Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 241–243

УДК 519.651

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЯХ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ, СВЯЗАННЫХ С ТРЕУГОЛЬНЫМИ СЕТКАМИ, И ИХ ПРИМЕНЕНИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

В. Л. Леонтьев, А. В. Кочулимов

Ульяновский государственный университет,
432970, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

E-mails: leontievvl@ulsu.ru

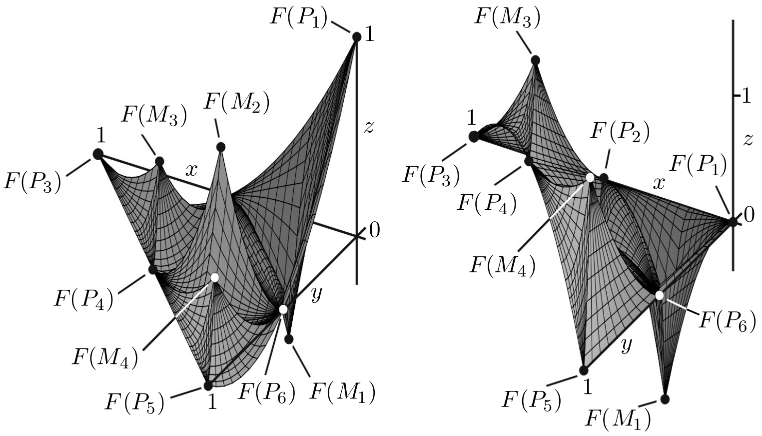
Рассматриваются ортогональные финитные функции второй степени, компактные носители которых представляют собой локальные совокупности треугольников сетки. Формулируется теорема об аппроксимирующих свойствах последовательностей наборов таких функций. Выделяются области применения функций: в алгоритмах смешанных численных методов решения краевых задач, в алгоритмах линейной аппроксимации поверхностей.

Ключевые слова: *ортогональные финитные функции, треугольные сетки, аппроксимирующие свойства, математическое моделирование, краевые задачи, аппроксимация поверхности.*

Ортогональные финитные функции второй степени строятся на сетке треугольников, созданной в некоторой области Ω, на основе классических финитных функций [1, с. 125–130] следующим образом. Каждая треугольная часть P_1, P_3, P_5 конечного носителя функции [1] разбивается на четыре треугольные подобласти тремя линиями, соединяющими середины P_2, P_4, P_6 сторон P_1–P_3, P_3–P_5, P_5–P_1, затем каждая из четырёх полученных подобластей делится на три треугольника линиями, соединяющими вершины этих подобластей и одну из точек M_1, M_2, M_3, M_4 пересечения медиан треугольных подобластей. На всех двенадцати треугольных подобластях строятся вспомогательные финитные функции второй степени, равные единице в узле M_i и нулю во всех остальных пяти узлах малого треугольника, имеющего вершину в точке M_i, их конечный носитель — треугольники, окружающие узел M_i. Вспомогательные финитные функции, взятые с постоянными коэффициентами, складываются с одной из шести классических финитных функций второй степени [1], связанных с узлами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, таким образом модифицируя её. Коэффициенты модифицирующих линейных комбинаций выбираются, исходя из условий взаимной ортогональности шести функций, связанных с узлами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 основной сетки. Графики функций $F(x,y)$, полученных для ведущих узлов P_1, P_4, изображены на рисунке для одной треугольной части конечных носителей финитных функций, связанных с ведущими узлами P_1, P_4. Аналогичный вид имеют модифицированные ортогональные финитные функции, связанные с узлами P_2, P_3, P_5, P_6.

Пусть $W_2^{1,h}$ — подпространство построенных сеточных функций $\varphi_i(x,y)$, где $W_2^{1,h} \subset C(\overline{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$ — пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций с нормой $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max|u(x)|$, $C^{(r)}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство функций,

Виктор Леонтьевич Леонтьев (д.ф.-м.н., профессор), профессор, каф. информационной безопасности и теории управления. *Александр Валерьевич Кочулимов*, аспирант, каф. информационной безопасности и теории управления.



Модифицированные функции, связанные с узлами P_1, P_4

имеющих непрерывные в $\overline{\Omega}$ производные до порядка r включительно, $W_2^r(\Omega)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ — гильбертовы пространства с нормами

$$\|u\|_{W_2^r(\Omega)} = \left(\sum_{\nu \leqslant r} \int_\Omega |D^\nu u|^2 d\Omega \right)^{1/2},$$

где $D^\nu = \partial^{|\nu|}/(\partial^m x \partial^n y)$ — оператор частного дифференцирования m раз по x и n раз по y; $\nu = (m, n)$; m и n принимают значения 0, 1, 2; $|\nu| = m + n$.

Доказана следующая теорема, устанавливающая аппроксимирующие свойства последовательностей наборов сеточных функций $\varphi_i(x, y)$, полученных масштабированием построенных ортогональных финитных функций и их переносом на конкретную сетку — элемент последовательности сгущающихся сеток.

Теорема. *Для любой функции* $u(x, y) \in W_2^2(\Omega) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega})$ *существует*

$$u^h \in W_2^{1,h} : \|u - u^h\|_{W_2^0(\Omega)} \leqslant Ch^3 \|u\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{A^{1/2} S^{1/2} h}{\sin \Theta_0} \sum_{|r|=1} \|D^r u\|_{C(\overline{\Omega})},$$

где Θ_0 — *минимальный из углов всех треугольников сетки*; S — *площадь области* Ω; $A = (76 - 20\sqrt{7} - 4\sqrt{105} + 5\sqrt{15})/480 \approx 0{,}0031$; u^h — *линейные комбинации сеточных функций* $\varphi_i(x, y)$; h — *максимальная длина сторон треугольников сетки*; *постоянный коэффициент* C, *не зависящий от параметров сетки и от функции* u.

В первую область применения последовательностей наборов сеточных ортогональных финитных функций $\varphi_i(x, y)$, связанных с треугольными сетками, входят алгоритмы смешанных численных методов решения краевых задач теории математического моделирования. Такие алгоритмы основаны на смешанных вариационных принципах, в которых одновременно и независимо друг от друга варьируются как основные неизвестные функции (в механике деформируемого твердого тела — компоненты тензоров деформаций и напряжений, компоненты вектора перемещения) и их частные производные. Эта особенность методов, как известно, приводит к получению приближённых решений одинаковой гладкости и одного порядка точности для всех кинематических и силовых факторов. Основной недостаток смешанных численных методов — повышенное число узловых неизвестных — устраняется благодаря использованию ортогональных финитных функций, которые в отличие от классических ортогональных многочленов и специальных функций позволяют решать двумерные задачи в областях с криволинейными границами. Вычислительные затраты этих методов такие же, как у численных методов «в перемещениях», основанных на вариационном принципе Лагранжа. Вторая область применения последовательностей наборов сеточных функций $\varphi_i(x, y)$ — линейная аппроксимация поверхностей объектов и сглаживание локальных дефектов поверхностей. За счёт ортогональности финитных функций аппроксимация поверхностей эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типов проводится в несколько раз быстрее, чем в случае использования классических финитных функций. При этом относительная ошибка аппроксимации на сетках с 1–2 тысячами узлов составляет десятые и сотые доли процента, что удовлетворяет требованиям многих приложений.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракты №№ П1122, П2230).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Марчук Г. И., Агошков В. В.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с. [*Marchuk G. I., Agoshkov V. I.* Introduction to projection-grid methods. Moscow: Nauka, 1981. 416 pp.]

Поступила в редакцию 01/X/2010;
в окончательном варианте — 02/II/2011.

MSC: 42C40, 41A15

ON ORTHOGONAL SECOND ORDER FINITE FUNCTIONS ASSOCIATED WITH TRIANGULAR MESHES AND THEIR APPLICATION IN MATHEMATICAL MODELING

V. L. Leontiev, A. V. Kochulimov

Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 4329170, Russia.

E-mails: `leontievvl@ulsu.ru`

Second order orthogonal finite functions are studied, their compact supports are local sets of grid triangles. The theorem on approximating the properties of sequences of sets of such functions is formulated. The applications in algorithms of mixed numerical methods of boundary value problems solution, in algorithms of linear approximation of surfaces are considered.

Key words: *orthogonal finite functions, triangular grids, approximating properties, mathematical modeling, boundary value problems, surface approximation.*

Original article submitted 01/X/2010;
revision submitted 02/II/2011.

Victor L. Leontiev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Information Security & Management Theory. *Alexander V. Kochulimov*, Postgraduate Student, Dept. of Information Security & Management Theory.