

УДК 539,3

СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СВОБОДНОМ ОПИРАНИИ КРАЁВ

П. Ф. Недорезов, А. В. Аристамбекова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (национальный исследовательский университет), механико-математический факультет, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

E-mails: p1934n@yandex.ru, aristambekovaav@mail.ru

Рассматривается задача изгиба и колебания многослойной прямоугольной пластинки, состоящей из N ортотропных слоёв произвольной толщины. Края пластинки предполагаются свободно опёртыми. Обсуждается возможность получения аналитического решения. Предложена и реализована методика численного решения. Результаты расчётов представлены в виде таблиц.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, изгиб, вибрация, численное решение, дискретная ортогонализация.

1. Постановка задачи. Основные формулы и уравнения. Рассматривается толстая прямоугольная пластинка с размерами в плане $a \times b$ и толщиной H , состоящая из жёстко соединённых между собой ортотропных слоёв с толщинами h_k ($k = 1, 2, \dots, N$) (см. рис. 1).

Предполагается, что главные направления анизотропии в каждой точке слоёв параллельны рёбрам пластинки. Пластинка изгибается поперечной нагрузкой интенсивности $q(x, y, t) = q_0(x, y) \exp(i\omega t)$, распределённой по плоскости $z = H$; плоскость $z = 0$ от нагрузки свободна. Края $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ считаются свободно опёртыми. Деформации пластинки малы и подчиняются закону Гука [1].

Для упрощения выкладок в дальнейшем принимается, что

$$q(x, y) = p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad p_0 = \text{const.}$$

Система уравнений для определения проекций вектора смещения $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ и напряжений $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_y^{(k)}$, \dots , $\tau_{xy}^{(k)}$ k -того слоя состоит из уравнений движения сплошной среды и уравнений обобщённого закона Гука.

Считая колебательный процесс установившимся, все характеристики напряжённо-деформированного состояния (НДС) k -того слоя пластинки ($b_{k-1} \leq z \leq b_k$; $b_0 = 0$, $b_k = b_{k-1} + h_k$; $k = 1, 2, \dots, N$) будем искать в виде $f^{(k)}(x, y, z, t) = \tilde{f}^{(k)}(x, y, z) \exp(i\omega t)$. Тогда для амплитудных значений смещений и напряжений после отделения временной переменной t получим

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}^{(k)}}{\partial z} + \rho_k \omega^2 \tilde{u}^{(k)} = 0, \quad (1)$$

Пётр Феодосьевич Недорезов (д.т.н., проф.), профессор, каф. математической теории упругости и биомеханики. *Асель Валерьевна Аристамбекова*, аспирант, каф. математической теории упругости и биомеханики.

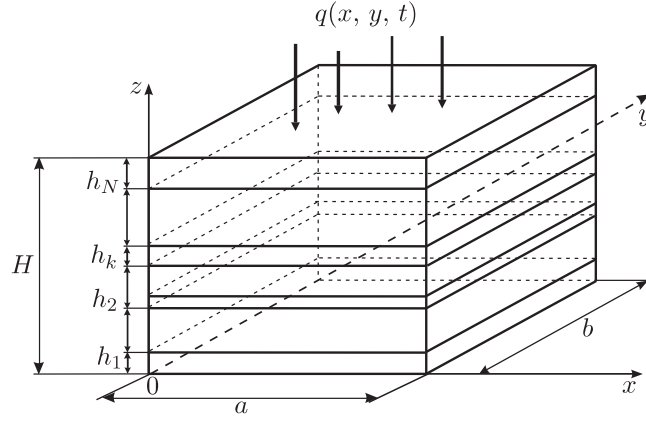


Рис. 1

$$\tilde{\sigma}_x^{(k)} = A_{11}^{(k)} \frac{\partial \tilde{u}^{(k)}}{\partial x} + A_{12}^{(k)} \frac{\partial \tilde{v}^{(k)}}{\partial y} + A_{13}^{(k)} \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}}{\partial z}, \quad \tilde{\tau}_{yz}^{(k)} = A_{44}^{(k)} \left(\frac{\partial \tilde{v}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z, \quad 1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3, \quad 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6, \quad \tilde{u}^{(k)} \Leftrightarrow \tilde{v}^{(k)} \Leftrightarrow \tilde{w}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $A_{ij}^{(k)}$ — упругие постоянные, ρ_k — плотность материала.

Решение уравнений (1), (2) должно быть подчинено условиям на боковых гранях

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: \quad & \tilde{v}^{(k)} = \tilde{w}^{(k)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_x^{(k)} = 0, \\ \text{при } y = 0, y = b: \quad & \tilde{u}^{(k)} = \tilde{w}^{(k)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_y^{(k)} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

на верхней и нижней плоскостях:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad & \tilde{\sigma}_z^{(1)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{xz}^{(1)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{yz}^{(1)} = 0, \\ \text{при } z = H: \quad & \tilde{\sigma}_z^{(1)} = -q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \tilde{\tau}_{xz}^{(1)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{yz}^{(1)} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

на поверхностях контакта смежных слоёв ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) при $z = b_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(k)} = \tilde{u}^{(k+1)}, \quad \tilde{v}^{(k)} = \tilde{v}^{(k+1)}, \quad \tilde{w}^{(k)} = \tilde{w}^{(k+1)}, \\ \tilde{\sigma}_z^{(k)} = \tilde{\sigma}_z^{(k+1)}, \quad \tilde{\tau}_{xz}^{(k)} = \tilde{\tau}_{xz}^{(k+1)}, \quad \tilde{\tau}_{yz}^{(k)} = \tilde{\tau}_{yz}^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для понижения размерности трехмерной краевой задачи (1)–(5) представим функции $\tilde{u}^{(k)}$, $\tilde{v}^{(k)}$, $\tilde{w}^{(k)}$, $\tilde{\sigma}_x^{(k)}$, $\tilde{\sigma}_y^{(k)}$, ..., $\tilde{\tau}_{xy}^{(k)}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(k)} &= HU^{(k)}(\zeta) \cos m\pi\xi \sin n\pi\eta, \\ \tilde{v}^{(k)} &= HV^{(k)}(\zeta) \sin m\pi\xi \cos n\pi\eta, \\ \tilde{w}^{(k)} &= HW^{(k)}(\zeta) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta, \\ \tilde{\sigma}_x^{(k)} &= S_x^{(k)}(\zeta) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z), \\ \tilde{\tau}_{yz}^{(k)} &= T_{yz}^{(k)}(\zeta) \sin m\pi\xi \cos n\pi\eta, \\ \tilde{\tau}_{xz}^{(k)} &= T_{xz}^{(k)}(\zeta) \cos m\pi\xi \sin n\pi\eta, \\ \tilde{\tau}_{xy}^{(k)} &= T_{xy}^{(k)}(\zeta) \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\varsigma = z/H$ — безразмерные переменные, а $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$ — безразмерные амплитуды составляющих вектора смещения.

Тогда граничные условия (3) будут выполнены автоматически, а из (1) и (2) для новых неизвестных функций после некоторых преобразований получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dT_{xz}^{(k)}}{d\varsigma} + \tilde{h}\pi \left(mS_x^{(k)} - ncT_{xy}^{(k)} \right) + \rho_k H^2 \omega^2 U^{(k)} &= 0, \\ \frac{dT_{yz}^{(k)}}{d\varsigma} - \tilde{h}\pi \left(mT_{xy}^{(k)} - ncS_y^{(k)} \right) + \rho_k H^2 \omega^2 V^{(k)} &= 0, \\ \frac{dS_z^{(k)}}{d\varsigma} - \tilde{h}\pi \left(mT_{xz}^{(k)} + ncT_{yz}^{(k)} \right) + \rho_k H^2 \omega^2 W^{(k)} &= 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} S_x^{(k)} &= -\tilde{h}\pi \left(mA_{11}^{(k)} U^{(k)} + ncA_{12}^{(k)} V^{(k)} \right) + A_{13}^{(k)} \frac{dW^{(k)}}{d\varsigma}, \\ S_y^{(k)} &= -\tilde{h}\pi \left(mA_{12}^{(k)} U^{(k)} + ncA_{22}^{(k)} V^{(k)} \right) + A_{23}^{(k)} \frac{dW^{(k)}}{d\varsigma}, \\ S_z^{(k)} &= -\tilde{h}\pi \left(mA_{13}^{(k)} U^{(k)} + ncA_{23}^{(k)} V^{(k)} \right) + A_{33}^{(k)} \frac{dW^{(k)}}{d\varsigma}, \\ T_{yz}^{(k)} &= A_{44}^{(k)} \left(\frac{dV^{(k)}}{d\varsigma} + \tilde{h}\pi ncW^{(k)} \right), \\ T_{xz}^{(k)} &= A_{55}^{(k)} \left(\frac{dU^{(k)}}{d\varsigma} + \tilde{h}m\pi W^{(k)} \right), \\ T_{xy}^{(k)} &= A_{66}^{(k)} \tilde{h}\pi \left(ncU^{(k)} + mV^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия для этих уравнений следуют из (4) и (5).

2. Аналитическое решение. Для системы уравнений (7), (8) нетрудно получить точное аналитическое решение.

а) *Решение в перемещениях.* Подставляя из (8) в (7) выражения функций $S_x^{(k)}$, $S_y^{(k)}$, ..., $T_{xy}^{(k)}$, получаем систему уравнений для $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$:

$$\begin{aligned} A_{55}^{(k)} \frac{d^2 U^{(k)}}{d\varsigma^2} &= \left[\tilde{h}^2 \pi^2 \left(A_{11}^{(k)} m^2 + A_{66}^{(k)} n^2 c^2 \right) - \rho_k H^2 \omega^2 \right] U^{(k)}(\varsigma) + \\ &+ \left(A_{12}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \right) \tilde{h}^2 \pi^2 mnc V^{(k)}(\varsigma) - \left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right) \tilde{h}m\pi \frac{dW^{(k)}}{d\varsigma}, \\ A_{44}^{(k)} \frac{d^2 V^{(k)}}{d\varsigma^2} &= \left(A_{12}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \right) \tilde{h}^2 \pi^2 mnc U^{(k)}(\varsigma) + \\ &+ \left[\tilde{h}^2 \pi^2 \left(A_{22}^{(k)} n^2 c^2 + A_{66}^{(k)} m^2 \right) - \rho_k H^2 \omega^2 \right] V^{(k)}(\varsigma) - \\ &- \left(A_{23}^{(k)} + A_{44}^{(k)} \right) \tilde{h}\pi nc \frac{dW^{(k)}}{d\varsigma}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_{33}^{(k)} \frac{d^2 W^{(k)}}{d\zeta^2} = \tilde{h}\pi \left[\left(A_{13}^{(k)} + A_{55}^{(k)} \right) m \frac{dU^{(k)}}{d\zeta} + \left(A_{23}^{(k)} + A_{44}^{(k)} \right) nc \frac{dV^{(k)}}{d\zeta} \right] + \left[\tilde{h}^2 \pi^2 \left(A_{44}^{(k)} n^2 c^2 + A_{55}^{(k)} m^2 \right) - \rho_k H^2 \omega^2 \right] W^{(k)}(\zeta),$$

где $\tilde{h} = H/a$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Для нахождения общего решения системы уравнений (9) наиболее рациональным, по нашему мнению, является подход, методика которого приводится, например, в [2, стр. 153–158]. Согласно этой методике одна из искомых функций, например $W^{(k)}(\zeta)$, принимается за основную. Тогда последовательным дифференцированием третьего уравнения (9) вычисляются производные функции $W^{(k)}(\zeta)$ до шестого порядка включительно, причём из результатов дифференцирования исключаются функции $U^{(k)}(\zeta)$, $V^{(k)}(\zeta)$ и их производные. В результате таких операций для функции $W^{(k)}(\zeta)$ получается дифференциальное уравнение шестого порядка

$$\frac{d^6 W^{(k)}}{d\zeta^6} + d \frac{d^4 W^{(k)}}{d\zeta^4} + f \frac{d^2 W^{(k)}}{d\zeta^2} + g W^{(k)}(\zeta) = 0 \quad (10)$$

с известными коэффициентами d , f и g , а функции $U^{(k)}(\zeta)$ и $V^{(k)}(\zeta)$ представляются линейными комбинациями вида

$$\begin{aligned} U^{(k)}(\zeta) &= \alpha_1 \frac{d^5 W^{(k)}}{d\zeta^5} + \beta_1 \frac{d^3 W^{(k)}}{d\zeta^3} + \gamma_1 \frac{dW^{(k)}}{d\zeta}, \\ V^{(k)}(\zeta) &= \alpha_2 \frac{d^5 W^{(k)}}{d\zeta^5} + \beta_2 \frac{d^3 W^{(k)}}{d\zeta^3} + \gamma_2 \frac{dW^{(k)}}{d\zeta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая уравнение (10), получаем выражение $W^{(k)}(\zeta)$, в котором будет содержаться шесть произвольных постоянных. В силу (11) эти же постоянные будут линейно входить в формулы для $U^{(k)}(\zeta)$ и $V^{(k)}(\zeta)$. Тогда число неизвестных постоянных в выражениях $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$ для каждого слоя равно шести, и они определяются из уравнений, которые следуют из (4) и (5).

б) Решение в смешанной форме. Решение рассматриваемой задачи можно получить и в смешанной форме, если в качестве основных неизвестных в k -том слое принять $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $W^{(k)}$, $S_z^{(k)}$, $T_{xz}^{(k)}$ и $T_{yz}^{(k)}$.

Тогда для этих функций из (7) и (8) получается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dU^{(k)}}{d\zeta} &= -\tilde{h}m\pi W^{(k)} + \frac{T_{xz}^{(k)}}{A_{55}^{(k)}}, & \frac{dV^{(k)}}{d\zeta} &= -\tilde{h}nc\pi W^{(k)} + \frac{T_{yz}^{(k)}}{A_{44}^{(k)}}, \\ \frac{dW^{(k)}}{d\zeta} &= \frac{1}{A_{33}^{(k)}} \left[\tilde{h}\pi \left(A_{13}^{(k)} m U^{(k)} + A_{23}^{(k)} nc V^{(k)} \right) + S_z^{(k)} \right], \\ \frac{dS_z^{(k)}}{d\zeta} &= \tilde{h}\pi \left[m T_{xz}^{(k)} + nc T_{yz}^{(k)} \right] - \rho_k H^2 \omega^2 W^{(k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{xz}^{(k)}}{d\varsigma} = & \left\{ \tilde{h}^2 \pi^2 \left[\left(A_{11}^{(k)} - \frac{(A_{13}^{(k)})^2}{A_{33}^{(k)}} \right) m^2 + A_{66}^{(k)} n^2 c^2 \right] - \rho_k H^2 \omega^2 \right\} U^{(k)} + \\ & + \tilde{h}^2 \pi^2 mnc \left(A_{12}^{(k)} + A_{66}^{(k)} - \frac{A_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} \right) V^{(k)} - \tilde{h} m \pi \frac{A_{13}^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} S_z^{(k)}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{yz}^{(k)}}{d\varsigma} = & \tilde{h}^2 mnc \pi^2 \left(A_{12}^{(k)} + A_{66}^{(k)} - \frac{A_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} \right) U^{(k)} + \\ & + \left\{ \tilde{h}^2 \pi^2 \left[\left(A_{22}^{(k)} - \frac{(A_{23}^{(k)})^2}{A_{33}^{(k)}} \right) n^2 c^2 + A_{66}^{(k)} m^2 \right] - \rho_k H^2 \omega^2 \right\} V^{(k)} - \tilde{h} nc \pi \frac{A_{23}^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} S_z^{(k)}, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$, $b_{k-1} \leq z \leq b_k$.

В результате применения к уравнениям (12) методики [2] для функции $W^{(k)}(\varsigma)$ снова получается дифференциальное уравнение вида (10), и его общее решение по-прежнему будет содержать шесть произвольных постоянных. Остальные неизвестные функции будут выражены через производные от $W^{(k)}(\varsigma)$: $T_{xz}^{(k)}$ и $T_{yz}^{(k)}$ — через нулевую, вторую и четвёртую производные, а $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $S_z^{(k)}$ — через первую, третью и пятую.

Из-за сложности зависимости корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ характеристического уравнения для уравнения (10) от значений упругих постоянных $A_{ij}^{(k)}$, параметров нагрузки m, n и ω и толщин слоёв h_k выполнить анализ влияния этих параметров на распределение напряжений и смещений по толщине пластинки можно только после выполнения численных расчётов. Ниже приводится вариант методики получения численного решения для системы (12), так как для систем такого вида условия контакта слоёв записываются в наиболее простой форме.

3. Численное решение. В настоящее время известен ряд эффективных численных методов решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. К их числу относится метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова, который предназначен для нахождения решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\bar{Y}(\varsigma)}{d\varsigma} = D\bar{Y}(\varsigma). \quad (13)$$

Высокая точность метода Годунова проверена разными авторами при решении большого количества тестовых задач.

Чтобы привести совокупность систем (12) к виду (13), введём в рассмотрение вектор-функцию $\bar{Y}(\varsigma) = (y_0(\varsigma), y_1(\varsigma), \dots, y_5(\varsigma))$, положив при $b_{k-1} \leq \varsigma \leq b_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} y_0(\varsigma) = U_k(\varsigma), \quad y_1(\varsigma) = V_k(\varsigma), \quad y_2(\varsigma) = W_k(\varsigma), \\ y_3(\varsigma) = S_z^{(k)}(\varsigma), \quad y_4(\varsigma) = T_{xz}^{(k)}(\varsigma), \quad y_5(\varsigma) = T_{yz}^{(k)}(\varsigma). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда после перехода в (12) к безразмерным переменным и с учётом (13) ненулевые компоненты матрицы $D = (d_{ij})_{i=0, j=0}^{5, 5}$ при $b_{k-1} \leq \varsigma \leq b_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} d_{02} &= -d_{34} = -\tilde{h}m\pi, & d_{12} &= -d_{35} = -\tilde{h}nc\pi, & d_{04} &= 1/A_{55}^{(k)}, \\ d_{15} &= 1/A_{44}^{(k)}, & d_{23} &= 1/A_{33}^{(k)}, & d_{32} &= -\rho_K\omega^2 H^2, \\ d_{20} &= -d_{43} = \tilde{h}m\pi A_{13}^{(k)}/A_{33}^{(k)}, & d_{21} &= -d_{53} = \tilde{h}nc\pi A_{23}^{(k)}/A_{33}^{(k)}, \\ d_{40} &= \tilde{h}^2\pi^2 \left[m^2 \left(A_{11}^{(k)} - (A_{13}^{(k)})^2/A_{33}^{(k)} \right) + n^2 c^2 A_{66}^{(k)} \right] - \rho_k \omega^2 H^2, \\ d_{51} &= \tilde{h}^2\pi^2 \left[n^2 c^2 \left(A_{22}^{(k)} - (A_{23}^{(k)})^2/A_{33}^{(k)} \right) + m^2 A_{66}^{(k)} \right] - \rho_k \omega^2 H^2, \\ d_{41} &= d_{50} = \tilde{h}^2 mnc\pi^2 \left[A_{12}^{(k)} + A_{66}^{(k)} - A_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)}/A_{33}^{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Граничные условия следуют из (4), которые после подстановки выражений (6) с учётом (14) записываются в виде

$$H_1 \bar{Y}(0) = 0, \quad H_2 \bar{Y}(1) = \bar{g}_2, \quad (15)$$

где $H_1 = (h_{ij})_{i=0, j=0}^{2, 5}$ и $H_2 = (h_{i+3j})_{i=0, j=0}^{2, 5}$ — прямоугольные матрицы, у которых отличны от нуля компоненты $h_{03} = h_{14} = h_{25} = h_{33} = h_{44} = h_{55} = 1$, а $\bar{g}_2 = (-q_0, 0, 0)$.

При решении краевой задачи (13), (15) методом дискретной ортогонализации параметр M ($M+1$ — число отрезков, на которое делится интервал $0 \leq \varsigma \leq 1$) следует выбирать так, чтобы точки контакта слоёв $\varsigma = b_k$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) принадлежали множеству точек ортогонализации $\varsigma = j/M$ ($j = 0, 1, \dots, M$). Тогда условия контакта слоёв (5) будут выполнены автоматически.

После решения задачи (13), (15) максимальные амплитуды напряжений $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_y^{(k)}$, $\tau_{xy}^{(k)}$ в соответствующих точках вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} S_x^{(k)} &= -\tilde{h}m\pi \left[A_{11}^{(k)} - (A_{13}^{(k)})^2/A_{33}^{(k)} \right] y_0(\varsigma) - \\ &\quad - \tilde{h}nc\pi \left[A_{12}^{(k)} - A_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)}/A_{33}^{(k)} \right] y_1(\varsigma) + A_{13}^{(k)}/A_{33}^{(k)} y_3(\varsigma), \\ S_y^{(k)} &= -\tilde{h}m\pi \left[A_{12}^{(k)} - A_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)}/A_{33}^{(k)} \right] y_0(\varsigma) - \\ &\quad - \tilde{h}nc\pi \left[A_{22}^{(k)} - (A_{23}^{(k)})^2/A_{33}^{(k)} \right] y_1(\varsigma) + A_{23}^{(k)}/A_{33}^{(k)} y_3(\varsigma), \\ T_{xy}^{(k)} &= \tilde{h}\pi A_{66}^{(k)} [ncy_0(\varsigma) + my_1(\varsigma)]. \end{aligned}$$

Отметим, что все приведённые формулы и уравнения остаются в силе и при $\omega = 0$. В этом случае они определяют НДС многослойной пластинки при статическом изгибе.

4. Результаты численных расчётов. Изложенная методика численного решения была применена для исследования НДС при статическом изгибе ($\omega=0$)

и определения резонансных частот при установившихся колебаниях ($\omega \neq 0$) квадратных однослойных и двухслойных пластинок с размерами в плане $a = b = 1$ м и толщиной $H = 0,1$ м и $H = 0,2$ м. Вычисления выполнялись при $q_0 = 1,0$ Па, $\rho = 1500$ кг/м³, $m = n = 1$.

В качестве параметров модели принимались параметры, соответствующие ортотропным стеклопластикам (однонаправленный стеклопластик и СВМ 5:1). Значения технических упругих постоянных для этих материалов, взятые из [3], приведены в табл. 1. Для нижнего слоя брались параметры материала СВМ 5:1, для верхнего — однонаправленного стеклопластика; $h_* = h_1/H \in \{1,0; 0,95; 0,9; 0,75; 0,5\}$.

При статическом изгибе ($\omega = 0$) величины прогиба $W(\zeta)$ и напряжений $\sigma_x^{(k)}(0,5, 0,5, \zeta) = S_x^{(k)}(\zeta)$, $\sigma_y^{(k)}(0,5, 0,5, \zeta) = S_y^{(k)}(\zeta)$ ($k = 1, 2$) для некоторых характерных значений ζ приведены в табл. 2 ($H = 0,1$ м) и в табл. 3 ($H = 0,2$ м). В табл. 2 и последующих значения при $h_* = 0$ и $h_* = 1$ соответствуют однослойным пластинкам из СВМ 5:1 ($h_* = 1$) и однонаправленного стеклопластика ($h_* = 0$).

Как следует из результатов вычислений, добавление к однослойной пластинке даже очень тонкого слоя из более жёсткого материала ($E_1^{(2)} > E_1^{(1)}$) при неизменной общей толщине пакета H существенно влияет на прогибы и напряжения в пластинке. При этом двухслойная пластинка начинает работать приблизительно так же, как однослойная пластинка из более жёсткого

Таблица 1

$E_1 \cdot 10^{-5}$, МПа	$E_2 \cdot 10^{-5}$, МПа	$E_3 \cdot 10^{-5}$, МПа	$G_{12} \cdot 10^{-5}$, МПа	$G_{23} \cdot 10^{-5}$, МПа	$G_{13} \cdot 10^{-5}$, МПа	ν_{12}	ν_{23}	ν_{13}
СВМ 5:1								
0,359	0,167	0,889	0,0468	0,0484	0,04	0,18	0,38	0,052
Однонаправленный стеклопластик								
0,505	0,147	0,147	0,050	0,049	0,055	0,268	0,43	0,07

Таблица 2

h_*	1,0	0,95	0,90	0,75	0,50	0,0
$W(0,0) \cdot 10^9$	-17,048	-14,755	-14,728	-14,643	-14,508	-14,192
$W(0,5) \cdot 10^9$	-17,193	-14,894	-14,867	-14,782	-14,647	-14,332
$W(1,0) \cdot 10^9$	-1,7103	-14,781	-14,754	-14,670	-14,537	-14,224
$S_x(0,0)$, Па	30,589	27,166	27,078	26,800	26,631	35,640
$S_x(0,5)$, Па	-0,080	0,591	0,557	0,453	0,294	-0,054
$S_x^{(1)}(h_*)$, Па	-30,723	-23,058	-20,267	-12,261	0,294	—
$S_x^{(2)}(h_*)$, Па	—	-32,384	-28,460	-17,208	0,432	-35,792
$S_x(1,0)$, Па	-30,723	-36,388	-36,364	-36,284	-36,147	-35,792
$S_y(0,0)$, Па	16,173	13,962	13,942	13,879	13,777	12,829
$S_y(0,5)$, Па	-0,045	-0,117	-0,112	-0,096	-0,070	-0,059
$S_y^{(1)}(h_*)$, Па	-16,289	-12,761	-11,296	-6,998	-0,070	—
$S_x^{(2)}(h_*)$, Па	—	-12,156	-10,764	-6,680	-0,097	-12,962
$S_y(1,0)$, Па	-16,289	-13,538	-13,510	-13,423	-13,284	-12,962

Таблица 3

h_*	1,0	0,95	0,90	0,75	0,50	0,0
$W(0,0) \cdot 10^9$	-1,291	-1,150	-1,148	-1,141	-1,127	-1,092
$W(0,5) \cdot 10^9$	-1,336	-1,190	-1,188	-1,181	-1,168	-1,133
$W(1,0) \cdot 10^9$	-1,346	-1,179	-1,177	-1,170	-1,157	-1,124
$S_x(0,0)$, Па	7,577	7,101	7,074	6,989	6,814	-8,874
$S_x(0,5)$, Па	-0,017	0,236	0,226	0,182	0,112	-0,03
$S_x^{(1)}(h_*)$, Па	-7,808	-5,764	-4,945	-2,810	0,112	—
$S_x^{(2)}(h_*)$, Па	—	-8,064	-6,914	-3,919	0,174	-9,105
$S_x(1,0)$, Па	-7,808	-9,307	-9,302	-9,284	-9,243	-9,105
$S_y(0,0)$, Па	4,435	3,952	3,948	3,932	3,903	3,588
$S_y(0,5)$, Па	-0,032	-0,057	-0,054	-0,048	-0,035	-0,052
$S_y^{(1)}(h_*)$, Па	-4,603	-3,674	-3,225	-1,962	-0,035	—
$S_x^{(2)}(h_*)$, Па	—	-3,534	-3,107	-1,905	-0,072	-3,749
$S_y(1,0)$, Па	-4,603	-3,969	-3,961	-3,933	-3,882	-3,749

материала. Однако следует иметь в виду, что в двухслойных пластинках напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} на поверхности контакта слоёв $\zeta = h_*$ терпят разрыв. Напряжение σ_z при статическом изгибе меньше напряжений σ_x , σ_y и по модулю не превосходит значения $q_0 = 1,0$ Па.

Установившиеся колебания пластинок исследовались в диапазоне частот $0 < \omega < 80000 \text{ с}^{-1}$. Исследования показали, что у рассматриваемых пластинок имеется спектр резонансных частот $\omega_k^{\text{рез}}$, при которых все характеристики НДС неограниченно возрастают, а при переходе через значения $\omega = \omega_k^{\text{рез}}$ меняют знак. Разным значениям $\omega_k^{\text{рез}}$ соответствуют различные законы изменения характеристик НДС по толщине пластинки, которые качественно отличаются друг от друга. При колебаниях первого типа (их называем чисто изгибными) амплитуда прогиба W постоянна или очень мало меняется по толщине пакета, а тангенциальные смещения U и V и напряжения σ_x и σ_y в пределах каждого слоя меняются по ζ по линейному или близкому к нему закону.

Наряду с чисто изгибными в пластинках реализуются колебания другого типа — планарные. Для таких колебаний характерно линейное со сменой знака или близкое к нему изменение прогиба W (эффект «разбухания» или «подтягивания»). Тангенциальные смещения при планарных колебаниях очень мало меняются по толщине, а нормальные напряжения σ_x и σ_y в пределах каждого слоя почти постоянны.

Кроме указанных типов колебаний в пластинках существуют и другие, которые являются сложными комбинациями чисто изгибных и планарных с преобладанием изгибных или планарных составляющих. Такие колебания наблюдаются как при высших резонансных частотах, так и при отличающихся от них.

Резонансные частоты представляются в виде $\omega_k^{\text{рез}} = \omega_k + \delta$ при изгибных или изгибно-планарных колебаниях и $\omega_k^{\text{рез}} = \Omega_k + \delta$, если колебания планарные. Значения ω_k и Ω_k при $\delta < 1 \text{ с}^{-1}$ для пластинок с $H = 0,1$ м для рассматриваемого диапазона изменения ω приведены в табл. 4, а в случае $H = 0,2$ м — в табл. 5.

Таблица 4

h_*	ω_1	ω_2	ω_3	Ω_1	Ω_2
1,00	1952	57912	79994	11159	16969
0,95	2097	57927	60616	10885	19382
0,90	2099	57927	60630	10883	19396
0,75	2105	57927	60668	10877	19437
0,50	2115	57925	60718	10868	19499
0,00	2138	57918	60803	10848	19626

Таблица 5

h_*	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	Ω_1	Ω_2
1,00	3446	31738	39560	54081	58257	76715	11147	16926
0,95	3649	30553	34389	51961	58109	61944	10900	19067
0,90	3652	30554	34428	52079	58169	62071	10896	19096
0,75	3663	30556	34535	52356	58324	62396	10885	19178
0,50	3685	30553	34696	52632	58510	62763	10867	19311
0,00	3742	30535	34979	52777	58638	62990	10830	19566

Как видно из этих таблиц, увеличение толщины пакета существенно уплотняет спектр резонансных частот. При этом первая резонансная частота ω_1 — частота чисто изгибных колебаний — возрастает, а частоты изгибно-планарных и планарно-изгибных колебаний $\omega_2, \omega_3, \dots$ вследствие сжатия частотного спектра убывают. Частоты Ω_1 и Ω_2 чисто планарных колебаний зависят в основном от размеров пластинки в плане и в меньшей степени — от материала, с изменением H они меняются мало. Изменение толщины h_2 слоя из более жесткого материала сказывается на колебаниях пластинки так же, как и в случае статического изгиба.

Некоторые возможные законы изменения по ζ амплитуд прогиба W и тангенциального смещения U при различных частотах иллюстрируют графики, представленные соответственно на рис. 2 и рис. 3. Эти графики построены для пластинки с толщиной пакета $H = 0,2$ м при $h_1 = 0,15$ м и $h_2 = 0,05$ м. Кривая 1 на рис. 2 соответствует частоте $\omega = 36000 \text{ с}^{-1}$, кривая 2 — $\omega = 37000 \text{ с}^{-1}$, кривая 3 — $\omega = 54900 \text{ с}^{-1}$, кривая 4 — $\omega = 59350 \text{ с}^{-1}$, кривая 5 — $\omega = 57500 \text{ с}^{-1}$, ординаты кривых 2 и 5 увеличены соответственно в 2 и 10 раз. На рис. 3 кривая 1 построена для частоты $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, кривая 2 — $\omega = 19000 \text{ с}^{-1}$, кривая 3 — $\omega = 52000 \text{ с}^{-1}$.

Отдельный интерес представляют величина и закон изменения по толщине нормального напряжения σ_z , которое в классической и большинстве других приближенных теорий считаются малыми по сравнению с σ_x и σ_y и поэтому, как правило, не учитываются. Графики, представленные на рис. 4 (сплошные линии — σ_z , штриховые — σ_x), показывают, что в толстой двухслойной ортотропной пластинке напряжения σ_z при некоторых значениях ω меняются по толщине по сложному закону и могут быть меньше (кривые 1, $\omega = 59300 \text{ с}^{-1}$), одного порядка (кривые 2, $\omega = 32300 \text{ с}^{-1}$) или превосходить (кривые 3, $\omega = 53500 \text{ с}^{-1}$) значения σ_x .

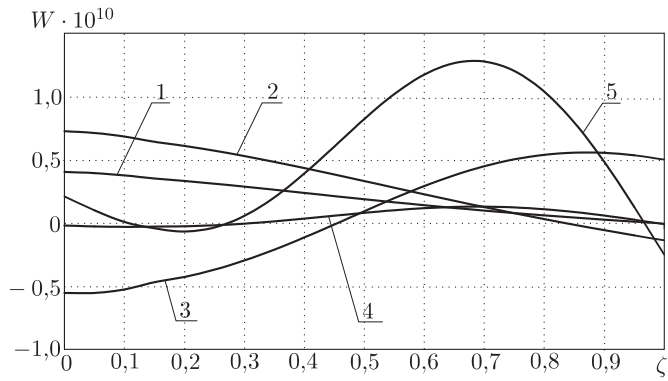


Рис. 2

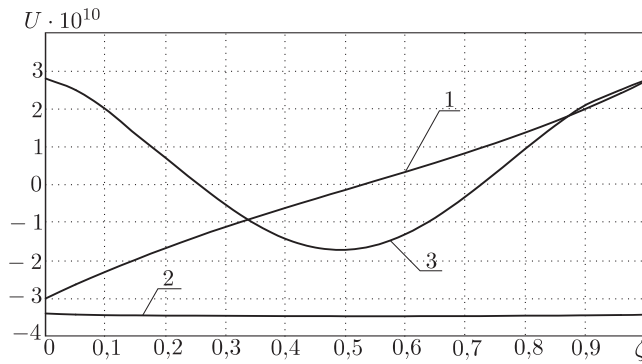


Рис. 3

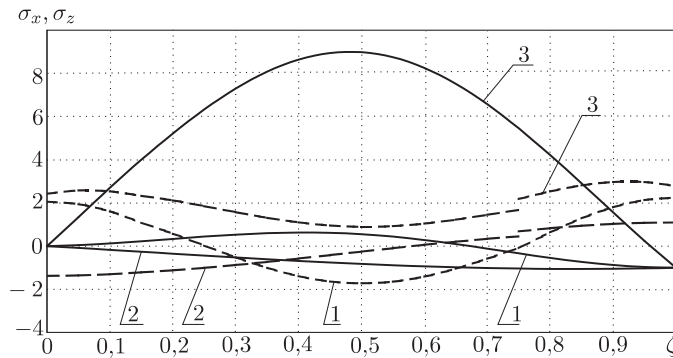


Рис. 4

Сплошные линии на этом рисунке изображают поведение напряжения σ_z , штриховые — σ_x . При $\omega = 59300 \text{ с}^{-1}$ в точках контакта слоёв разрыв кривой σ_x (штриховая линия 1) при выбранном масштабе незначителен и поэтому на графике практически не отображается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.; *Lekhnitskii S. J. Anisotropic Plates. New York: Gordon and Breach, 1968. 534 pp.*
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957. 272 с.; *El'sgol'ts L. E.*

Differential Equations / Russian Monographs and Texts on Advanced Mathematics and Physics. Vol. IV. New York: Gordon and Breach, 1961. 360 pp.

3. Джунисбеков Т. М., Андриющенко О. В., Кейкиманова М. Т. Влияние упругих свойств материала трубы на напряжённо-деформированное состояние подземного нефтепровода // *Вестник ТарГУ*, 2008. С. 155–160. [Dzhunisbekov T. M., Andryushchenko O. V., Keykimanova M. T. Vliyanie uprugih svoystv materiala truby na napryazhyono-deformirovannoe sostoyanie podzemnogo nefteprovoda // *Vestnik TarGU*, 2008. no. 1. Pp. 155–160].

MSC: 74K20

STATIC BENDING AND VIBRATIONS OF MULTILAYER ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE WITH SIMPLY SUPPORTED EDGES

P. Ph. Nedorezov, A. V. Aristambekova

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
Faculty of Mathematics and Mechanics,
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia.

E-mails: p1934n@yandex.ru, aristambekovaav@mail.ru

Bending and vibrations of multilayer rectangular plate are considered. The plate is composed from N orthotropic layers of arbitrary thickness. Edges of the plate are simply supported. Possibility of closed-form solution is discussed. Numerical solution method is developed and implemented. Results are presented in table.

Key words: *orthotropic plate, bending, vibration, numerical solution, discrete orthogonalization.*

Original article submitted 30/XII/2010;
revision submitted 28/II/2011.

Pyotr Ph. Nedorezov (Dr. Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics. *Asel' V. Aristambekova*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics.