интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1, с. 42, 44]:

$$\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \quad (\alpha > 0,\ x > 0), \tag{3}$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}}\,dt \quad (\alpha > 0,\ n = [\alpha]+1), \tag{4}$$

где $[\alpha]$ — целая часть α.

Для уравнения (1) ищется решение в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,\,y) = \varphi_0(y), \quad u(1,\,y) = \varphi_1(y), \quad 0 < y < 1, \tag{5}$$

$$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-q,\,\frac{1+q-p}{2},\,\frac{p+q-1}{2}} t^{q-1}u\left[\theta_0(t)\right]\right)(x) = Ax^{\frac{p+q-3}{2}}u(x,\,0) + Bx^{\frac{p+q-1}{2}+\varepsilon} \\ \left(0 < x < 1,\ \tfrac{1}{2} < p,\ q < 1,\ q \geqslant p,\ \varepsilon > 0\right), \tag{6}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,\,y) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{7}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,\,y)\right)_y = \lim_{y\to 0-}(-y)^q u_y(x,\,y) \quad (0 < x < 1). \tag{8}$$

Здесь $\theta_0(x) = x/4 - ix/4$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,\,0)$ с характеристикой AC; $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ — заданные функции, такие, что $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C(0,\,1)$; A и B — действительные константы, на которые ниже накладываются дополнительные условия.

Решение $u(x,\,y)$ поставленной задачи ищется в классе дважды дифференцируемых в области D функций таких, что

$$y^{1-\alpha}u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{+}), \qquad u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{-}), \qquad u_{xx} \in C\left(D^{+} \cup D^{-}\right), \\ u_{yy} \in C(\overline{D}^{-}), \quad y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y \in C\left(D^{+} \cup \{(x,\,y)\colon 0 < x < 1,\ y = 0\}\right). \tag{9}$$

2. Единственность решения задачи. Пусть решение исследуемой задачи существует. Введём обозначения:

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-} u(x,\,y) = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,\,y)_y\right) = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-}(-y)^q u_y(x,\,y) = \nu_2(x).$$

Известно [4, с. 108], что решение уравнения (1) в области D^+, удовлетворяющее условиям (5) и

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y)=\tau_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

записывается в виде

$$u(x,\,y)=\int_0^y \varphi_0(\eta)G_\xi(x,\,y;\,0,\,\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,\,y;\,1,\,\eta)d\eta+\Gamma(\alpha)\int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,\,y,\,\xi,\,0)d\xi;\quad (10)$$

где

$$G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\,\beta}^{1,\,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)-\right.$$
$$\left.-e_{1,\,\beta}^{1,\,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],\quad \beta=\frac{\alpha}{2},$$

$$e_{\alpha,\,\beta}^{\mu,\,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+\alpha n)\Gamma(\delta-\beta n)},\quad \alpha>\beta,\ \alpha>0,\ z\in\mathbb{C};$$
$$e_{1,\,\delta}^{1,\,\delta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma\left(\frac{(1-k)\alpha}{2}\right)}.$$

Также известно (см., например, [5, 6]), что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесённое из параболической области D^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,\tau_1''(x).\quad (11)$$

Используя результаты работы [7], нетрудно найти функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое из гиперболической области D^- на линию $y=0$. Оно имеет вид

$$k_2\left(I_{0+}^{2-2q,\,q-p,\,q-1}\nu_2(t)\right)(x)=x^{p-1}(A-k_1)\tau_2(x)+Bx^{p+\varepsilon},\quad (12)$$

где

$$k_1=\frac{2^{p-q}\Gamma(2q-1)}{\Gamma(q-\frac{1}{2})},\qquad k_2=-\frac{2^{p+3q-1}\Gamma(2-2q)}{\Gamma(\frac{3}{2}-q)}.$$

Применив к обеим частям (12) оператор $\left(I_{0+}^{2-2q,\,q-p,\,q-1}\right)^{-1}=I_{0+}^{2q-2,\,p-q,\,1-q}$, получим

$$k_2\nu_2(x)=(A-k_1)\left(I_{0+}^{2q-2,\,p-q,\,1-q}t^{p-1}\tau_2(t)\right)(x)+B\left(I_{0+}^{2q-2,\,p-q,\,1-q}t^{p+\varepsilon}\right)(x).$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если функция* $\tau_1(x)$ *достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке* $[0,\,1]$ *в точке* $x = x_0$ $(0 < x_0 < 1)$, *то* $\nu_1(x_0) \leqslant 0$ $(\nu_1(x_0) \geqslant 0)$.

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из соотношения (11).

Лемма 2. *Если функция* $\tau_2(x)$ *достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке* $[0,\,1]$ *в точке* $x = x_0$ $(0 < x_0 < 1)$, $B = 0$, $A - k_1 < 0$, *то* $\nu_2(x_0) > 0$ $(\nu_2(x_0) < 0)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Теорема 1. *Пусть* $A - k_1 < 0$ *и* $B = 0$. *Если существует решение исследуемой задачи для уравнения* (1), *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,\,y)$ — решение однородной задачи, но $u(x,\,y) \not\equiv 0$ в области $\widetilde{D} = D^+ \cup \overline{AB} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_2B}$, где $A_1(0,\,1)$, $A_2(1,\,1)$. Пусть $Q \in \widetilde{D}$ — точка положительного максимума. В силу однородных условий Q не может принадлежать $\overline{AA_1} \cup \overline{A_2B}$. На основании принципа экстремума для нелокального параболического уравнения [8, с. 47] Q не может принадлежать $D^+ \cup \overline{A_1A_2}$ и поэтому $Q \in I = AB$, т. е. $Q(x_0,\,0)$. По лемме 1 $\nu_1(x_0) \leqslant 0$, $x_0 \in I$. Так как $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau_(x)$, то $\max\limits_{\overline{I}} \tau(x) = \tau(x_0)$. По лемме 2 $\nu_2(x_0) > 0$, что противоречит условию (8). Следовательно, $u(x,\,y) \equiv 0$ и, в частности, $\tau_1(x_0) = 0$ на I. Но тогда на основании равенства $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ из (12) следует, что $\nu_2(x) = 0$. Откуда получаем, что $u(x,\,y) \equiv 0$ и в области $\overline{D^-}$. Теорема 1 доказана. □

3. Существование решения задачи. Существование решения исходной задачи приведём для случая $p = q$ и сведём её к дифференциальному уравнению дробного порядка. Из равенства (12) имеем

$$\tau_2(x) = m_1 x^{1-p} \left(I_{0+}^{2-2q,\,q-p,\,q-1} \nu_2(t) \right)(x) + m_2 x^{1+\varepsilon}, \tag{13}$$

где $m_1 = k_2/(A - k_1)$, $m_2 = B/(k_1 - A)$, $A < k_1$. Последовательно применяя формулы [3]

$$x^{\alpha+\beta+\eta} \left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} \varphi(t) \right)(x) = \left(I_{0+}^{\alpha,\,-\alpha-\eta,\,-\alpha-\beta} \varphi(t) \right)(x), \quad \alpha > 0, \quad \beta, \eta \in \mathbb{R},$$
$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,\delta,\,\gamma} \varphi(t) \right)(x) = \left(I_{0+}^{\alpha,\,\gamma,\,\delta} t^{\gamma-\delta} \varphi(t) \right)(x), \quad \alpha > 0, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R},$$

приведём равенство (13) к виду

$$\tau_2(x) = m_1 \left(I_{0+}^{2-2q,\,p+q-2,\,q-1} t^{p-1} \nu_2(t) \right)(x) + m_2 x^{1+\varepsilon}. \tag{14}$$

Полагая в соотношении (14) $p = q$, дважды дифференцируя обе части этого равенства по переменной x и учитывая (2) и (4), имеем

$$\tau_2''(x) = m_1 \left(D_{0+}^{2q} t^{q-1} \nu_2(t) \right)(x) + m_2 (1+\varepsilon) \varepsilon x^{\varepsilon-1}.$$

Согласно условиям сопряжения (7) и (8) $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ при $0 < x < 1$. Обозначив $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$ и учитывая соотношение (11), приходим к дифференциальному уравнению дробного порядка $2q$ $(1 < 2q < 2)$ вида

$$\left(D_{0+}^{2q} t^{q-1}\nu(t)\right)(x) = \lambda_1\nu(x) + \lambda_2 x^{\varepsilon-1}, \tag{15}$$

где $\lambda_1 = \Gamma(1+\alpha)/m_1$, $\lambda_2 = -m_2(1+\varepsilon)\varepsilon/m_1$.

Известно (см., например, [9, с. 102]), что решение дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha > 0$

$$\left(D_{0+}^{\alpha}[t^{\alpha(1-m)}\varphi(t)]\right)(x) = a\varphi(x) + bx^{\mu}, \tag{16}$$

где $\alpha > 0$, $m > 0$, $\mu > -1$, $0 < x < d < \infty$, даётся формулой

$$\varphi(x) = \frac{b\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu+\alpha)}\, x^{\alpha m+\mu}\mathrm{E}_{\alpha,\, m,\, \frac{m+\mu}{\alpha}}\left(ax^{\alpha\mu}\right). \tag{17}$$

Здесь $\mathrm{E}_{\alpha,\, m,\, l}(z)$ — специальная функция типа Миттаг—Леффлера:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\, m,\, l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{\Gamma[\alpha(im+l)+1]}{\Gamma[\alpha(im+l+1)+1]},$$
$$(n = 1,\, 2,\, \ldots) \text{ с } \alpha > 0, \quad m > 0, \quad l \in \mathbb{R},$$
$$\alpha(jm+l) \neq 0,\, -1,\, -2,\, \ldots \quad (j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

введённая в работе [10], при $m = 1$ с точностью до множителя совпадает с функцией Миттаг—Леффлера (см. [1, с. 33], [11, с. 17]):

$$\mathrm{E}_{\alpha,\, 1,\, l}(z) = \Gamma(\alpha l+1)\mathrm{E}_{\alpha,\, \alpha l+1}(z), \qquad \mathrm{E}_{\alpha,\, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Уравнение (15) суть не что иное, как уравнение вида (16) с $\varphi(x) = \nu(x)$, $\alpha = 2q$, $m = 1/2 + 1/(2q)$, $a = \lambda_1$, $b = \lambda_2$, $\mu = \varepsilon - 1$, и поэтому решение вида (17) для уравнения (15) даётся формулой

$$\nu(x) = \frac{\lambda_2\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+2q)}\, x^{\varepsilon+q}\mathrm{E}_{2q,\, \frac{1}{2}+\frac{1}{2q},\, \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\lambda_1 x^{1+q}). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (14) (с $\tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_2(x) = \nu(x)$, $p = q$), получаем выражение для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = \frac{m_1\lambda_2\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+2q)}\left(I_{0+}^{2-2q} t^{2q+\varepsilon-1}\mathrm{E}_{2q,\, \frac{1}{2}+\frac{1}{2q},\, \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\lambda_1 t^{1+q})\right)(x). \tag{19}$$

Подставляя (19) в формулу (10) (с $\tau_1(x) = \tau(x)$), получаем в явном виде решение $u(x,\, y)$ исследуемой задачи для уравнения (1).

Используя полученное решение, непосредственно проверяем выполнение краевых условий (5), (6) и условий сопряжения (7), (8), а также принадлежность полученного решения $u(x, y)$ поставленной задачи классу функций (9).

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $q = p$, $1/2 < q < 1$, $A < k_1$, *то решение задачи* (5), (8) *для уравнения* (1) *существует и определяется формулой* (10), *где* $\tau_1(x) = \tau(x)$ *и задаётся соотношением* (19).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika. 688 pp.]
2. *Kilbas A. A., Repin O. A.* An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partional fractional derivative // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010. Vol. 13, no. 2. Pp. 69–84.
3. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1978. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
4. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. [*Pskhu A. V.* Partial differential equations of fractional order. Moskva: Nauka, 2005. 199 pp.]
5. *Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // *Изв. Кабар.-Балкар. научн. центра РАН*, 2002. № 1(8). С. 6–8. [*Gekkieva S. Kh.* A boundary value problem for the generalized transport equation with fractional derivative in the semi-infinite domains // *Izv. Kabar.-Balkar. nauchn. tsentra RAN*, 2002. no. 1(8). Pp. 6–8].
6. *Килбас А. А., Репин О. А.* Аналог задачи Бицадзе—Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // *Дифференц. уравнения*, 2003. Т. 39, № 5. С. 638–644; англ. пер.: *Kilbas A. A., Repin O. A.* An Analog of the Bitsadze–Samarskii Problem for a Mixed Type Equation with a Fractional Derivative // *Differ. Equ.*, 2003. Vol. 39, no. 5. Pp. 674–680.
7. *Репин О. А., Шувалова Т. В.* Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 6. С. 848–851; англ. пер.: *Repin O. A., Shuvalova T. V.* Nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed type with two degeneration lines // *Differ. Equ.*, 2008. Vol. 44, no. 6. Pp. 876–880.
8. *Нахушева В. А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с. [*Nakhusheva V. A.* Differential equations of mathematical models of nonlocal processes. Moskva: Nauka, 2006. 173 pp.]
9. *Kilbas A. A., Saigo M.* On Mittag–Leffler type function and applications // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1998. Vol. 7, no. 1–2. Pp. 97–112.
10. *Kilbas A. A., Saigo M.* On solution of integral equation of Abel–Volterra type // *Differ. Integral Equ.*, 1995. Vol. 8, no. 5. Pp. 993–1011.
11. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [*Djrbashian M. M.* Integral transforms and representations of functions in the complex domain. Moskva: Nauka, 1966. 672 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 14/II/2011.

MSC: 35M10; 26A33, 33C05, 33E12

SOLUTION IN EXPLICIT FORM OF NON-LOCAL PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARTIAL FRACTIONAL DERIVATIVE OF RIEMANN–LIOUVILLE

S. A. Sayganova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: syomina_sa@mail.ru

A non-local problem for a mixed type equation with partial fractional derivative of Riemann–Liouville is studied, boundary condition of which contains generalized operator of fractional integro-differentiation. Unique solution of the problem is then proved.

Key words: *boundary value problem, fractional derivatives and integrals, fractional differential equation, Mittag–Leffler function.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 14/II/2011.

Svetlana A. Sayganova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.