Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 191–195

УДК 539.3

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ЖЁСТКОЙ НАКЛАДКОЙ НА ЕЁ БЕРЕГУ

Ю. О. Васильева, В. В. Сильвестров

[1] Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова,
428015, Чебоксары, Московский пр., 65.
[2] Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина,
199991, Москва, Ленинский пр., 65.

E-mails: shydaisy@mail.ru, v-silvestrov@yandex.ru

Изучается плоское напряжённое состояние вблизи вершины межфазной трещины, порождённое заданной сосредоточенной силой. Один из берегов трещины частично усилен жёсткой прямолинейной накладкой. Находятся комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины, приводятся их графики.

Ключевые слова: *трещина, жёсткая накладка, сосредоточенная сила, кусочно-однородная упругая плоскость, напряжения, коэффициенты интенсивности напряжений, гипергеометрическая функция.*

Пусть в кусочно-однородном упругом изотропном теле, составленном из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред $y = 0$ расположена полубесконечная открытая трещина $[0, +\infty)$, верхний берег которой на участке $[0, l]$ подкреплён абсолютно жесткой прямолинейной накладкой, присоединённой к телу без натяга, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины свободны от напряжений:

$$u^+(x) + iv^+(x) = i\varepsilon x, \quad x \in (0, l); \qquad \tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) = 0, \quad x \in (l, +\infty);$$
$$\tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

где $u+iv$ — вектор смещений, $\tau_{xy}+i\sigma_y$ — вектор напряжений, ε — неизвестный угол поворота накладки, а верхними индексами плюс и минус помечены значения функций на верхнем и нижнем берегах трещины. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости жёстко соединены друг с другом, и в точке $x = x_0$ $(x_0 < 0)$ действует сосредоточенная сила $X_0 + iY_0$. На бесконечности напряжения и вращение исчезают. На накладку никакие внешние силы не действуют.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие плоское напряженное состояние тела, и исследовать поведение напряжений вблизи вершины трещины.

Воспользуемся формулами Колосова—Мусхелишвили для кусочно-одно-

Юлия Олеговна Васильева, аспирант, каф. математического анализа и дифференциальных уравнений. *Василий Васильевич Сильвестров* (д.ф.-м.н.), профессор, каф. высшей математики.

родной плоскости [1]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\,\Phi_*(z), \quad z = x + iy,\\
&\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_*(z) + \Omega_*(\overline{z}) + (\overline{z} - z)\overline{\Phi_*'(z)},\\
&2\mu_j(u+iv)'_x = \kappa_j\Phi_*(z) - \Omega_*(\overline{z}) - (z-\overline{z})\overline{\Phi_*'(z)},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \mathrm{Im} z > 0,\\ \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \mathrm{Im} z < 0,\end{cases} \quad \Omega_*(z) = \begin{cases} \Omega(z), & \mathrm{Im} z > 0,\\ \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), & \mathrm{Im} z < 0,\end{cases}
$$

$$
\alpha_1 = (1+\mu_*\kappa_1)/(1+\kappa_2), \quad \alpha_2 = (1-\mu_*)/(1+\kappa_2), \quad \alpha_3 = 1-\alpha_2, \quad \alpha_4 = 1-\alpha_1,
$$

$$
\mu_* = \mu_2/\mu_1, \quad \kappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j), \quad j = 1, 2,
$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $[0, +\infty)$, а μ_1, ν_1 и μ_2, ν_2 — модули сдвига и коэффициенты Пуассона верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) полуплоскостей соответственно. В точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ могут иметь интегрируемые особенности, на ∞ они исчезают, а в точке $z = x_0$ имеют простые полюсы с вычетами $P_1 = -(X_0 + iY_0)/[2\pi(1+\mu_*\kappa_1)]$ и $P_2 = \kappa_2(X_0+iY_0)/[2\pi(\mu_* + \kappa_2)]$ соответственно [2]. На луче $(0, +\infty)$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&\kappa_1\Phi^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\mu_1\varepsilon, \quad x \in (0, l);\\
&\Phi^+(x) + \Omega^-(x) = 0, \quad x \in (l, +\infty);\\
&\alpha_1\Phi^-(x) + \alpha_2\Omega^-(x) + \alpha_3\Omega^+(x) + \alpha_4\Phi^+(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

откуда находим [3]:

$$
\Phi(z) = H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l);
$$

$$
H_j(\zeta) = \left[A_0 + C_2(\zeta - t_0)^{-1} + \varepsilon\mu_1 J_2(\zeta)\right]\chi_{j1}(\zeta) + \left[C_1(\zeta - t_0)^{-1} + \varepsilon\mu_1 J_1(\zeta)\right]\chi_{j2}(\zeta),
$$

$$
A_0 = -\frac{X_0 + iY_0}{2\pi l c_3(\alpha_1 + \alpha_3)}, \quad C_j = (-1)^j \frac{P_1\chi_{2j}(t_0) - P_2\chi_{1j}(t_0)}{l \det X^+(t_0)}, \quad t_0 = x_0/l,
$$

$$
J_j(\zeta) = \frac{(-1)^j}{\kappa_1\pi}\int_0^1 \frac{\chi_{2j}^+(t) + \alpha_4\alpha_3^{-1}\chi_{1j}^+(t)}{(t-\zeta)\det X^+(t)}dt, \quad j = 1, 2,
$$

$$
\varepsilon\mu_1 = -\left(\int_0^1 t\,\mathrm{Re}\,\left[\left(A_0 + C_2(t-t_0)^{-1}\right)\chi_{11}^+(t) + C_1(t-t_0)^{-1}\chi_{12}^+(t)\right]\,dt\right)\times
$$

$$
\times\left(\int_0^1 t\,\mathrm{Re}\,\left[\chi_{11}^+(t)J_2(t) + \chi_{12}^+(t)J_1(t)\right]\,dt\right)^{-1},
$$

$$
c_3 = \frac{c_1\xi_2 e^{i\pi a}\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} + \frac{c_2\xi_1 e^{i\pi(a+1-c)}\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(1-a)},
$$

$$
c_1 = \frac{(1-\xi_1)\Gamma(2-c)e^{-i\pi c}}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(1-b)}, \quad c_2 = \frac{(1-\xi_2)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)},
$$

$$\xi_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4m\kappa_1^{-1}}\Big),\quad \alpha=\frac{\alpha_2\kappa_1+\alpha_4}{\alpha_3\kappa_1},\quad m=\frac{\alpha_1}{\alpha_3},$$
$$a=1-\frac{\ln\xi_1}{2\pi i},\quad b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\pi i}(\ln m-\ln\xi_1),\quad c=1+\frac{1}{2\pi i}(\ln\xi_2-\ln\xi_1)$$
$$(0<\arg\xi_1\leqslant\pi,\quad \pi\leqslant\arg\xi_2<2\pi,\quad \mathrm{Im}\xi_1\geqslant 0,\quad \mathrm{Im}\xi_2\leqslant 0),$$

где $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция Эйлера и $\chi_{ij}(\zeta)$ — элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(\zeta)$ однородной векторной краевой задачи Римана (2) при $l=1$. Для изучения напряжений вблизи вершины трещины $z=0$ достаточно знать выражение этой матрицы при $\mathrm{Re}\,z<1$:

$$\mathbf{X}(\zeta)=\zeta^{\lambda}\begin{pmatrix}c_1\xi_2 & c_2\xi_1\\ c_1m & c_2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{11}(\zeta) & \eta_{12}(\zeta)\\ \eta_{21}(\zeta) & \eta_{22}(\zeta)\end{pmatrix},\quad \lambda=-\frac{\ln\xi_1}{2\pi i},$$
$$\begin{aligned}
&\eta_{11}(\zeta)=F(a,b;c;\zeta),\quad \eta_{12}(\zeta)=a(1-\zeta)F(a+1,b;c;\zeta),\\
&\eta_{21}(\zeta)=\zeta^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;\zeta),\\
&\eta_{22}(\zeta)=(a-c+1)\zeta^{1-c}(1-\zeta)F(a-c+2,b-c+1;2-c;\zeta)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при } |\zeta|<1,\ \zeta\notin[0,1];
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
&\eta_{11}(\zeta)=a_*(\zeta-1)^{-a}F(a,c-b;c;\zeta_*),\\
&\eta_{12}(\zeta)=aa_*(\zeta-1)^{-a}F(a+1,c-b;c;\zeta_*),\\
&\eta_{21}(\zeta)=-c_*\zeta^{1-c}(\zeta-1)^{c-a-1}F(a+1-c,1-b;2-c;\zeta_*),\\
&\eta_{22}(\zeta)=(c-a-1)c_*\zeta^{1-c}(\zeta-1)^{c-a-1}F(a+2-c,1-b;2-c;\zeta_*),\\
&a_*=e^{i\pi a},\quad \zeta_*=\zeta/(\zeta-1),\quad c_*=e^{i\pi(a-c)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при } \mathrm{Re}\,\zeta<1/2,\ \zeta\notin[0,1/2].
\end{aligned}$$

Здесь $F(a,b;c;\zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а у многозначных функций ζ^p и $(\zeta-1)^q$ берутся ветви, однозначные в плоскости с разрезами $[0,+\infty)$ и $[1,+\infty)$ соответственно, определяемые условиями $0<\arg\zeta<2\pi$ и $0<\arg(\zeta-1)<2\pi$.

Из приведённых формул и формул (1) следует, что вблизи точки $z=0$ на действительной отрицательной полуоси $x<0$ вектор напряжений $\sigma_y-i\tau_{xy}$ имеет асимптотику

$$\sigma_y(x)-i\tau_{xy}(x)=\frac{K_{\mathtt{I}}-iK_{\mathtt{II}}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\gamma_0-i\delta_0}}+\frac{K_{\mathtt{III}}-iK_{\mathtt{IV}}}{\sqrt{2\pi}|x|^{1-\gamma_0-i\delta_0}}+\mathsf{O}(1),\quad x\to 0{-}0,$$
$$K_{\mathtt{I}}-iK_{\mathtt{II}}=\sqrt{2\pi}(\xi_1+m)D_2e^{-i\pi(\gamma_0-i\delta_0)},$$
$$K_{\mathtt{III}}-iK_{\mathtt{IV}}=\sqrt{2\pi}(\xi_2+m)D_1e^{-i\pi(1-\gamma_0-i\delta_0)},\quad \gamma_0-i\delta_0=\ln\xi_2/(2\pi i),$$
$$D_j=c_j[A_0-C_2t_0^{-1}+\varepsilon\mu_1J_2(0)+(\lambda_j-1)(C_1t_0^{-1}-\varepsilon\mu_1J_1(0)]l^{\lambda_j},$$
$$\lambda_j=(2\pi i)^{-1}\ln\xi_j,\quad j=1,2$$

в случае $\gamma_0\neq 1/2$ и асимптотику

$$\sigma_y(x)-i\tau_{xy}(x)=\frac{(K_{\mathtt{I}}-iK_{\mathtt{II}})|x|^{i\delta_2}+(K_{\mathtt{III}}-iK_{\mathtt{IV}})|x|^{i\delta_1}}{\sqrt{2\pi|x|}}+\mathsf{O}(1),\quad x\to 0{-}0,$$
$$K_{\mathtt{I}}-iK_{\mathtt{II}}=-\sqrt{2\pi}(\xi_1+m)D_2e^{-\pi\delta_2},$$

$$K_{\mathrm{III}} - iK_{\mathrm{IV}} = -\sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)D_1 e^{-\pi\delta_1}, \quad \delta_{1,2} = \ln|\xi_{1,2}|/(2\pi)$$

в случае $\gamma_0 = 1/2$. Таким образом, интенсивность напряжений вблизи точки $z = 0$ в любом случае определяется четырьмя коэффициентами K_{I}, K_{II}, K_{III}, K_{IV}, и напряжения в вершине трещины всегда имеют как степенную, так и осциллирующую особенность. Для значений упругих параметров $\kappa_1 = 1{,}8$, $\kappa_2 = 2{,}2$ и $\mu_* = 2$, когда $\gamma_0 = 0{,}79373$, графики зависимости коэффициентов K_{I}, K_{II}, K_{III}, K_{IV} и угла поворота накладки ε от расстояния $d = |x_0|$ между точкой приложения сосредоточенной силы и вершиной трещины и от направления ϕ силы приведены на рис. 1–4. В первом случае сила $X_0 + iY_0 = -P$ $(P > 0)$ постоянна и направлена вдоль действительной оси, а во втором случае сила $X_0 + iY_0 = P(\cos\phi + i\sin\phi)$ составляет угол ϕ с осью x, $x_0 = 0{,}2$. В обоих случаях принято $l = 1$.

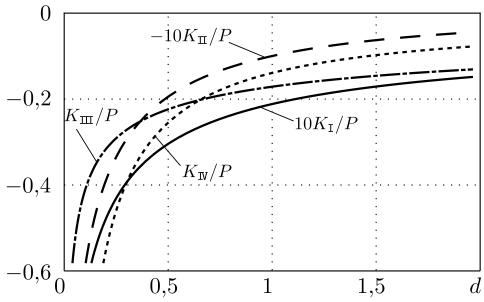

Рис. 1

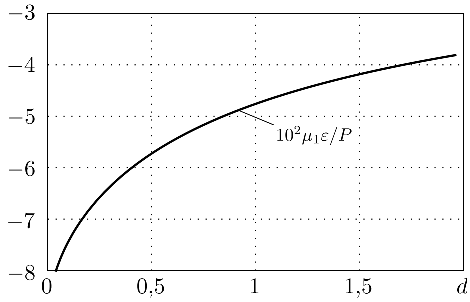

Рис. 2

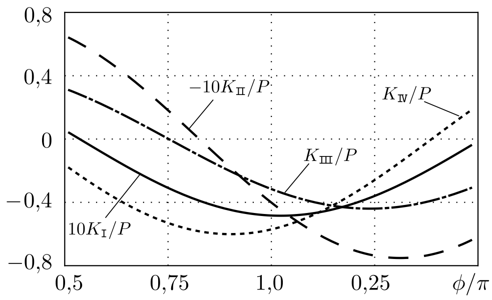

Рис. 3

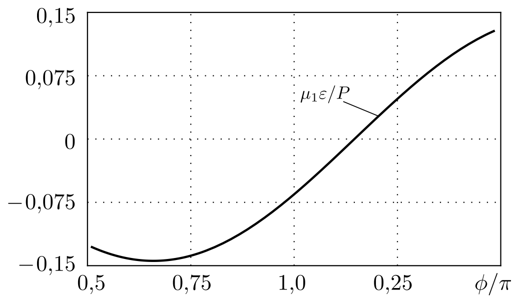

Рис. 4

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10–01–00103).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с. [*Cherepanov G. P.* Fracture Mechanics of composite materials. Moscow: Nauka, 1983. 296 pp.]
2. *Сильвестров В. В.* Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил // *Изв. вузов. Матем.*, 2004. № 7. С. 78–91; англ. пер.: *Sil'vestrov V. V.* The method of Riemann surfaces in the problem of interfacial cracks and inlcusions in the presence of point forces. // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004. Vol. 48, no. 7. Pp. 75–88.
3. *Хвощинская Л. А.* К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек / В сб.: *Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление*: Труды международной конференции (16–20 февраля 1996 г.); ред. А. А. Килбас. Минск: Белорус.

ун-т, 1996. С. 377–382. [*Khvoshchinskaya L. A.* To the Riemann problem in the case of an arbitrary number of singular points / In: *Boundary value problems, special functions and fractional calculus*: Proceedings of the International Conference (February 16–20, 1996); ed. A. A. Kilbas. Minsk: Belorus. Un-t, 1996. Pp. 377–382].

Поступила в редакцию 27/I/2011;
в окончательном варианте — 14/III/2011.

MSC: 74B05; 74Rxx, 33Cxx

CONCENTRATED FORCE ACTING NEAR THE TIP OF AN INTERFACE CRACK WITH A RIGID OVERLAY ON ITS SIDE

Yu. O. Vasilyeva, V. V. Silvestrov

[1] Ulyanov Chuvash State University,
65, Moskovskiy pr., Cheboksary, 428015, Russia.
[2] Gubkin Russian State University of Oil and Gas,
65, Leninskiy pr., Moscow, 199991, Russia.

E-mails: `shydaisy@mail.ru, v-silvestrov@yandex.ru`

Plane stress state near the tip of an interface crack induced by specified concentrated force is considered. One of the crack faces is partially reinforced by a rigid straight line overlay. The complex potentials, the stress intensity factors at the crack-tip are found, corresponding plots are presented.

Key words: *crack, rigid overlay, concentrated force, piecewise-homogeneous elastic plane, stresses, stress intensity factors, hypergeometric function.*

Original article submitted 27/I/2011;
revision submitted 14/III/2011.

Yulia O. Vasilyeva, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis & Differential Equations. *Vasiliy V. Silvestrov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Higher Mathematics.