Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 172–178

УДК 530.14

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ПАРКЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. О. Шишанин

Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

E-mail: shishandr@rambler.ru

Рассматривается сравнение планарного и планарно-паркетного приближений в нульмерных эрмитовых матричных моделях. Обсуждается, как паркетное приближение воспроизводит результаты планарного подхода для матричной модели ϕ^4, многоследовой модели, двуматричной модели и матричной модели Голдстоуна.

Ключевые слова: *матричные модели, планарное приближение, уравнения Швингера—Дайсона, паркетные уравнения.*

Введение. Основным методом исследования в квантовой теории поля является теория возмущений, которая справедлива при малых константах связи. Паркетное приближение было предложено группой Ландау для исследования квантовой электродинамики и мезонной теории при больших импульсах. Данный подход производит суммирование большого класса диаграмм. При этом была записана замкнутая система уравнений на пропагаторы и вершинные функции, которая справедлива при любых значениях константы связи. Из анализа системы следовало, что квантовая электродинамика является асимптотически несвободной теорией, то есть она не работает при больших энергиях. В данной работе рассматривается применение планарного паркетного приближения к матричным моделям при больших размерах матриц.

Нульмерные матричные модели можно рассматривать как упрощённый вариант многомерных матричных теорий поля, для которых трудно построить $1/N$-разложение (в данном случае N — размер матрицы). Хорошо известно [1], что для калибровочной теории $U(N)$ в пределе больших N и при условии $g^2N = \text{const}$ (где g — константа связи теории Янга—Миллса) ведущий вклад дают планарные диаграммы (это диаграммы, которые можно нарисовать на плоскости). Брезан и другие [2] нашли вакуумную энергию и корреляторы для нульмерной эрмитовой матричной модели в главном (планарном) приближении по $1/N$. Впервые планарное паркетное приближение было рассмотрено для тех же моделей Арефьевой и Зубаревым [3]. Было найдено замечательное согласие планарного и паркетного подходов для разных значений константы связи. Здесь будет рассмотрено обобщение этой процедуры на более сложные матричные теории поля: модель Голдстоуна, многоследовую модель, двуматричную модель.

1. Матричная модель ϕ^4. Действие матричной модели ϕ^4 [2] имеет следующий вид:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\Phi^2 + \frac{g}{4}\,\mathrm{Tr}\,\Phi^4,$$

Андрей Олегович Шишанин (к.ф.-м.н.), доцент, каф. экспериментальной физики.

где Φ — эрмитовая $N \times N$ матрица. Статсумма задаётся функциональным интегралом

$$Z = \int d\Phi e^{-NS(\Phi)}.$$

Определим здесь планарную вакуумную энергию

$$E^0(g) = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln Z.$$

В данном случае можно перейти к собственным значениям λ_i матрицы Φ и написать для них уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_i + g\lambda_i^3\right) = \sum_{i\neq j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}. \tag{1}$$

В планарном пределе, когда $N \to \infty$, $\lambda_i = \lambda(i/N)$, $x = i/N$. Плотность распределения собственных значений матрицы определится как $u(\lambda) = dx/d\lambda$. Она удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-2a}^{2a} d\lambda u(\lambda) = 1.$$

В непрерывном пределе уравнение (1) при конечных N переходит в интегральное уравнение на плотность $u(\lambda)$:

$$\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}g\lambda^3 = \int_{-2a}^{2a} d\mu \frac{u(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad |\lambda| \leqslant 2a.$$

Это уравнение имеет следующее решение [2] на отрезке $[-2a,\, 2a]$:

$$u_A = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}g\lambda^2 + \frac{1}{2} + ga^2\right)\sqrt{4a^2 - \lambda^2},$$

где a удовлетворяет условию $3ga^4 + a^2 - 1 = 0$.

Пропагатор, или двухточечная корреляционная функция, здесь определяется выражением

$$D_{pl} = \int_{-2a}^{2a} d\lambda u(\lambda)\lambda^2 = \frac{(4 + a^2)a^2}{3}.$$

Замечательным результатом статьи [2] является вычисление планарной вакуумной энергии:

$$E^0(g) - E^0(0) = \frac{1}{24}(a^2 - 1)(9 - a^2) - \frac{1}{2}\ln a^2.$$

Посмотрим, как рассмотренная модель воспроизводится паркетным приближением [3]. Замкнутая система планарного уравнения Швингера—Дайсона на пропагатор и планарных паркетных уравнений в данном случае выглядит как

$$D = 1 - 2gD^2 - gD^4\Gamma_4, \quad \Gamma_4 = -g + H + V,$$

$$H = -gD^2\Gamma_4 + VD^2\Gamma_4, \quad V = -gD^2\Gamma_4 + HD^2\Gamma_4.$$

Здесь D — пропагатор, Γ_4 — четырёхточечная вершина, H и V — планарные паркетные интегральные ядра (эти обозначения используются и для других моделей). Отметим, что в этих уравнениях не учитывается ещё один канал, который принимается во внимание в скалярном случае. Если исключить из системы Γ_4, H, V, то для пропагатора можно записать следующее уравнение:

$$g^3D^6 + g^2D^5 + 5g^2D^4 + 5gD^3 + (1-5g)D^2 - 2D + 1 = 0.$$

Проверено,что при малых значениях D_{par} совпадает с D_{pl} до шестого порядка по константе связи. Более интересно сравнить для двух подходов предел сильной связи, когда константа связи $g \to \infty$. На D_{pr} можно получить следующее асимптотическое поведение в этом режиме:

$$D(g) \sim \frac{\alpha_{par}}{\sqrt{g}},$$

где α_{par} — решение уравнения $\alpha_{par}^6 + 5\alpha_{par}^4 - 5\alpha_{par}^2 + 1 = 0$. Одним из корней этого уравнения является $\alpha_{par} = 0{,}76948$. Можно показать, что планарный пропагатор удовлетворяет уравнению

$$27g^2D_{pl}^2 + (1+18g)D_{pl} - 1 - 16g = 0.$$

Тогда асимптотическое поведение планарного пропагатора D_{pl} запишется так:

$$D(g)_{pl} \sim \frac{\alpha_{pl}}{\sqrt{g}},$$

где берётся положительный корень

$$\alpha_{pl} = 4\sqrt{3}/9 = 0{,}7698.$$

Решение паркетного уравнения имеет фазовый переход при $g = g_{pr}$, $-0{,}0865 < g_{par} < -0{,}0864$. В планарном подходе $g_{pl} = -1/12 = -0{,}0833(3)$.

2. Многоследовая матричная модель. Многоследовая матричная модель была предложена в [4], и её действие выглядит так:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Phi^2 + \frac{g}{4}\operatorname{Tr}\Phi^4 + \frac{h}{4}(\operatorname{Tr}\Phi^2)^2.$$

Этот случай решается аналогично предыдущему. Можно получить плотность распределения собственных значений в форме

$$u(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + 2hD + ga^2 + \frac{1}{2}g\lambda^2\right)\sqrt{4a^2-\lambda^2}. \qquad (2)$$

Здесь a удовлетворяет уравнению

$$gha^8 + (3g+h)a^4 + a^2 - 1 = 0,$$

а пропагатор D можно представить в виде

$$D = \frac{4ga^6 + a^4}{1 - 4ha^4}.$$

Вакуумная энергия определяется выражением

$$E^0(g,\, h) - E^0(0,\, 0) = \frac{1}{4}(a^2 - 1) + \left(\frac{3ga^4}{2} + a^2 - 1\right)\frac{ga^4}{4} - \frac{1}{2}\ln a^2.$$

Этот результат является обобщением формулы (2).

При малых константах связи g и h физические величины определятся как

$$E^0(g,\, h) - E^0(0,\, 0) = 2g + \frac{1}{4}h - 18g^2 - \frac{1}{4}h^2 - 4gh + 288g^3 + h^2 + \ldots\,,$$
$$D = 1 - 2g - h + 9g^2 + 2h^2 + 8gh - 54g^3 - 66g^2h - 30gh^2 - 5h^3 + \ldots\,.$$

Член многоследового взаимодействия не меняет вид паркетных уравнений, а уравнение Швингера—Дайсона примет вид

$$D = 1 - 2gD^2 - gD^4\Gamma_4 - hD^2.$$

В [5] проверено, что при малых значениях констант связи g планарный и планарно-паркетный пропагаторы совпадают вплоть до пятого порядка разложения. В паркетном подходе четырёхточечная вершина не зависит от константы связи h, поскольку она входит только в планарное уравнение Швингера—Дайсона. В планарном же случае при малых g вершинная функция задаётся соотношением

$$\Gamma_4 = -g + 2g^2 - 14g^3 + 114g^4 + 64g^3h + 10g^2h^2 + \ldots\,.$$

В табл. 1 приводится сравнение для двух подходов критических констант связи. Наибольшее согласие двух подходов для критической константы связи g будет, когда $h = 0$, а в противоположном случае происходит их расхождение.

Таблица 1

Значения критических констант связи *g* и *h*

$h/128$	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
g_{pl}	−0,0865	−0,0762	−0,0687	−0,0608	−0,0518	−0,0413	−0,029	−0,0151	0
g_{par}	−0,0833	−0,0787	−0,0706	−0,0618	−0,0522	−0.0414	−0,029	−0,0151	0

3. Двуматричная модель. Действие двуматричной модели предложили Ициксон и Зюбер [6] в виде

$$S(M_1,\, M_2) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} M_1^2 + \frac{g}{4}\operatorname{Tr} M_1^4 + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} M_2^2 + \frac{g}{4}\operatorname{Tr} M_2^4 - c\operatorname{Tr} M_1 M_2. \tag{3}$$

Для простоты можно взять приближённо те же самые паркетные уравнения, что и в первом случае. Планарные уравнения Швингера—Дайсона [8] здесь будут следующими:

$$D = 1 - 2gD^2 - gD^4\Gamma_4 - gS^4D\Gamma_4 + cS,$$

$$S = cD - 2gSD - gSD^3\Gamma_4 - gS^3D\Gamma_4,$$

где $D = \langle \frac{1}{N}\operatorname{Tr} M_i^2\rangle$, $i = 1,\, 2$; $S = \langle \frac{1}{N}\operatorname{Tr} M_1M_2\rangle$. Однотипный по полям пропагатор совпал до второго порядка по константе связи с планарным аналогом:

$$D_{pl} = D_1 = D_2 = \frac{1}{1-c^2} - 2\frac{1+c^2}{(1-c^2)^3}g + \frac{9+21c^2+6c^4}{(1-c^2)^5}g^2 + \dots .$$

В непрерывном пределе, когда $N \to \infty$, можно получить планарный пропагатор, используя биортогональные полиномы и технику, предложенную Казаковым для вычисления вакуумной энергии [7]. Точное выражение для планарного пропагатора имеет вид

$$D_{pl} = \frac{w^2}{g^2}\left[1 + 4w - \frac{c^2(1+5w)}{(1+3w)^3}\right],$$

где w выражается через g как

$$g(w) = w + 3w^2 + \frac{3c^2w^3}{(1+3w)^3} - \frac{c^2w}{1+3w}.$$

Значения критических значений константы связи g двух подходов при разных значениях c сравниваются в нижеприведенной табл. 2.

Таблица 2

Зависимость $g(c)$ для двух подходов

c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$0{,}01g_{pl}$	−8,33	−8,11	−7,44	−6,34	−4,99	−3,64	−2,42	−1,4	−0,64	−0,16
$0{,}01g_{par}$	−8,64	−8,4	−7,72	−6,67	−5,4	−4,04	−2,72	−1,62	−0,74	−0,16

4. Матричная модель Голдстоуна. Рассмотрим модель Голдстоуна с действием

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Phi^2 + \frac{g}{4}\operatorname{Tr}\Phi^4.$$

Помимо одноразрезного решения здесь при некотором значении константы связи $g(\xi)$ имеется решение на двух отрезках $[a,\, b] \cup [c,\, d]$ для $u(\lambda)$ [9]. Это решение можно характеризовать специальным параметром

$$\xi = \int_a^b u(\lambda)d\lambda.$$

Паркетное приближение для полностью несимметричного случая $\xi = 1$ рассмотрено в статье [11]. Здесь мы обсудим симметричную фазу на двух отрезках $\xi = 1/2$ с $g_{kr} = 1/4$. Было показано [9, 10], что плотность распределения

$$u(\lambda) = \frac{g|\lambda|}{2\pi}\sqrt{(b^2-\lambda^2)(\lambda^2-a^2)}.$$

При данном подходе вакуумная энергия и пропагатор имеют следующий вид:

$$E_{two-cut} = -\frac{1}{4g} + \frac{1}{4}\ln g - \frac{3}{8} - 2\ln 2, \quad D = 1/g.$$

Четырёхточечная вершина в этом случае определяется выражением $\Gamma_4 = -g^2 - g^3$. В симметричном случае можно считать, что свободный пропагатор равен -1. Здесь паркетные уравнения имеют такой же вид, как и в обычной модели, рассмотренной выше, а уравнение Швингера—Дайсона выглядит так:

$$D = -1 + 2gD^2 + gD^4\Gamma_4.$$

Уравнение на пропагатор имеет вид

$$g^3D^6 - g^2D^5 + \frac{5}{4}g^2D^4 - 5gD^3 + (1-5g)D^2 + 2D + 1 = 0. \tag{4}$$

Численный расчёт, результаты которого приведены в табл. 3, показывает,что когда $g \to 0$, имеется корень уравнения (4), который ведёт себя как $1/g$.

Таблица 3

Пропагатор и вершинная функция симметричного решения

g	0,25	0,1	0,05	0,01	0,001	10^{-4}
D^{par}	5,6	12	22,3	102,6	1002,7	100027
$D^{(pl)}$	4	10	20	100	1000	10^4
Γ_4^{par}	$-0{,}037$	$-7{,}6 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}1 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}6 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}96 \cdot 10^{-6}$	$-54{,}38$
$\Gamma_4^{(pl)}$	$-0{,}078 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}813 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}08786$	$-0{,}6900$	$-5{,}835$	$-54{,}55$

5. Заключение. В данной работе были представлены результаты сравнения двух подходов: планарного и планарно-паркетного для матричных моделей. Хорошо известно [3], что паркетное приближение достаточно точно воспроизводит планарное приближение для матричной модели ϕ^4. Здесь же было проверено, что этот подход достаточно точно аппроксимирует планарное приближение для многоследовой, двуматричной и голдстоуновской моделей.

Работа выполнена в рамках ГК П 23-13 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hooft G.'t.* A planar diagram theory for strong interactions // *Nucl. Phys. B.*, 1974. Vol. 72, no. 3. Pp. 461–473.
2. *Brézin E., Itzykson C., Parisi G., Zuber J. B.* Planar diagrams // *Commun. Math. Phys.*, 1978. Vol. 59, no. 1. Pp. 35–51.
3. *Aref'eva I. Ya., Zubarev A. P.* Parquet approximation in large N matrix theories // *Phys. Lett. B.*, 1996. Vol. 386, no. 1–4. Pp. 258–268, arXiv: hep-th/9605005.
4. *Das S. R., Dhar A., Sengupta A. M., Wadia S. R.* New critical behavior in $d = 0$ large-N matrix models // *Mod. Phys. Lett. A.*, 1990. Vol. 5, no. 13. Pp. 1041–1056.
5. *Шишанин А. О.* Матричная многоследовая модель в паркетном приближении // *Изв. вузов. Физика*, 2005. № 12. С. 65–69; англ. пер.: *Shishanin A. O.* Multitrace matrix model in the parquet approximation // *Russian Physics Journal*, 2005. Vol. 48, no. 12. Pp. 1287–1293.
6. *Itzykson C., Zuber J. B.* The planar approximation. II // *J. Math. Phys.*, 1980. Vol. 21, no. 3. Pp. 411–421.
7. *Kazakov V. A.* Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution // *Phys. Lett. A.*, 1986. Vol. 119, no. 3. Pp. 140–144.

8. *Шишанин А. О.* Решение паркетных уравнений для двуматричной модели // *Изв. вузов. Физика*, 2006. № 5. С. 92–95; англ. пер.: *Shishanin A. O.* A solution to the parquet equations for a two-matrix model // *Russian Physics Journal*, 2006. Vol. 49, no. 5. Pp. 559–562.
9. *Shimamune Y.* On the phase structure of large N matrix models and gauge models // *Phys. Lett. B.*, 1982. Vol. 108, no. 6. Pp. 407–411.
10. *Cicuta G.M., Molinari L., Montaldi E.* Large N phase transitions in low dimensions // *Mod. Phys. Lett. A*, 1986. Vol. 1, no. 2. Pp. 125–129.
11. *Shishanin A., Ziatdinov I.* Parquet approximation for large-N matrix Higgs model // *JHEP*, 2003. Vol. 2003, no. 07, 032. 12 pp., arXiv: hep-th/0303169.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 20/III/2011.

MSC: 81T10

MATRIX MODELS AND PARQUET APPROXIMATION

A. O. Shishanin

Peoples Friendship University of Russia,
6, Mikluho-Maklai st., Moscow, 117198, Russia.

E-mail: `shishandr@rambler.ru`

In this work we consider the comparison of planar and planar parquet approximations for zero-dimensional hermitian matrix models. We discuss how the parquet approach reproduces planar one for matrix model ϕ^4, multi-trace model, two-matrix model and the Goldstone matrix model.

Key words: *matrix models, planar approximation, Schwinger–Dyson equations, parquet equations.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 20/III/2011.

Andrei O. Shishanin (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Experimental Physics.