

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЁТОМ ГРАНИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: flytitmouse@mail.ru; ponick25@gmail.com

Приводится решение нелинейной стохастической краевой задачи ползучести тонкой пластины при плоском напряженном состоянии при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, сформулировано в стохастической форме. При помощи метода малого параметра нелинейная стохастическая задача сводится к системе трех линейных уравнений в частных производных относительно флуктуаций тензора напряжений. Эта система при помощи перехода к функции напряжений была сведена к одному дифференциальному уравнению, решение которого представлено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов, второй ряд представляет собой решение в пограничном слое, его члены быстро затухают по мере удаления от границы пластины. На основе полученного решения проведен статистический анализ случайных полей напряжений вблизи границы пластины.

Ключевые слова: *установившаяся ползучесть, стохастически неоднородная пластина, случайное поле напряжений, метод малого параметра, краевой эффект.*

Рассматривается стохастическая краевая задача о нелинейной ползучести тонкой пластины при плоском напряженном состоянии при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Материал пластины считается стохастически неоднородным, так что тензоры напряжений и скоростей деформаций являются случайными функциями координат x_1 и x_2 в декартовой ортогональной системе координат.

Нелинейная стохастическая краевая задача ползучести состоит из дифференциальных уравнений равновесия для напряжений

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

условия совместности деформаций

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{\rho}_{jk,il} = 0, \quad (2)$$

детерминированных граничных условий

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Gamma} = q_i \quad (3)$$

Людмила Викторовна Коваленко (к.ф.-м.н.), ассистент, каф. прикладной математики и информатики. *Николай Николаевич Попов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

и определяющих соотношений ползучести, взятых в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме [1]

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U), \quad s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}). \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; p_{ij} — компоненты тензора деформаций; Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор; δ_{ij} — символ Кронекера; $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; c, n, α — постоянные материала. Постоянная α определяет степень неоднородности материала и для реальных материалов может изменяться в пределах от 0,05 до 0,5 [2]. Точка обозначает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Путём разложения компонент тензора напряжений σ_{ij} по малому параметру α

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \sigma_{ij}^{(m)}, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle = 0$$

нелинейная стохастическая задача (1), (2), (4) может быть приведена к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(m)} &= 0, \\ (2 + ql_1^2) \sigma_{11,22}^{(m)} + (-1 + ql_1 l_2) \sigma_{22,22}^{(m)} + \\ &+ (-1 + ql_1 l_2) \sigma_{11,11}^{(m)} + (2 + ql_2^2) \sigma_{22,11}^{(m)} + \\ &+ 6\sigma_{12,12}^{(m)} = \varphi(r^{(m)}, U), \end{aligned} \quad (5)$$

где $l_1 = 2\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)}$, $l_2 = 2\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)}$, $s_0^2 = (\sigma_{11}^{(0)})^2 + (\sigma_{22}^{(0)})^2 - \sigma_{11}^{(0)}\sigma_{22}^{(0)}$, $q = (n-1)/2s_0^2$; $r^{(m)}$ — некоторая величина, зависящая от решений на предыдущих шагах. При выводе системы (5) предполагалось, что $\sigma_{22}^{(0)} = \text{const}$, $\sigma_{12}^{(0)} = 0$. Краевые условия для системы (5) с учётом (3) имеют вид $\sigma_{ij}^{(m)} n_j|_{\Gamma} = 0$.

В силу трудностей математического характера при решении системы (5), как и в работах [3–5], будем ограничиваться первым приближением метода малого параметра, которое справедливо для слабо неоднородных сред.

Путём введения функции напряжения F по формулам (при $m = 1$)

$$\sigma_{11}^{(1)} = F_{,22}; \quad \sigma_{22}^{(1)} = F_{,11}; \quad \sigma_{12}^{(1)} = -F_{,12} \quad (6)$$

вместо системы уравнений (5) можно получить единственное дифференциальное уравнение относительно F :

$$\begin{aligned} (2 + ql_2^2) F_{,1111} + 2(2 + ql_1 l_2) F_{,1122} + (2 + ql_1^2) F_{,2222} = \\ = -\alpha (l_1 U_{,22} + l_2 U_{,11}) \end{aligned} \quad (7)$$

с граничными условиями

$$(F_{,22}n_1 - F_{,12}n_2)|_{\Gamma} = 0, \quad (-F_{,12}n_1 + F_{,11}n_2)|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Пусть однородная функция $U(x_1, x_2)$, описывающая стохастические свойства материала, является почти периодической быстро осциллирующей функцией координат [6]:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega c_k x_1 + \omega d_k x_2 + \varphi_k),$$

где ω — большой параметр, имеющий размерность, обратную длине; c_k, d_k — безразмерные величины порядка единицы; A_k — центрированные одинаково распределённые случайные величины, φ_k — случайные величины, распределённые равномерно на интервале $(0; 2\pi)$, причём все величины A_k и φ_k независимы.

Для удобства выкладок целесообразно перейти к функции комплексного переменного:

$$\tilde{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \exp(i\omega(c_k x_1 + d_k x_2)), \quad \tilde{A}_k = A_k \exp i\varphi_k. \quad (9)$$

Функция \tilde{U} введена так, что $\text{Re } \tilde{U} = U$. Тогда решение краевой задачи (7), (8), в котором U и F заменены величинами \tilde{U} и \tilde{F} ($\text{Re } \tilde{F} = F$), можно представить в виде

$$\tilde{F} = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k + w_k), \quad (10)$$

где v_k — частное решение уравнения (7), полученное при замене функции U k -тым членом разложения (9), а w_k — решение соответствующего (7) однородного уравнения, удовлетворяющее на границе Γ условиям:

$$\begin{aligned} (v_{k,22}n_1 - v_{k,12}n_2)|_{\Gamma} &= (w_{k,22}n_1 - w_{k,12}n_2)|_{\Gamma}, \\ (v_{k,11}n_2 - v_{k,12}n_1)|_{\Gamma} &= (w_{k,11}n_2 - w_{k,12}n_1)|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (11)$$

Разыскивая функции v_k в виде

$$v_k = f_k \exp(i\omega(c_k x_1 + d_k x_2)), \quad (12)$$

для f_k можно получить следующее выражение:

$$f_k = \frac{\tilde{A}_k(l_1 d_k^2 + l_2 c_k^2)}{\omega^2(2(c_k^2 + d_k^2)^2 + q(l_1 d_k^2 + l_2 c_k^2))}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ задаёт при $\omega \gg 1$ решение типа пограничного слоя, быстро затухающее по мере удаления вглубь области тела. Построим решение w_k

типа пограничного слоя в области $x_2 \geq -b$ вблизи границы $x_2 = -b$ тела. Делая замену

$$w_k = g_k(t) \exp [i\omega(c_k x_1 - d_k b)], \quad t = \omega(x_2 + b), \quad (13)$$

из однородного уравнения, соответствующего (7), для функции $g_k(t)$ можно получить

$$(2 + ql_1^2) \frac{d^4 g_k}{dt^4} - 2c_k^2 (2 + ql_1 l_2) \frac{d^2 g_k}{dt^2} + c_k^4 (2 + ql_2^2) g_k = 0.$$

Решение этого уравнения, когда все корни r_s^k соответствующего характеристического уравнения простые, определяется формулой

$$g_k(t) = \sum_{s=1}^4 C_s^k \exp(r_s^k t), \quad (14)$$

где C_s^k — произвольные постоянные.

Из четырёх корней характеристического уравнения два корня r_3^k и r_4^k имеют положительные действительные части. Так как при $x_2 \rightarrow \infty$ краевой эффект должен затухать, то две постоянные, отвечающие этим корням, равны нулю. Для нахождения двух других констант используются граничные условия

$$g_k|_{t=0} = -f_k, \quad \frac{dg_k}{dt}|_{t=0} = -id_k f_k,$$

полученные из условий (11) с использованием выражений (12), (13).

В качестве примера рассмотрим ползучесть стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. Пусть к границе полуплоскости $x_2 = 0$ приложены нагрузки

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(0)} = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0,$$

а напряжение σ_{11} удовлетворяет условию макроскопической однородности $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^{(0)} = \text{const}$, которое соответствует приложению нагрузки на бесконечности ($x_1 \rightarrow \pm\infty$).

Решение уравнения (14) типа пограничного слоя при условии $\sigma_{11}^{(0)} \neq \sigma_{22}^{(0)}$ имеет вид

$$g_k(t) = \frac{f_k(r_1^k - id_k)}{r_2^k - r_1^k} e^{r_2^k t} - \frac{f_k(r_2^k - id_k)}{r_2^k - r_1^k} e^{r_1^k t}, \quad (15)$$

где

$$r_{1,2}^k = -c_k(B_1 \pm iB_2), \quad B_{1,2} = \frac{\sqrt{\pm a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}{\sqrt{2}},$$

$$a_1 = \frac{2 + ql_1 l_2}{2 + ql_1^2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{2q}|l_1 - l_2|}{2 + ql_1^2}.$$

При условии $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = \sigma^{(0)}$ корни характеристического уравнения являются кратными. В этом случае решение задачи приведено в [7] и здесь не рассматривается.

Подставляя выражения (12), (13), (15) в соотношение (10) и выделяя действительную часть \tilde{F} , можно получить

$$F = \text{Re}\tilde{F} = \frac{\alpha}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k M_k \left[\cos(c_k \omega x_1 + \varphi_k) \left[\cos d_k \omega x_2 - \frac{e^{-c_k B_1 \omega x_2}}{B_2} (B_2 \cos c_k B_2 \omega x_2 + B_1 \sin c_k B_2 \omega x_2) \right] - \sin(c_k \omega x_1 + \varphi_k) \left(\sin d_k \omega x_2 - \frac{e^{-c_k B_1 \omega x_2}}{B_2 c_k} d_k \sin c_k B_2 \omega x_2 \right) \right],$$

где $M_k = f_k \omega^2 / \tilde{A}_k$.

Компоненты тензора напряжений можно найти из выражения (15), используя формулы (6). В силу громоздкости они здесь не выписаны.

Вычисление дисперсий случайного поля напряжений $D_{ij} = \langle (\sigma_{ij}^*)^2 \rangle$ производилось при условии, что все величины c_k и d_k равны 1. При этом условии случайное поле U , заданное разложением (9), можно считать близким к изотропному [6]. С учётом условий, наложенных на случайные величины A_k и φ_k , и равенства $\langle U^2 \rangle = 1$ дисперсии случайного поля напряжений определяются следующими выражениями:

$$D_{11} = \Lambda \left[\left(-\cos \omega x_2 + \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} (B_1^2 + B_2^2) (B_2 \cos B_2 \omega x_2 - B_1 \sin B_2 \omega x_2) \right)^2 + \left(\sin d_k \omega x_2 + \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} ((B_1^2 + B_2^2) \sin B_2 \omega x_2 - 2B_1 B_2 \cos B_2 \omega x_2) \right)^2 \right],$$

$$D_{22} = \Lambda \left[\left(\cos \omega x_2 - \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} (B_2 \cos B_2 \omega x_2 + B_1 \sin B_2 \omega x_2) \right)^2 + \left(\sin \omega x_2 + \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} \sin B_2 \omega x_2 \right)^2 \right],$$

$$D_{12} = \Lambda \left[\left(-\sin \omega x_2 + \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} (B_1^2 + B_2^2) \sin B_2 \omega x_2 \right)^2 + \left(\cos \omega x_2 + \frac{e^{-B_1 \omega x_2}}{B_2} (B_1 \sin B_2 \omega x_2 - B_2 \cos B_2 \omega x_2) \right)^2 \right],$$

где

$$\Lambda = \frac{8\alpha^2 s_0^4 (l_1 + l_2)^2}{(16s_0^2 + (n-1)(l_1 + l_2)^2)^2}.$$

На основе полученных аналитических решений проведен статистический анализ случайного поля напряжений, в результате которого установлено, что

вблизи границы полуплоскости существует узкий пограничный слой, в котором разброс напряжений намного больше, чем для глубинных слоев.

На рис. 1 приведен типичный график нормированных дисперсий напряжений $D_{ij}^0 = D_{ij}(x_2)/D_{ij}(\infty)$ в зависимости от безразмерной координаты ωx_2 . Здесь $h = \sigma_{22}^{(0)}/\sigma_{11}^{(0)}$ — параметр нагружения.

С ростом ωx_2 дисперсии довольно быстро приближаются к постоянным значениям, совпадающим с их значениями для неограниченной среды. Концентрация напряжения, возникающая на границе полуплоскости за счёт неоднородности материала, вычисляемая по формуле

$$\rho = \sqrt{D_{11}(0)/D_{11}(\infty)} = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 + a_2^2},$$

может быть в два и более раз больше, чем на бесконечности, в зависимости от параметра нагружения и степени неоднородности материала.

В качестве второго примера рассматривалась ползучесть стохастически неоднородной полосы с быстро осциллирующими реологическими свойствами. Считается, что бесконечная стохастически неоднородная полоса (пластина) $-\infty < x_1 < \infty$, $-b \leq x_2 \leq b$ растягивается вдоль оси x_1 постоянными напряжениями $\sigma_{11} = \sigma^0$, которые приложены на бесконечности ($x_1 \rightarrow \pm\infty$), а её границы $x_2 = \pm b$ свободны от напряжений:

$$\sigma_{22}|_{x_2=\pm b} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=\pm b} = 0.$$

На рис. 2 представлены зависимости нормированных дисперсий $D_{ij}^0 = D_{ij}(\omega x_2)/D_{ij}(\infty)$ от безразмерной координаты ωx_2 при степени нелинейности установившейся ползучести $n = 3$. Видно, что на границах полосы

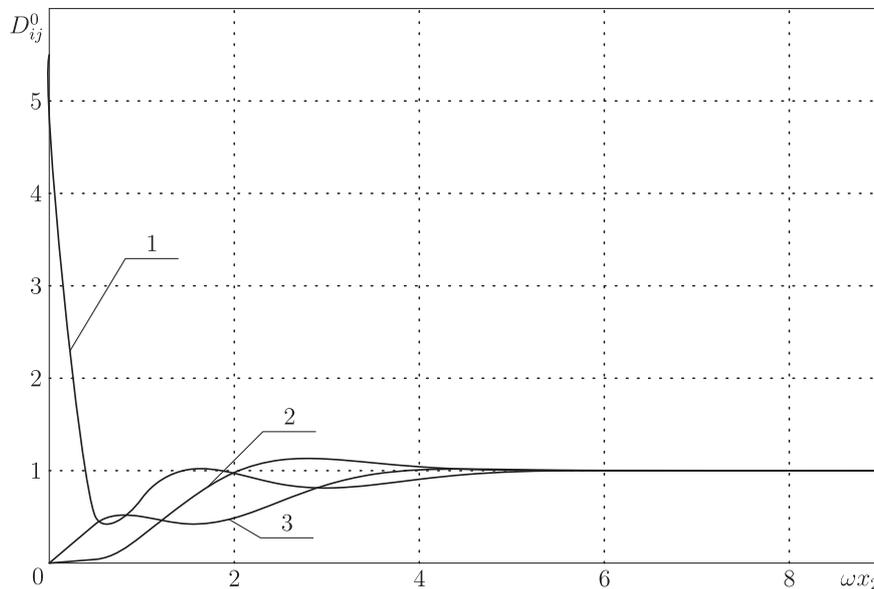


Рис. 1. Нормированные дисперсии D_{ij}^0 при $n = 3$, $h = 2$: 1 — D_{11}^0 , 2 — D_{22}^0 , 3 — D_{12}^0

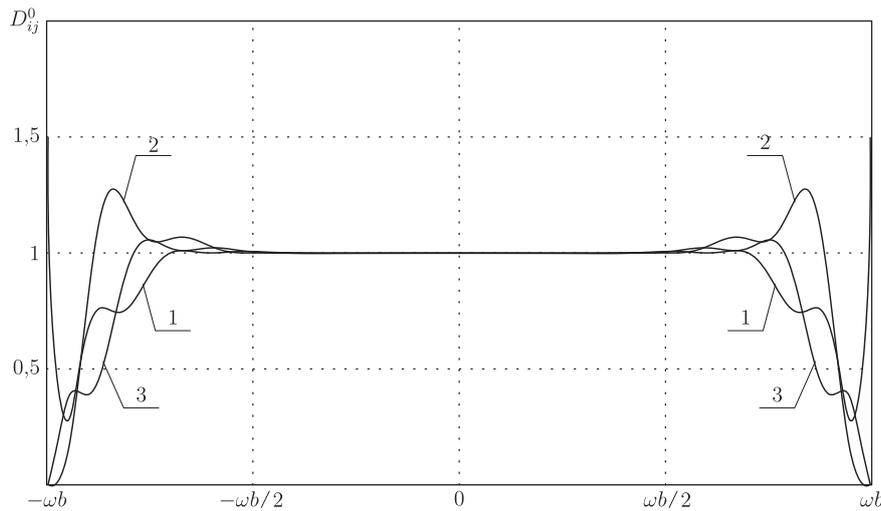


Рис. 2. Графики нормированных дисперсий D_{ij}^0 при $n = 3$: 1 — D_{11}^0 , 2 — D_{22}^0 , 3 — D_{12}^0

$x_2 = \pm\omega b$ разброс напряжений σ_{11} имеет наибольшее значение, здесь $D_{11}^0 = 1,5$. Дисперсии D_{12}^0 , D_{22}^0 принимают максимальные значения в пограничном слое. Вдали от границ полосы дисперсии принимают те же значения, что и для неограниченной плоскости.

Таким образом, флуктуации напряжений в пограничном слое играют существенную роль, и их необходимо учитывать при решении вопроса о надёжности элементов конструкций по критерию длительной прочности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00644-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряжённого состояния / В сб.: *Математическая физика: Сб. научн. трудов*. Куйбышев: КПТИ, 1977. С. 69–74. [Kuznetsov V. A. Creep of stochastically nonuniform media under conditions of a plane stress state / In: *Mathematical Physics* (collected scientific papers). Kuibyshev: KPTI, 1977. Pp. 69–74].
2. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // *ПМТФ*, 1985. № 2. С. 150–155; англ. пер.: Popov N. N., Samarin Yu. P. Spatial problem of stationary creep of a stochastically inhomogeneous medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985. Vol. 26, no. 2. Pp. 296–301.
3. Ломакин В. А., Шейнин В. И. Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974. № 2. С. 65–70. [Lomakin V. A., Sheinin V. I. Stress concentration at the boundary of a randomly inhomogeneous elastic body // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1974. no. 2. Pp. 65–70].
4. Наумов В. Н. Напряжённое состояние случайно-неоднородного упругого полупространства // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976. № 2. С. 58–63. [Naumov V. N. Stressed state of a randomly inhomogeneous elastic half-space // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1976. no. 2. Pp. 58–63].
5. Попов Н. Н., Коваленко Л. В. Поля напряжений на границе стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 61–66. [Popov N. N., Kovalenko L. V. Stress fields on the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane with creep // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 42. Pp. 61–66].

6. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твёрдых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с. [Lomakin V. A. Statistical problems of the mechanics of solid deformable bodies. Moscow: Nauka, 1970. 139 pp.]
7. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. № 1. С. 159–164; англ. пер.: Popov N. N., Samarin Yu. P. Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1988. Vol. 29, no. 1. Pp. 149–154.

Поступила в редакцию 16/XII/2010;
в окончательном варианте — 14/II/2011.

MSC: 35Q74; 74E35, 74K20

CONSTRUCTION OF ANALITICAL SOLUTION OF 2D STOCHASTICALLY NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF STEADY CREEP STATE WITH RESPECT TO THE BOUNDARY EFFECTS

L. V. Kovalenko, N. N. Popov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: flytitmouse@mail.ru; ponick25@gmail.com

The solution of nonlinear stochastically boundary value problem of creep of a thin plate under plane stress is developed. It is supposed that elastic deformations are insignificant and they can be neglected. Determining equation of creep is taken in accordance with nonlinear theory of viscous flow and is formulated in a stochastic form. By applying the method of small parameter nonlinear stochastic problem reduces to a system of three linear partial differential equations, which is solved about fluctuations of the stress tensor. This system with transition to the stress function has been reduced to a single differential equation solution of which is represented as a sum of two series. The first row gives the solution away from the boundary of the body without boundary effects, the second row represents the solution boundary layer, its members quickly fade as the distance increases from plate boundary. Based on this solution, the statistical analysis random stress fields near the boundary of the plate was taken.

Key words: steady creep, stochastically inhomogeneous plate, random field of stresses, perturbation theory, boundary effect.

Original article submitted 16/XII/2010;
revision submitted 14/II/2011.

Ludmila V. Kovalenko (Ph. D. (Phys. & Math.)), Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Nikolay N. Popov* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.