Механика

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ СТЕНОК КАНАЛОВ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, ул. Северный венец, 32.

E-mails: ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

На основе построенных математических моделей исследована динамическая устойчивость упругих стенок плоских каналов при протекании в них потока идеальной жидкости. На входе и выходе из каналов заданы либо законы изменения давления, либо потенциал скорости, либо продольные составляющие скорости жидкости. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость однородного потока, сжимающее (растягивающее) усилие и другие параметры механической системы.

Ключевые слова: *аэрогидроупругость, динамическая устойчивость, канал, функционал, дифференциальное уравнение, частные производные.*

Введение. При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

С одной стороны, воздействие потока может приводить к отрицательным эффектам, являющимся причиной нарушения необходимых функциональных свойств элементов вплоть до их разрушения.

С другой стороны, для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения интенсивных колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для размешивания жидкостей с целью приготовления однородных смесей и эмульсий. Принцип действия широкого класса подобных смесительных устройств, например, гидродинамических излучателей, основан на колебаниях упругих элементов, расположенных на стенках каналов или внутри них.

Андрей Владимирович Анкилов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики. *Пётр Александрович Вельмисов* (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. высшей математики.

В настоящей работе на основе построенных математических моделей исследуется динамическая устойчивость упругих стенок плоских каналов при протекании в них потока идеальной жидкости, когда на входе и выходе из каналов заданы либо законы изменения давления, либо потенциал скорости жидкости, либо продольная составляющая скорости жидкости, в предположении дозвукового режима обтекания. Определение устойчивости деформируемых элементов соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала описывается линейной моделью.

В указанных работах для решения связанных задач аэрогидроупругости используется два подхода. Первый основан на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, второй — на использовании метода Фурье и представлении искомых функций (потенциала скорости и прогибов пластин) в виде рядов. В обоих случаях аэрогидродинамическая нагрузка определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин, для которых возникает связанная система интегро-дифференциальных уравнений.

Для исследования динамической устойчивости в задачах аэрогидроупругости разработаны аналитические методики, основанные на построении функционалов для полученных систем интегро-дифференциальных уравнений. Изучается устойчивость стенок каналов при различных способах их закрепления.

1. Задание давления. Рассматривается плоская задача о динамической устойчивости упругой стенки канала при протекании в нем потока идеальной несжимаемой жидкости, на входе и выходе из которого заданы законы изменения давления.

В линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного потока, направленного вдоль оси Ox, и малым отклонениям пластин, задача формулируется следующим образом:

$$\Delta Z \equiv Z_{xx} + Z_{yy} = 0, \quad x \in (0,\, l), \quad y \in (0,\, y_0); \tag{1}$$

$$Z_y(x,\, 0,\, t) = 0, \quad x \in (0,\, l); \tag{2}$$

$$Z_y(x,\, y_0,\, t) = w_{tt}(x,\, t) + 2Vw_{xt}(x,\, t) + V^2 w_{xx}(x,\, t), \quad x \in (0,\, l); \tag{3}$$

$$Z(0,\, y,\, t) = Z(l,\, y,\, t) = 0, \quad y \in (0,\, y_0); \tag{4}$$

$$L(w) = -\rho Z(x,\, y_0,\, t), \quad x \in (0,\, l); \tag{5}$$

$$L(w) \equiv Dw''''(x,\, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x,\, t) + M\ddot{w}(x,\, t) + \\ + N(t)w''(x,\, t) + \beta_1 \dot{w}(x,\, t) + \beta_0 w(x,\, t).$$

Здесь неизвестными функциями являются $w(x,\, t)$ — прогиб упругой стенки канала и $-\rho Z(x,\, y,\, t) = -\rho(\varphi_t + V\varphi_x)$ — давление жидкости, где $\varphi(x,\, y,\, t)$ — потенциал скорости жидкости. Индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t; штрих и точка — производные по x и t соответственно; ρ — плотность жидкости; V — скорость невозмущенного потока газа; l, y_0 — длина и ширина канала; D, M — изгибная жёсткость и погонная масса стенки канала; N —

сжимающая (растягивающая) стенку канала сила; β_1, β_2 — коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 — коэффициент жёсткости основания. Здесь и в дальнейшем граничные условия на входе и выходе из канала считаем однородными, так как в линейной постановке неоднородность не влияет на исследование устойчивости.

В предположении, что концы стенки канала закреплены шарнирно ($w = w'' = 0$), функция $Z(x,\, y,\, t)$ представляется в виде ряда

$$Z(x,\, y,\, t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l\rho\,\mathrm{ch}(\lambda_k y_0)}\int_0^l L(w)\sin(\lambda_k\tau)d\tau\right)\left[e^{\lambda_k y} + e^{-\lambda_k y}\right]\sin(\lambda_k x),$$

где $\lambda_k = k\pi/l$. Тогда уравнения и условия (1), (2), (4), (5) выполняются. Подставляя $Z(x,\, y,\, t)$ в условие (3), решение задачи можно свести к исследованию уравнения

$$\ddot{w} + 2V\dot{w}' + V^2 w'' = -\frac{2}{l\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\sin(\lambda_k x)\,\mathrm{th}(\lambda_k y_0)\int_0^l L(w)\sin(\lambda_k\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Исследование устойчивости проводится на основе функционала

$$\Phi(t) = \frac{2}{\rho l}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,\mathrm{th}(\lambda_k y_0)\Bigg[\left(D\lambda_k^4 - N\lambda_k^2 + \beta_0\right)\left(\int_0^l w\sin(\lambda_k x)dx\right)^2 + $$
$$+ M\left(\int_0^l \dot{w}\sin(\lambda_k x)dx\right)^2\Bigg] + \int_0^l\left(\dot{w}^2 - V^2 w'^2\right)dx.$$

Пусть выполнены условия $D > 0$, $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $\dot{N} \geqslant 0$. Тогда для функции $w(x,\, t)$, являющейся решением уравнения (6), получим $\dot{\Phi}(t) \leqslant 0$, $\Phi(t) \leqslant \Phi(0)$. Согласно неравенству Буняковского имеем

$$w^2(x,\, t) \leqslant l\int_0^l w'^2(x,\, t)dx.$$

Пользуясь этим неравенством и предполагая, что выполняется условие

$$N \leqslant \frac{D\pi^2}{l^2} + \frac{\beta_0 l^2}{\pi^2} - \frac{l^2\rho\,\mathrm{cth}(\pi y_0/l)}{2\pi}V^2,$$

получим следующую оценку:

$$\inf_k\left[\frac{2\lambda_k\,\mathrm{th}(\pi y_0/l)}{l^2\rho}\left(D\lambda_k^2 - N + \frac{\beta_0}{\lambda_k^2}\right) - V^2\right]w^2 \leqslant \Phi(0).$$

Из этого неравенства следует, что решение $w(x,\, t)$ уравнения (6) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x,\, 0)$, $w''(x,\, 0)$ при выполнении указанных выше условий.

2. Задание потенциала скорости. Рассматривается плоская задача о динамической устойчивости упругой стенки канала при протекании в нем потока идеальной несжимаемой жидкости, на входе и выходе из которого заданы законы изменения потенциала скорости.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \quad x\in(0,\,l), \quad y\in(0,\,y_0); \tag{7}$$

$$\varphi_y(x,\,y_0,\,t)=\dot w(x,\,t)+Vw'(x,\,t), \quad x\in(0,\,l); \tag{8}$$

$$\varphi_y(x,\,0,\,t)=0, \quad x\in(0,\,l); \tag{9}$$

$$\varphi(0,\,y,\,t)=\varphi(l,\,y,\,t)=0, \quad y\in(0,\,y_0); \tag{10}$$

$$L(w)=-\rho(\varphi_t(x,\,y_0,\,t)+V\varphi_x(x,\,y_0,\,t)), \quad x\in(0,\,l). \tag{11}$$

Представим потенциал скорости в виде

$$\varphi(x,\,y,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{\lambda_k y}+e^{-\lambda_k y})\sin\lambda_k x}{\lambda_k l\,\mathrm{sh}(\lambda_k y_0)}\int_0^l\big(\dot w(\tau,\,t)+Vw'(\tau,\,t)\big)\sin\lambda_k\tau d\tau.$$

Тогда уравнения и условия (7)–(10) выполняются. Подставляя выражение для потенциала скорости в уравнение (11), решение задачи можно свести к исследованию уравнения для $w(x,\,t)$:

$$L(w)=-\frac{2\rho}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}(\lambda_k y_0)}{\lambda_k}\Bigg[\sin\lambda_k x\int_0^l(\ddot w(\tau,\,t)+V\dot w'(\tau,\,t))\sin\lambda_k\tau d\tau+$$
$$+V\lambda_k\cos\lambda_k x\int_0^l(\dot w(\tau,\,t)+Vw'(\tau,\,t))\sin\lambda_k\tau d\tau\Bigg], \quad x\in(0,\,l). \tag{12}$$

Исследование устойчивости проводится на основе функционала

$$\Phi(t)=\int_0^l\big(M\dot w^2-Nw'^2+Dw''^2+\beta_0w^2\big)dx+$$
$$+\frac{2\rho}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\,(\lambda_k y_0)}{\lambda_k}\bigg(\int_0^l\dot w(\tau,\,t)\sin\lambda_k\tau d\tau\bigg)^2-$$
$$-\frac{2\rho V^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}(\lambda_k y_0)}{\lambda_k^3}\bigg(\int_0^l w''(\tau,\,t)\cos\lambda_k\tau d\tau\bigg)^2.$$

Пусть концы упругой стенки канала закреплены либо жёстко ($w=w'=0$), либо шарнирно ($w=w''=0$) и выполнены условия $D>0$, $\beta_0>0$, $\beta_1\geqslant0$, $\beta_2\geqslant0$, $\dot N\geqslant0$.

Тогда для функций $w(x,\,t)$, являющихся решением уравнения (12), имеем $\dot\Phi(t)\leqslant0$, $\Phi(t)\leqslant\Phi(0)$. Согласно неравенствам Релея [1] и Коши—Буняковского получим следующие оценки:

$$\int_0^l w''^2(x,\,t)dx\geqslant\nu_1\int_0^l w'^2(x,\,t)dx, \quad w^2(x,\,t)\leqslant l\int_0^l w'^2(x,\,t)dx, \tag{13}$$

где ν_1 — наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения $\psi''''(x) = -\nu\psi''(x)$ с указанными выше граничными условиями. Пользуясь этими неравенствами и предполагая, что выполняются условия

$$D > \frac{2\rho V^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}(\lambda_k y_0)}{\lambda_k^3}, \quad N^* = \sup_t N(t) < \nu_1\left(D - \frac{2\rho V^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}\,(\lambda_k y_0)}{\lambda_k^3}\right),$$

получим следующую оценку:

$$\frac{1}{l}\left(\nu_1\left[D - \frac{2\rho V^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{cth}(\lambda_k y_0)}{\lambda_k^3}\right] - N^*\right)w^2(x,\,t) \leqslant \Phi(0).$$

Из этого неравенства следует, что решение $w(x,\,t)$ уравнения (12) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $w(x,\,0)$, $\dot{w}(x,\,0)$, $w''(x,\,0)$ при выполнении указанных выше условий.

3. Задание продольной составляющей скорости. Рассматривается плоская задача о динамической устойчивости упругой стенки канала при протекании в нём потока идеальной несжимаемой жидкости, на входе и выходе из которого заданы законы изменения продольной составляющей скорости жидкости.

Математическая постановка задачи имеет такой вид:

$$\begin{gathered}
\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (0,\,l), \quad y \in (-y_0,\,y_0);\\
\varphi_y(x,\,y_0,\,t) = \dot{w}(x,\,t) + Vw'(x,\,t), \quad x \in (0,\,l);\\
\varphi_y(x,\,0,\,t) = 0, \quad x \in (0,\,l);\\
\varphi_x(0,\,y,\,t) = 0, \quad \varphi_x(l,\,y,\,t) = 0, \quad y \in (-y_0,\,y_0);\\
L(w) = -\rho\big(\varphi_t(x,\,y_0,\,t) + V\varphi_x(x,\,y_0,\,t)\big), \quad x \in (0,\,l).
\end{gathered}$$

Используя методы теории функций комплексного переменного [2, 3], решение задачи можно свести к исследованию уравнения для $w(x,\,t)$:

$$\begin{aligned}
L(w) = -\frac{\rho}{\pi}\int_0^l \big(\ddot{w}(\tau,\,t) + V\dot{w}'(\tau,\,t)\big)G(\tau,\,x)d\tau -&\\
-\frac{\rho V}{\pi}\int_0^l \big(\dot{w}(\tau,\,t) + Vw'(\tau,\,t)\big)G_x(\tau,\,x)d\tau, \quad x \in (0,\,l),& \qquad (14)
\end{aligned}$$

где $G(\tau,\,x) = \ln\left|\frac{\mathrm{sn}(K(k)il/y_0)}{\mathrm{sn}(K(k)i\tau/y_0) - \mathrm{sn}(K(k)ix/y_0)}\right|$ при $\tau \neq x$, $\mathrm{sn}(x)$ — эллиптический синус, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; модуль k определяется из соотношения $K(\sqrt{1-k^2})/K(k) = l/y_0$.

Исследование устойчивости проводится на основе функционала

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = \int_0^l \big(M\dot{w}^2 - Nw'^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2\big)dx +&\\
+\frac{\rho}{\pi}\int_0^l dx\int_0^l \dot{w}(x,\,t)\dot{w}(\tau,\,t)G(\tau,\,x)d\tau -&
\end{aligned}$$

$$-\frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l dx\int_0^l w'(x,\,t)w'(\tau,\,t)G(\tau,\,x)d\tau.$$

Пусть концы упругой стенки канала закреплены либо жёстко ($w = w' = 0$), либо шарнирно ($w = w'' = 0$) и выполнены условия $D > 0$, $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $\dot{N} \geqslant 0$. Тогда для функций $w(x,\,t)$, являющихся решением уравнения (14), имеем $\dot{\Phi}(t) \leqslant 0$, $\Phi(t) \leqslant \Phi(0)$. Используя неравенства (13) и предполагая, что выполняются условия

$$M > \frac{\rho G_0}{\pi},\quad N^* = \sup_t N(t) < \nu_1 D - \frac{\rho G_0 V^2}{\pi},\quad G_0 = \sup_{x\in(0,\,l)}\int_0^l G(\tau,\,x)d\tau,$$

получим следующую оценку:

$$\frac{1}{l}\left(\nu_1 D - N^* - \frac{\rho G_0 V^2}{\pi}\right)w^2(x,\,t) \leqslant \Phi(0).$$

Из этого неравенства следует, что решение $w(x,\,t)$ уравнения устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $w(x,\,0)$, $\dot{w}(x,\,0)$, $w''(x,\,0)$ при выполнении указанных выше условий.

Выводы. Получены условия динамической устойчивости упругих стенок каналов с протекающей внутри них жидкостью. Эти условия налагают ограничения на скорость потока V, сжимающее (растягивающее) усилие N, изгибную жёсткость D и другие параметры механической системы. Область устойчивости на плоскости $(V,\,N)$ ограничена прямой $V = 0$ и ветвью параболы $N = c - bV^2$, $b > 0$, $c > 0$.

Результаты исследований могут быть использованы при создании вибрационных устройств, упомянутых во введении и используемых для интенсификации технологических процессов, на этапе их проектирования, в частности, гидродинамических излучателей для приготовления однородных смесей и эмульсий.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 гг.)» (гос. контракт№ П1122).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Collatz L.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (in German). Leipzig: Akad. Verlagsges, 1949. 466 pp.; русск. пер.: *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с. [*Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.* Methods of the theory of functions in a complex variable. Moscow: Nauka, 1987. 688 pp.]
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с. [*Gakhov F. D.* Boundary value problems. Moscow: Nauka, 1977. 640 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 12/III/2011.

MSC: 35Q74; 74F10

ON STABILITY OF SOLUTIONS OF EQUATIONS OF INTERACTION BETWEEN ELASTIC WALLS OF CHANNELS AND AFFLUENT LIQUID

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov

Ulyanovsk State Technical University,
32, Severny venec st., Ulyanovsk, 432027, Russia.

E-mails: `ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru`

In this article the dynamical stability of elastic walls of plane channels under flowing of the perfect liquid is investigated on the basis of mathematical models. Either the law of pressure change or the potential of liquid velocity or the longitudinal component of liquid velocity are applied on the input and output from the channels. The sufficient conditions of stability are obtained. These conditions impose a constraint on the velocity of the liquid homogeneous stream, on the compressing (decompressing) force and other parameters of mechanical system.

Key words: *aerohydroelastisity, dynamical stability, channel, functional, differential equation, partial derivatives.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 12/III/2011.

Andrey V. Ankilov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics. *Petr A. Velmisov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Higher Mathematics.