Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 236–240

УДК 519.63

ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

В. Г. Лежнев, А. Н. Марковский

Кубанский государственный университет,
350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

E-mails: lzhnvv@mail.ru, mark@kubsu.ru

Рассматривается метод решения краевой задачи для стационарного неоднородного уравнения Ламе в ограниченной плоской области. Используется определенное расщепление пространства вектор-функций, что приводит для компонент искомого векторного поля к задачам для неоднородного бигармонического уравнения и уравнения Пуассона. Для решения этих задач предлагается метод базисных потенциалов.

Ключевые слова: *уравнение Ламе, разложение Вейля, бигармоническая задача, метод базисных потенциалов (фундаментальных решений).*

1. Формулировка задачи. В ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ рассматривается краевая задача

$$(\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\bar{u}(x) + \mu\Delta\bar{u}(x) = \bar{f}(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$\bar{u}(x)|_S = \bar{b}(x); \tag{2}$$

предполагается, что граничное векторное поле $\bar{b}(x)$ непрерывно, компоненты вектор-функции правой части $\bar{f}(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ суммируемы с квадратом, то есть $\bar{f}(x)$ принадлежит пространству $\bar{L}_2(Q)$ со скалярным произведением $\langle \bar{f}, \bar{g}\rangle = (f_1, g_1)_Q + (f_2, g_2)_Q$ и индуцированной нормой; $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_Q$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$; λ, μ — действительные числа.

Обобщённое решение $\bar{u}(x) \in W_2^1(Q)$ существует и единственно, если Q — ограниченная область с гладкой границей $S = \partial Q$, $\bar{f}(x) \in \bar{L}_2(Q)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ [1].

2. Разложение пространства вектор-функций $\bar{L}_2(Q)$ в прямую сумму и расщепление уравнения.

2.1. Справедливо разложение векторного пространства $\bar{L}_2(Q)$ в прямую сумму [2–4]:

$$\bar{L}_2(Q) = \bar{P}(Q) \oplus \bar{V}(Q),$$

где $\bar{P}(Q)$ — замыкание в норме $\bar{L}_2(Q)$ множества непрерывных потенциальных в Q векторных полей, ортогональных границе S; $\bar{V}(Q)$ — замыкание гладких соленоидальных полей.

Разложим искомое векторное поле $\bar{u}(x)$ и правую часть $\bar{f}(x)$ на ортогональные слагаемые:

$$\bar{u}(x) = \bar{p}(x) + \bar{s}(x), \quad \bar{f}(x) = \bar{f}_p(x) + \bar{f}_s(x).$$

Виктор Григорьевич Лежнев (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. вычислительных технологий. *Алексей Николаевич Марковский* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. вычислительных технологий.

Алгоритм разложения вектор-функций из $\bar{L}_2(Q)$ на ортогональные слагаемые представлен, например, в [4].

Подставляя эти разложения в уравнение (1) и используя равенства

$$\nabla \mathrm{div}\, \nabla\varphi(x) = \nabla\Delta\varphi(x) = \Delta\bar{p}(x),$$

для потенциальной функции $\varphi(x)$ поля $\bar{p}(x) = \nabla\varphi(x)$ получим

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\bar{p}(x) + \mu\Delta\bar{s}(x) = \bar{f}_p(x) + \bar{f}_s(x). \tag{3}$$

Так как соленоидальное и потенциальное векторные поля могут пересекаться только по гармоническому векторному полю, то в (3) прибавим и отнимем гармоническое поле $(\lambda+2\mu)\nabla q(x)$, где $q(x)$ — соответствующая задаче гармоническая функция. Тогда уравнение (3) расщепляется на два:

$$(\lambda + 2\mu)(\Delta\bar{p}(x) - \nabla q(x)) = \bar{f}_p(x), \tag{4}$$
$$\mu\Delta\bar{s}(x) + (\lambda + 2\mu)\nabla q(x) = \bar{f}_s(x). \tag{5}$$

2.2. Уравнение (4) можно привести к виду

$$\nabla\big((\lambda + 2\mu)(\Delta\varphi(x) - q(x)) - \varphi_f(x)\big) = 0,$$

где $\nabla\varphi_f(x) = \bar{f}_p(x)$, то есть $(\lambda + 2\mu)(\Delta\varphi(x) - q(x)) - \varphi_f(x) \equiv 0$, $x \in Q$, и для потенциальной функции $\varphi(x)$ искомого поля $\bar{p}(x)$ получаем неоднородное бигармоническое уравнение $(\lambda + 2\mu)\Delta^2\varphi(x) = g(x)$, где $g(x) = \Delta\varphi_f(x)$.

Обозначим через $\psi(x)$ и $\psi_f(x)$ функции тока соленоидальных полей:

$$\bar{s}(x) = \nabla_c\psi(x), \quad \bar{f}_s(x) = \nabla_c\psi_f(x),$$

где использован знак $\nabla_c = \{\partial/\partial x_1,\ -\partial/\partial x_2\}$.

Пусть $\eta(x)$ — сопряжённая к $q(x)$ гармоническая функция, $\nabla q(x) = \nabla_c\eta(x)$. Тогда, приводя уравнение (5) к виду

$$\nabla_c\big(\mu\Delta\psi(x) + (\lambda + 2\mu)\eta(x) - \psi_f(x)\big) = 0$$

и применяя к нему оператор Лапласа, для функции тока $\psi(x)$ искомого поля $\bar{s}(x)$ получаем неоднородное бигармоническое уравнение $\mu\Delta^2\psi(x) = h(x)$, где $h(x) = \Delta\psi_f(x)$ — известная функция.

3. Вычисление потенциальной и соленоидальной составляющих решения.

3.1. Рассмотрим краевую задачу (1), (2). Разложим граничное векторное поле $\bar{b}(x)$ на нормальную $\bar{m}(x)$ и касательную $\bar{l}(x)$ составляющие. Будем обозначать через $\bar{n}$ и $\bar{t}$ единичные векторы — внешний нормальный к S и касательный в направлении положительного обхода; обозначим также через $(\cdot,\ \cdot)$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Потенциальная составляющая $\bar{p}(x)$ векторного поля $\bar{u}(x)$ должна удовлетворять граничному условию

$$\bar{p}(x) = \bar{m}(x), \quad x \in S; \tag{6}$$

тогда для соленоидальной составляющей $\bar{s}(x)$ получаем

$$\bar{s}(x) = \bar{l}(x), \quad x \in S. \tag{7}$$

Для определения $\varphi(x)$ и потенциальной составляющей $\bar{p}(x) = \nabla\varphi(x)$ искомого векторного поля $\bar{u}(x)$ рассмотрим следующую задачу для бигармонического уравнения:

$$\Delta^2\varphi(x) = g(x), \quad x \in Q, \tag{8}$$

$$\varphi(x)\big|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\Big|_S = (\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{n}, \bar{b}(x)). \tag{9}$$

Полученное векторное поле $\bar{p}(x) = \nabla\varphi(x)$ удовлетворяет граничному условию (6). Действительно, $(\bar{m} - \nabla\varphi)\perp\bar{n}$ по второму условию в (9). Из первого условия следует $\nabla\varphi\perp S$, то есть $(\bar{m} - \nabla\varphi)\perp\bar{t}$. Следовательно, векторное поле $\bar{m} - \nabla\varphi$ на S равно нулю, и граничное условие (6) для поля $\bar{p}(x)$ выполняется.

3.2. Соленоидальное поле $\bar{s}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\bar{s}(x) = \frac{1}{\mu}\nabla_c\big(\psi_f(x) - (\lambda + 2\mu)\eta(x)\big), \quad x \in Q; \tag{10}$$

должно также выполняться граничное условие (7).

Векторное поле будем формировать из двух соленоидальных слагаемых:

$$\bar{s}(x) = \bar{s}_0(x) + \bar{s}_1(x)$$

с граничными условиями при $x \in S$: $\bar{s}_0(x) = 0$, $\bar{s}_1(x) = \bar{l}(x)$. Пусть $\psi_1(x)$ — функция тока для $\bar{s}_1(x)$, т. е. $\bar{s}_1(x) = \nabla_c\psi_1(x)$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta^2\psi_1(x) = h(x), \quad x \in Q, \tag{11}$$

$$\psi_1(x)\big|_S = 0, \quad \frac{\partial\psi_1(x)}{\partial n}\Big|_S = (\bar{l}, \bar{t}). \tag{12}$$

Из (12) следует, что выполняется граничное условие для $\bar{s}_1(x)$. Действительно, второе условие (12) переписывается в виде $(\bar{l}, \bar{t}) = (\nabla\psi, \bar{n}) = (\nabla_c\psi, \bar{t})$, то есть $(\bar{l} - \nabla_c\psi)\perp\bar{t}$. Из первого условия (12) имеем $\nabla\psi\perp S$, или $\nabla_c\psi\perp\bar{n}$, $(\bar{l} - \nabla_c\psi)\perp\bar{n}$. Следовательно, векторное поле $\bar{l} - \nabla_c\psi$ на S равно нулю и граничное условие для $\bar{s}_1(x)$ выполняется.

Обозначим теперь $\Delta\psi_1 = \xi$. Тогда $\Delta\bar{s}_1 = \Delta\nabla_c\psi_1 = \nabla_c\xi$, и для $\bar{s}_0(x)$ из (10), (11) получаем задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta\bar{s}_0(x) = \frac{1}{\mu}\nabla_c\big(\psi_f(x) - (\lambda + 2\mu)\eta(x) - \mu\xi(x)\big), \quad x \in Q, \tag{13}$$

$$\bar{s_0}(x)\big|_S = 0. \tag{14}$$

Решение этой задачи $\bar{s}_0(x)$ — соленоидальное векторное поле. Действительно, из дифференциального уравнения следует, что $\operatorname{div}\bar{s_0}(x)$ — гармоническая функция в Q, и эта функция равна нулю на границе, что следует из однородного граничного условия, то есть $\operatorname{div}\bar{s_0}(x) = 0$ в Q.

Покажем, что в общем случае $\operatorname{div}\bar{s}_0(x_0) = 0$ при $x_0 \in S$ для векторного поля $\bar{s}_0(x)$ с нулевым граничным условием, если контур S в точке x_0 имеет касательную.

Обозначим через Q_ε пересечение ε-окрестности точки x_0 с областью Q, пусть $\partial Q_\varepsilon = S_\varepsilon + C_\varepsilon$, где $S_\varepsilon \subset S$ и $\bar{s}_0(x) = 0$ при $x \in S_\varepsilon$.

В данном случае

$$\int_Q \operatorname{div} \bar{s}_0(x) dx = \int_{C_\varepsilon} \bar{s}_0(x) \cdot \bar{n}(x) dC_\varepsilon,$$

по определению дивергенции в точке имеем

$$\operatorname{div} \bar{s}_0(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|Q_\varepsilon|} \int_{C_\varepsilon} |\bar{s}_0(x)| \cos \alpha(x) dC_\varepsilon.$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $|\bar{s}_0(x)|$ при $\varepsilon \to 0$ и переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получаем

$$\frac{\varepsilon}{|Q_\varepsilon|} \int_0^{\pi+\delta(\varepsilon)} \Big(\varepsilon \, |\bar{s}_0(x_0)| + O(|x - x_0|^2) \cos \alpha(x) \Big) \, d\alpha,$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и все последнее выражение стремится к нулю. Равенство $\operatorname{div} \bar{s}_0(x_0) = 0$ при $x_0 \in S$ доказано.

Алгоритм решения краевой задачи уравнения Ламе (1), (2) состоит в решении краевых задач (8), (9), (11), (12) и (13), (14) — шести скалярных краевых задач в случае $\mathbb{R}^2$. Для всех этих краевых задач может быть использован достаточно простой метод базисных потенциалов [5].

Замечание 1. Если касательная составляющая $\bar{l}(x)$ граничного векторного поля $\bar{b}(x)$ равна нулю, то все построения и алгоритмы применимы в трёхмерном случае $Q \subset \mathbb{R}^3$. Действительно, при этом соленоидальная составляющая $\bar{s}_1(x)$ исчезает. Для другой соленоидальной составляющей $\bar{s}_0(x)$ с однородным граничным условием имеем три уравнения Пуассона.

Замечание 2. Алгоритм может быть применён для неодносвязных ограниченных областей. Пусть, например, $Q = Q_1 \backslash \overline{Q}_2$, $Q_1 \supset Q_2$, где Q_1, Q_2 — ограниченные односвязные области с границами Ляпунова S_1, S_2, $\partial Q{=}S{=}S_1 \cup S_2$. Пусть $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базисная последовательность точек в $Q_1^+ = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{Q}_1$. Можно доказать, что последовательность функций

$$\alpha 1_m^+(x) = E(z^m - x), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad x \in S,$$

где $E(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, полна в $L_2(S_1 {\cup} S_2)$, и применим алгоритм базисных потенциалов.

Замечание 3. Используя результаты работы [6] и замечание 2, алгоритм можно применять для неогранченных областей.

Работа поддержана грантами АВЦП 3341, 3828, 10854 и контрактом ФЦП 2173. Авторы выражают благодарность лаборатории математической физики СамГУ за поддержку на конференции «Математическая физика и её приложения – 2010».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990. 312 с. [*Oleynik O. A., Iosif'yan G. A., Shamaev A. S.* Mathematical problems in the theory of strongly inhomogeneous elastic media. Moscow: MGU, 1990. 312 pp.]

2. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / В сб.: *Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*: Сборник работ / Тр. МИАН СССР, Т. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36. [*Bykhovskiy É. B., Smirnov N. V.* Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis / In: *Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics for a viscous incompressible fluid*: Collected papers / Trudy Mat. Inst. Steklov., 59. Moscow–Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1960. Pp. 5–36].
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. [*Ladyzhenskaya O. A.* Mathematical questions of the dynamics of a viscous incompressible fluid. Moscow: Nauka, 1970. 288 pp.]
4. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с. [*Lezhnev A. V, Lezhnev V. G.* Method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics. Krasnodar: KubGU, 2009. 111 pp.]
5. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2008. № 8/1(67). С. 127–139. [*Lezhnev V. G., Markovskiy A. N.* Method of basis potentials for inhomogeneous biharmonic equation // *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 127–139].
6. *Назаров С. А., Шпековиус-Нойгебауер М.* Аппроксимация неограниченных областей ограниченными. Краевые задачи для оператора Ламе // *Алгебра и анализ*, 1996. Т. 8, № 5. С. 229–268; англ. пер.: *Nazarov S. A., Specovius-Neugebauer M.* Approximation of unbounded domains by bounded domains. Boundary value problems for the Lamé operator // *St. Petersburg Math. J.*, 1997. Vol. 8, no. 5. Pp. 879–912.

Поступила в редакцию 30/XI/2010;
в окончательном варианте — 15/III/2011.

MSC: 34K28

PROGECTIVE ALGORITHM OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS LAME'S EQUATION

V. G. Lezhnev, A. N. Markovskiy

Kuban State University,
149, Stavropolskaya st., Krasnodar, 350040, Russia.

E-mails: lzhnvv@mail.ru, mark@kubsu.ru

The method of boundary value problem solution for the stationary inhomogeneous Lame's equation is considered. An appointed vector-function space splitting is used that leads to inhomogeneous biharmonic equation and Poisson's equation problems for components of required vector field. The basic potentials method is proposed to solve these problems.

Key words: *Lame's equation, Weyl's expansion, bigarmonic equation, basic potentials method (of fundamental solutions).*

Original article submitted 30/XI/2010;
revision submitted 15/III/2011.

Victor G. Lezhnev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Computational Technologies.
Aleksey N. Markovskiy (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Computational Technologies.