

УДК 539.313:517.968.72

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА
С ПАМЯТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДРОБНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ*Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com; radch@samgtu.ru; nik-yashagin@yandex.ru

Рассмотрена одномерная обобщённая модель вязкоупругого тела с дробными производными Римана—Лиувилля. Вместо производных порядка $\alpha > 1$ в определяющем соотношении используются производные порядка $0 < \alpha < 1$ от целочисленных производных. Показано, что дифференциальное уравнение относительно деформации при заданной зависимости напряжения от времени с классическими начальными условиями Коши редуцируется к интегральному уравнению вольтерровского типа. Рассмотрены варианты обобщённой дробной модели Фойхта. Найдены явные решения соответствующих дифференциальных уравнений относительно деформации. Отмечено совпадение этих решений с классическим при нулевом значении параметра дробности.

Ключевые слова: реологические модели вязкоупругого тела, дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля, специальные функции типа Миттаг—Леффлера.

Введение. Стандартная обобщённая вязкоупругая модель имеет вид [1]

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k}{dt^k} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m E_k \frac{d^k}{dt^k} \varepsilon(t),$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — напряжение и деформация тела в момент времени t ; b_k , E_0 , E_k — заданные постоянные величины.

В работе [2] предложена обобщённая одномерная модель вязкоупругого тела с памятью (наследственно-упругого тела), основанная на использовании аппарата дробного дифференцирования:

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n b_k D_{0t}^{\beta_k} \sigma = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m E_k D_{0t}^{\alpha_k} \varepsilon, \quad (1)$$

где $D_{0t}^{\alpha} \varphi = (d/dt)^n I_{0t}^{n-\alpha} \varphi$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ ($n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$) функции $\varphi(t)$, $t > 0$; $D_{0t}^0 \varphi = I \varphi$ — тождественный оператор; $I_{0t}^{\beta} \varphi = (I_{0+}^{\beta} \varphi)(t)$ — левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $\beta > 0$ [3]:

$$I_{0t}^{\beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}, \quad t \in [0, T].$$

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики. Владимир Павлович Радченко (д.ф.-м.н., профессор), зав. кафедрой, каф. прикладной математики и информатики. Николай Сергеевич Яшагин, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Частные случаи реологического соотношения (1):

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D_{0t}^\alpha \varepsilon, \quad (2)$$

$$\sigma(t) + b D_{0t}^\beta \sigma = E_1 D_{0t}^\alpha \varepsilon, \quad (3)$$

$$\sigma(t) + b D_{0t}^\beta \sigma = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D_{0t}^\alpha \varepsilon, \quad (4)$$

ассоциируются при $\alpha, \beta \in (0, 1)$ с дробными аналогами моделей Фойхта, Максвелла и Кельвина соответственно.

Простейшая дробная реологическая модель, устанавливающая пропорциональность напряжения дробной производной Римана—Лиувилля от деформации в виде

$$\sigma(t) = E D_{0t}^\alpha \varepsilon, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5)$$

была предложена Скотт Блэром [4] в 1947 году. А. Н. Герасимов [5] предложил в 1948 году аналогичное (5) соотношение с использованием дробной производной Римана—Лиувилля D_+^α ($t > 0$) на всей числовой оси [3] вместо D_{0t}^α для изучения явлений аномального динамического поведения вязкоупругих материалов. В работе [6] Ю. Н. Работнов изучал модель вязкоупругой среды на основе интегрального оператора абелевского типа (1948 г.). Известно, что определяющее соотношение Ю. Н. Работнова редуцируется к дробному аналогу модели Максвелла (3) при $\alpha = \beta$. Капуто и Майнард [7, 8] в 1971 г. предложили модели, аналогичные моделям (4) и (5), с использованием дробных производных Капуто на всей числовой оси ${}^C D_+$ или полуоси ${}^C D_{0t}^\alpha$. Кроме работы [2] следует упомянуть серию работ Бегли и Торвика (см., например [9]), уделивших особое внимание модели (4) при $\alpha = \beta$. А. М. Нахушев в 2000 г. предложил аналоги моделей (1), (2) и (4) на основе континуальной производной порядка $[0, 1]$:

$$D_{0t}^{[0,1]} \varphi = \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varphi d\alpha.$$

В работе [10] автор отмечает факт уменьшения количества подлежащих идентификации параметров модели вследствие осредняющего действия операции перехода от дробной производной D_{0t}^α ($0 < \alpha < 1$) к континуальной $D_{0t}^{[0,1]}$.

Обширная библиография работ, посвященных обобщённой реологической модели (1), содержится в монографии [11]. Там же отмечается, что многие авторы используют в равенстве (1) некоторый оператор дифференцирования D^α , представляющий собой «подходящую дробную производную», лишь бы её преобразование Фурье удовлетворяло условию

$$\mathcal{F}(D^\alpha f(t))(s) = (is)^\alpha \hat{f}(is),$$

где $\hat{f}(is) = \mathcal{F}(f(t))(s)$, а этому условию, вообще говоря, могут удовлетворять дробные производные и Грюнвальда—Летникова, и Лиувилля, и Капуто—Лиувилля, и Римана—Лиувилля на оси или полуоси, если $f(t) = 0$ при $t < 0$. Далее в [11] указано, что явные решения дифференциальных уравнений вида (1) могут быть найдены методами дробного исчисления (дробных дифференциальных уравнений) и не требуют обязательного использования интегральных преобразований.

1. В общем случае реологическая модель (1) может содержать различные наборы междупредельных производных порядков $\alpha_k, \beta_k \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Подчеркивая это обстоятельство, вместо (1) можно записать

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^s b_{ki} D_{0t}^{k+\beta_{ki}} \sigma = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^r a_{kj} D_{0t}^{k+\alpha_{kj}} \varepsilon, \quad (6)$$

где $b_{00} = 1$, $a_{00} = E_0$; $\alpha_{kj} = \{\alpha_k\}$, $\beta_{ki} = \{\beta_k\}$ — дробные части чисел α_k, β_k ; $j = 1, 2, \dots, r$; $i = 1, 2, \dots, s$; $\alpha_{k0} = \beta_{k0} = 0$ при любых k .

Изучение и применение реологических моделей вида (6) наталкивается на определённые трудности, связанные с фактом несуммируемости в общем случае дробных производных D_{0t}^α порядка $\alpha > 1$ даже для «достаточно хороших» функций. Указанное обстоятельство является, по-видимому, одной из причин замены дробных производных Римана—Лиувилля на нормализованные (по Капуто) производные.

Вместо основного соотношения между напряжением, деформацией и их производными в виде (6) в работе [12] авторами настоящей работы предложено следующее равенство:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^s b_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} \sigma^{(k)} = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^r a_{kj} D_{0t}^{\alpha_{kj}} \varepsilon^{(k)}, \quad (7)$$

где для функции $u(t)$: $u^{(k)} = (d/dt)^k u$. В частности, ограничиваясь в (7) одной целой и одной междупредельной производными в каждом интервале $[k, k+1)$, можно записать

$$\sum_{k=0}^n (b_{k0} + b_{k1} D_{0t}^{\beta_k}) \sigma^{(k)} = \sum_{k=0}^m (a_{k0} + a_{k1} D_{0t}^{\alpha_k}) \varepsilon^{(k)}. \quad (8)$$

Считая в (8) $\sigma = \sigma(t)$ заданной функцией времени, для определения $\varepsilon = \varepsilon(t)$, в частности, при $n = m = 1$, получим дифференциальное уравнение с дробными производными

$$E_0 \varepsilon(t) + a_{01} D_{0t}^{\alpha_0} \varepsilon + a_{10} \dot{\varepsilon}(t) + a_{11} D_{0t}^{\alpha_1} \dot{\varepsilon} = f(t), \quad (9)$$

где $f(t)$ — левая часть соотношения (8).

В классе функций $\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$ и $f(t) \in L(0, T)$ уравнение (9) редуцируется к интегральному уравнению типа Вольтерры второго рода

$$a_{11} \varepsilon(t) + a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} \varepsilon + a_{01} I_{0t}^{1+\alpha_1-\alpha_0} \varepsilon + E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1} \varepsilon = f_1(t), \quad (10)$$

где $f_1(t) = I_{0t}^{1+\alpha_1} f + (a_{10} \varepsilon(t))/(\Gamma(1+\alpha_1)) t^{\alpha_1} + a_{11} \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, решение которого заведомо существует и единственно.

Действительно, применим к левой и правой частям дифференциального уравнения (9) оператор $I_{0t}^{1+\alpha_1}$, воспользуемся полугрупповым свойством дробных интегралов [3] и тем, что для функций $\varphi(t) \in AC[0, T]$ справедливы соотношения $D_{0t}^\alpha I_{0t}^\alpha \varphi = I_{0t}^\alpha D_{0t}^\alpha \varphi = \varphi(t)$, если $\alpha \in (0, 1)$. Так как по условию

$\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$, и, следовательно, $\dot{\varepsilon}(t) \in AC[0, T]$, левая часть уравнения (9) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1} \varepsilon + a_{01} I_{0t}^{1+\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_0} \varepsilon + a_{10} I_{0t}^{1+\alpha_1} \dot{\varepsilon} + a_{11} I_{0t}^{1+\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_1} \dot{\varepsilon} = \\ = E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1} \varepsilon + a_{01} I_{0t}^{1+\alpha_1-\alpha_0} I_{0t}^{\alpha_0} D_{0t}^{\alpha_0} \varepsilon + a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} I_{0t}^1 \dot{\varepsilon} + a_{11} I_{0t}^{\alpha_1} I_{0t}^1 D_{0t}^{\alpha_1} \dot{\varepsilon} = \\ = E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1} \varepsilon + a_{01} I_{0t}^{1+\alpha_1-\alpha_0} \varepsilon + a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} (\varepsilon - \varepsilon_0) + a_{11} I_{0t}^1 \dot{\varepsilon} = \\ = E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1} \varepsilon + a_{01} I_{0t}^{1+\alpha_1-\alpha_0} \varepsilon + a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} \varepsilon - a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} \varepsilon_0 + a_{11} (\varepsilon(t) - \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Вычислив значение интеграла $a_{10} I_{0t}^{\alpha_1} \varepsilon_0 = a_{10} \varepsilon_0 I_{0t}^{\alpha_1} 1 = (a_{10} \varepsilon_0) / (\Gamma(1 + \alpha_1)) t^{\alpha_1}$, приходим к интегральному уравнению (10).

Если в соотношении (8) при $m = 1$ принять $n = 0$, $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha$, $a_{01} = E_0 h$, $a_{10} = \eta$ — коэффициент вязкости и $a_{11} = \eta h$, то равенство (9), записанное в виде

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_0 h D_{0t}^{\alpha} \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}(t) + \eta h D_{0t}^{\alpha} \dot{\varepsilon}, \quad (11)$$

будет представлять собой некоторый дробный аналог модели Фойхта, совпадающий с классическими реологическими уравнениями при $h = 0$, а при $\alpha = 0$ — с композицией двух параллельно соединённых элементов Фойхта.

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка (11) с начальными условиями $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = 0$, считая $\sigma = \sigma(t)$ — заданной функцией времени. Как показано выше, оно редуцируется к интегральному уравнению

$$\eta h \varepsilon(t) + \eta I_{0t}^{\alpha} \varepsilon + E_0 h I_{0t}^1 \varepsilon + E_0 I_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = I_{0t}^{1+\alpha} \sigma, \quad (12)$$

допускающему факторизацию вида [13]

$$(I - \lambda_1 I_{0t}^{\alpha})(I - \lambda_2 I_{0t}^1) \varepsilon = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} I_{0t}^{1+\alpha} \sigma,$$

где $\lambda_1 = -1/h$, $\lambda_2 = -E_0/\eta$.

Путём введения вспомогательной функции $u(t) = (I - \lambda_2 I_{0t}^1) \varepsilon$ интегральное уравнение (12) сводится к системе интегральных уравнений

$$(I - \lambda_1 I_{0t}^{\alpha}) u = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} I_{0t}^{1+\alpha} \sigma, \quad (I - \lambda_2 I_{0t}^1) \varepsilon = u(t), \quad (13)$$

решая которую последовательно, нетрудно найти зависимость деформации $\varepsilon(t)$ от напряжения $\sigma(t)$ в интегральной форме в терминах интегральных операторов с функциями типа Миттаг—Леффлера в ядрах:

$$E_{0t;\lambda}^{\mu,\sigma} f = \int_0^t (t - \tau)^{\mu-1} E_{\sigma}[\lambda(t - \tau)^{\sigma} \mu] f(\tau) d\tau, \quad (14)$$

$$E_{0t;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu,\alpha,\beta} f = \int_0^t (t - \tau)^{\mu-1} E_{\alpha,\beta}[\lambda_1(t - \tau)^{\alpha}, \lambda_2(t - \tau)^{\beta}; \mu] f(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где $E_{\sigma}(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера [14], $E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера двух аргументов [15] ($\alpha, \beta, \sigma, \mu > 0$; $z, x, y \in \mathbb{C}$).

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $E_0 > 0$, $\eta > 0$, $h > 0$ — заданные постоянные величины; $\sigma(t) \in L(0, T)$. Существует единственное решение дифференциального уравнения (11) $\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$ и $\varepsilon(t) = (h\eta)^{-1} E_{0t;\lambda_1,\lambda_2}^{1+\alpha,\alpha,1} \sigma$.

Доказательство. Решение первого уравнения в системе (13), записанное с помощью оператора (14), имеет вид

$$u(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} I_{0t}^{1+\alpha} (\sigma + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \sigma),$$

где использована коммутативность оператора (14) с дробным оператором $I_{0t}^{1+\alpha}$.

Записывая для единообразия решение второго интегрального уравнения системы (13) в терминах оператора (14), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= u(t) + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1} u = (I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) u = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} (I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) I_{0t}^{1+\alpha} (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) \sigma = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} I_{0t}^{1+\alpha} (I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) \sigma. \end{aligned}$$

Воспользуемся аналогом полугруппового свойства оператора (14) с дробным интегралом Римана—Лиувилля [16, 17] и вычислим композицию

$$\begin{aligned} I_{0t}^{1+\alpha} (I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) &= \\ &= I_{0t}^{1+\alpha} (I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1} + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} + \lambda_1 \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1,1} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) = \\ &= I_{0t}^{1+\alpha} + \lambda_2 I_{0t}^{\alpha} (I_{0t}^{1,1} E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) + \lambda_1 I_{0t}^1 (I_{0t}^{\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) + \lambda_1 \lambda_2 (I_{0t}^{1,1} E_{0t;\lambda_2}^{1,1}) (I_{0t}^{\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) = \\ &= I_{0t}^{1+\alpha} + \lambda_2 I_{0t}^{\alpha} E_{0t;\lambda_2}^{2,1} + \lambda_1 I_{0t}^1 E_{0t;\lambda_1}^{2\alpha,\alpha} + \lambda_1 \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{2,1} E_{0t;\lambda_1}^{2\alpha,\alpha}. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее легко проверяемым тождеством [18]

$$\lambda E_{0t;\lambda}^{2\alpha,\alpha} \varphi = E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \varphi - I_{0t}^{\alpha} \varphi, \quad (16)$$

справедливым для функций $\varphi(t) \in L(0, T)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, и свойством операторов (14) и (15) [16]

$$E_{0t;\lambda_1}^{\mu,\alpha} E_{0t;\lambda_2}^{\nu,\beta} f = E_{0t;\lambda_2}^{\nu,\beta} E_{0t;\lambda_1}^{\mu,\alpha} f = E_{0t;\lambda_1, \lambda_2}^{\mu+\nu, \alpha, \beta} f,$$

справедливым при $\alpha, \beta, \mu, \nu > 0; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ для $f(t) \in L(0, T)$. Получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{E_0} E_{0t;\lambda_2}^{1,1} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \sigma = \frac{1}{h\eta} E_{0t;\lambda_1, \lambda_2}^{1+\alpha, \alpha, 1} \sigma, \quad (17)$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Этот результат можно получить иначе: полагая, как обычно поступают в моделях Фойхта, начальную деформацию равной нулю, получим $D_{0t}^{\alpha} \dot{\varepsilon} = D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = (d/dt) D_{0t}^{\alpha} \varepsilon$, $0 < \alpha < 1$. Действительно, по определению дробной производной Римана—Лиувилля при $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = \frac{d^2}{dt^2} I_{0t}^{1-\alpha} \varepsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} I_{0t}^{1-\alpha} \varepsilon \right),$$

а в силу достаточного признака существования дробной производной [3]

$$D_{0t}^\alpha \varepsilon = \frac{\varepsilon(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} + I_{0t}^{1-\alpha} \dot{\varepsilon} = I_{0t}^{1-\alpha} \dot{\varepsilon}$$

при $\varepsilon(0) = 0$ и $\varepsilon(t) \in AC[0, T]$. Тогда

$$D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = \frac{d}{dt} D_{0t}^\alpha \varepsilon = \frac{d}{dt} I_{0t}^{1-\alpha} \dot{\varepsilon} = D_{0t}^\alpha \dot{\varepsilon}.$$

Таким образом, вместо (11) в качестве определяющего соотношения можно рассматривать дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида:

$$E_0 \varepsilon(t) + E_0 h D_{0t}^\alpha \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}(t) + \eta h D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = \sigma(t),$$

или

$$E_0 (\varepsilon(t) + h D_{0t}^\alpha \varepsilon) + \eta \frac{d}{dt} (\varepsilon(t) + h D_{0t}^\alpha \varepsilon) = \sigma(t). \quad (18)$$

Обозначая $u(t) = \varepsilon + h D_{0t}^\alpha \varepsilon$, приходим к простейшему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции $u(t)$:

$$\eta \dot{u}(t) + E_0 u(t) = \sigma(t). \quad (19)$$

Его решение следует искать с начальным условием $u(0) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} u(0) &= \lim_{t \rightarrow 0+} (\varepsilon(t) + h D_{0t}^\alpha \varepsilon) = \varepsilon(0) + h \lim_{t \rightarrow 0+} D_{0t}^\alpha \varepsilon = \\ &= h \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\varepsilon(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} + I_{0t}^{1-\alpha} \dot{\varepsilon} \right) = h \lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-\alpha} \dot{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

при условии, что $\varepsilon(0) = 0$ и $\dot{\varepsilon}(t) \in AC[0, T]$

Решение дифференциального уравнения (19) элементарно и имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_0}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau = \frac{1}{\eta} E_{0t; \lambda_2}^{1,1} \sigma,$$

где $\lambda_2 = -E_0/\eta$.

Заметим здесь, что $\varepsilon(t) = u(t)$ при $h = 0$ и, в частности, при $\sigma(t) = kt$ ($k > 0$) решение

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{E_0} \left(t - \frac{\eta}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\eta} t} \right) \right) \quad (20)$$

совпадает с хорошо известным классическим законом изменения деформации при равномерном нагружении. При $\alpha = 0$ и $h \neq 0$ получим решение

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{h+1} u(t) = \frac{k}{(h+1)E_0} \left(t - \frac{\eta}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\eta} t} \right) \right),$$

соответствующее параллельной композиции двух фойхтовских элементов.

Пусть $h \neq 0$ в (18). Для $\varepsilon(t)$ получим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$D_{0t}^\alpha \varepsilon + \frac{1}{h} \varepsilon(t) = \frac{1}{h} u(t). \quad (21)$$

Так как $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$, применяя оператор I_{0t}^α к левой и правой частям уравнения (21), приходим к интегральному уравнению

$$\varepsilon(t) + \frac{1}{h} I_{0t}^\alpha \varepsilon = \frac{1}{h} I_{0t}^\alpha u,$$

решение которого совпадает с ранее найденным в формуле (17) в силу

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{h} \left(I + \frac{1}{h} I_{0t}^\alpha \right)^{-1} I_{0t}^\alpha u = \frac{1}{h\eta} (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) I_{0t}^\alpha E_{0t;\lambda_2}^{1,1} \sigma = \\ &= \frac{1}{h\eta} (I_{0t}^\alpha + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{2\alpha,\alpha}) E_{0t;\lambda_2}^{1,1} \sigma = \frac{1}{h\eta} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} E_{0t;\lambda_2}^{1,1} \sigma. \end{aligned}$$

Формула (17) может быть непосредственно использована для вычисления зависимости деформации $\varepsilon(t)$ от закона нагружения $\sigma(t)$. Однако для определённого, например, степенного или экспоненциального вида функции $\sigma = \sigma(t)$ удобно воспользоваться следующей формулой:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{h\eta} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} E_{0t;\lambda_2}^{1,1} \sigma = u(t) - (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) u, \quad (22)$$

где $u(t) = \eta^{-1} E_{0t;\lambda_2}^{1,1} \sigma$, и по-прежнему $\lambda_1 = -1/h$, $\lambda_2 = -E_0/\eta$.

Пусть, например, $\sigma = kt$ ($k > 0$ — произвольная константа). Выражение для $u(t)$ определено формулой (20).

2. Рассмотрим некоторые формулы, отражающие действие оператора $I + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}$ на степенные и экспоненциальные функции.

2.1. Пусть $\alpha, \mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $t > 0$ имеем

$$(I + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}) t^{\mu-1} = \Gamma(\mu) \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t), \quad (23)$$

где

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) \quad (24)$$

— обобщённая дробная экспоненциальная функция [19].

Для доказательства (23) воспользуемся формулой [16]

$$E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} t^{\mu-1} = \Gamma(\mu) t^{\alpha+\mu+1} E_\sigma(\lambda t^\sigma; \alpha + \mu) = \Gamma(\mu) \text{Exp}(\sigma, \alpha + \mu; \lambda; t)$$

при $\sigma = \alpha$ и хорошо известным свойством функции типа Миттаг—Леффлера

$$z E_\alpha(z; \alpha + \mu) = E_\alpha(z; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}. \quad (25)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 (I + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}) t^{\mu-1} &= t^{\mu-1} + \Gamma(\mu) t^{\mu-1} (\lambda t^\alpha) E_\alpha(\lambda t^\alpha; \alpha + \mu) = \\
 &= t^{\mu-1} + \Gamma(\mu) t^{\mu-1} \left(E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \right) = \\
 &= \Gamma(\mu) t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) = \Gamma(\mu) \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t).
 \end{aligned}$$

2.2. В работе [16] была доказана формула

$$E_{0t;\lambda_1}^{\mu,\alpha} t^{\nu-1} E_\beta(\lambda_2 t^\beta; \nu) = t^{\mu+\nu-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\beta; \mu + \nu). \quad (26)$$

По аналогии с (24) введём следующее обобщение дробной экспоненциальной функции:

$$\text{Exp}(\alpha, \beta, \mu; \lambda_1, \lambda_2; t) = t^{\mu-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\beta; \mu), \quad (27)$$

где $\alpha, \beta, \mu > 0$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $t > 0$, а $E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu)$ — трёхпараметрическая функция типа Миттаг—Леффлера двух аргументов $x, y \in \mathbb{C}$, определённая при $\alpha, \beta > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ двойным рядом [15, 16]

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{x^k y^n}{\Gamma(\alpha k + \beta n + \mu)}. \quad (28)$$

В терминах дробных экспоненциальных функций (24) и (27) равенство (26) записывается в виде

$$E_{0t;\lambda_1}^{\mu,\alpha} \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) = \text{Exp}(\alpha, \beta, \mu + \nu; \lambda_1, \lambda_2; t). \quad (29)$$

Тогда имеет место формула

$$(I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) = \text{Exp}(\alpha, \beta, \nu; \lambda_1, \lambda_2; t), \quad (30)$$

где $\alpha, \beta, \nu > 0$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $t > 0$.

Для доказательства (30) воспользуемся аналогом формулы (25) для функции типа Миттаг—Леффлера двух аргументов [20]:

$$x E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu + \alpha) = E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) - E_\beta(y; \mu)$$

и формулой (29). Тогда

$$\begin{aligned}
 (I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) &= \\
 &= \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) + \lambda_1 \text{Exp}(\alpha, \beta, \alpha + \nu; \lambda_1, \lambda_2; t) = \\
 &= \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) + t^{\nu-1} (\lambda_1 t^\alpha) E_{\alpha,\beta}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\beta, \alpha + \nu) = \\
 &= \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) + t^{\nu-1} (E_{\alpha,\beta}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\beta, \nu) - E_\beta(\lambda_2 t^\beta, \nu)) = \\
 &= \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) + \text{Exp}(\alpha, \beta, \nu; \lambda_1, \lambda_2; t) - \text{Exp}(\beta, \nu; \lambda_2; t) = \\
 &= \text{Exp}(\alpha, \beta, \nu; \lambda_1, \lambda_2; t).
 \end{aligned}$$

В частности,

$$(I + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha}) e^{\lambda_2 t} = \text{Exp}(\alpha, 1, 1; \lambda_1, \lambda_2; t). \quad (31)$$

Возвращаясь к формуле (22), подставим в неё выражение для функции $u(t)$ из (20). Используя формулу (23) при $\mu = 2$ и $\mu = 1$ и формулу (31), находим решение дифференциального уравнения (18) в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{E_0} \left\{ t - \frac{\eta}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0}{\eta} t} \right) - \left(\text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1; t) - \frac{\eta}{E_0} (\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_1; t) - \text{Exp}(\alpha, 1, 1; \lambda_1, \lambda_2; t)) \right) \right\}, \quad (32)$$

где $\lambda_1 = -1/h$, $\lambda_2 = -E_0/\eta$.

3. Приведём в качестве примеров две простейшие дробные реологические модели, отличные от соотношения (2), и укажем явные решения соответствующих дифференциальных уравнений.

3.1. Пусть $\alpha \in (0, 1/2)$, $\sigma = \sigma(t)$ — заданная суммируемая функция, E_0 и η — известные постоянные величины. Рассмотрим определяющее соотношение следующего вида:

$$E_0 D_{0t}^\alpha \varepsilon + \eta D_{0t}^{1-\alpha} \varepsilon = \sigma(t). \quad (33)$$

По отношению к искомой функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$ уравнение (33) является обыкновенным дифференциальным уравнением дробного порядка, причём при $\alpha \rightarrow 0$ уравнение (33) принимает вид классического реологического соотношения в модели Фойхта

$$E_0 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t). \quad (34)$$

Найдём решение дифференциального уравнения (33) с начальным условием $\varepsilon(0) = 0$ в классе функций $\varepsilon(t) \in AC[0, T]$.

Так как $0 < \alpha < 1 - \alpha < 1$ (в силу $\alpha \in (0, 1/2)$), то к левой и правой частям уравнения (33) можно применить интегральный оператор $I_{0t}^{1-\alpha}$. Учитывая полугрупповое свойство дробных интегралов и тождество $I_{0t}^\beta D_{0t}^\beta \varphi = \varphi(t)$, справедливое для функций $\varphi(t) \in AC[0, T]$ при $\beta \in (0, 1)$, а при $\beta = 1$ с условием $\varphi(0) = 0$, получим интегральное уравнение

$$\varepsilon(t) - \lambda_2 I_{0t}^{1-2\alpha} \varepsilon = \frac{1}{\eta} I_{0t}^{1-\alpha} \sigma,$$

где $\lambda_2 = -E_0/\eta$. Его решение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} (I - \lambda_2 I_{0t}^{1-2\alpha})^{-1} I_{0t}^{1-\alpha} \sigma = \frac{1}{\eta} (I + \lambda_2 E_{0t; \lambda_2}^{1-2\alpha, 1-2\alpha}) I_{0t}^{1-\alpha} \sigma. \quad (35)$$

Нетрудно показать, что решение (35) в терминах оператора (14) может быть записано в следующей форме:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} E_{0t; \lambda_2}^{1-\alpha, 1-2\alpha} \sigma. \quad (36)$$

Действительно, в силу полугруппового свойства дробных интегралов и его аналога для оператора (14) можно записать

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{1}{\eta} \left(I + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{1-2\alpha, 1-2\alpha} \right) I_{0t}^{1-2\alpha} I_{0t}^\alpha \sigma = \\ &= \frac{1}{\eta} \left(I_{0t}^{1-2\alpha} + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{2(1-2\alpha), 1-2\alpha} \right) I_{0t}^\alpha \sigma = \frac{1}{\eta} E_{0t;\lambda_2}^{1-2\alpha, 1-2\alpha} I_{0t}^\alpha \sigma = \frac{1}{\eta} E_{0t;\lambda_2}^{1-\alpha, 1-2\alpha} \sigma,\end{aligned}$$

где использовано тождество (16).

Из формулы (36) сразу следует, что при $\alpha \rightarrow 0$ решение дифференциального уравнения (33) переходит в классическое решение для модели Фойхта (34):

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_0}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau$$

и при $\sigma = kt$ совпадает с (20). Непосредственное использование формулы (36) в случае равномерного нагружения приводит к следующему результату:

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{\eta} E_{0t;\lambda_2}^{1-\alpha, 1-2\alpha} t = \frac{k}{\eta} \text{Exp}(1-2\alpha, 3-\alpha; \lambda_2; t).$$

Ему можно придать более наглядный вид, если дважды воспользоваться тождеством (25):

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{E_0} \left\{ \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{\eta}{E_0} \left[\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} - \text{Exp}\left(1-2\alpha, 3\alpha+1; -\frac{E_0}{\eta}; t\right) \right] \right\}. \quad (37)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ выражение для $\varepsilon = \varepsilon(t)$ совпадает с (20), так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Exp}(1-2\alpha, 3\alpha+1; -E_0/\eta; t) = \text{Exp}(1, 1; -E_0/\eta; t) = \exp(-E_0/\eta t).$$

3.2. Заслуживает внимания следующий аналог дробной реологической модели Фойхта:

$$E_0 D_{0t}^\alpha \varepsilon + \eta D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = \sigma(t), \quad (38)$$

который обладает тем же свойством, что и определяющее соотношение (33), а именно при $\alpha \rightarrow 0$ уравнение (38) принимает вид классического соотношения (34).

Решение дифференциального уравнения (38) будем искать с условием $\varepsilon(0) = 0$ в классе функций $\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$. В этом случае справедливо равенство $D_{0t}^{1+\alpha} \varepsilon = D_{0t}^\alpha \dot{\varepsilon}$ и вместо (38) можно записать уравнение дробного порядка:

$$D_{0t}^\alpha (E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}) = \sigma(t). \quad (39)$$

Решение уравнения (39) следует искать с начальными условиями типа Коши:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-\alpha} (E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}) = b,$$

где b — заданная постоянная величина [11]. Функция $E_0 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \in AC[0, T]$, так как $\varepsilon(t) \in AC^2[0, T]$, $\dot{\varepsilon}(t) \in AC[0, T]$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-\alpha} (E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}) = 0,$$

если $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \neq 0$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon(0) = 0$ при $\alpha = 1$.

Применим оператор I_{0t}^α к левой и правой частям равенства (39). В классе функций $AC[0, T]$ оно редуцируется к интегральному уравнению

$$E_0 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = I_{0t}^\alpha \sigma, \quad (40)$$

которое можно взять за основу реологической модели вместо соотношения (38) в заданном классе функций.

Решая простейшее дифференциальное уравнение (40), найдём

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_0}{\eta}(t-\tau)} I_{0t}^\alpha \sigma d\tau = \frac{1}{\eta} E_{0t; \lambda_2}^{1,1} I_{0t}^\alpha \sigma = \frac{1}{\eta} E_{0t; \lambda_2}^{1+\alpha,1} \sigma. \quad (41)$$

Для непосредственных вычислений при заданном законе изменения $\sigma = \sigma(t)$ выражению (41) удобно придать вид $\varepsilon(t) = \eta^{-1} I_{0t}^\alpha E_{0t; \lambda_2}^{1,1} \sigma$. Если $\sigma = kt$, то после несложных вычислений найдём зависимость

$$\varepsilon(t) = \frac{k}{E_0} \left\{ \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{\eta}{E_0} \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \text{Exp}\left(1, 1+\alpha; -\frac{\eta}{E_0}; t\right) \right] \right\},$$

из которой видно, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \varepsilon(t)$ совпадает с найденным в (20) выражением для деформации в классической реологической модели Фойхта.

Заключение. Рассмотрена обобщённая одномерная модель вязкоупругого тела, основанная на использовании аппарата дробного дифференцирования Римана—Лиувилля на отрезке, в которой вместо дробных производных $D_{0t}^{\alpha+k} \varphi$ порядка $\alpha + k > 1$ ($k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$) используются производные $D_{0t}^\alpha \varphi^{(k)}$. На примере обобщённой дробной модели Фойхта показано, что соответствующее дифференциальное уравнение относительно деформации $\varepsilon(t)$ при заданной функции напряжения $\sigma(t)$ с произвольными неоднородными классическими условиями Коши редуцируется к интегральному уравнению вольтерровского типа, в то время как постановка начальной задачи для дифференциального уравнения с дробными производными порядка больше единицы имеет определённую специфику, связанную с их несуммируемостью в общем случае. Отмечено, что при нулевых начальных условиях различие между производными $D_{0t}^{\alpha+k} \varphi$ и $D_{0t}^\alpha \varphi^{(k)}$ исчезает, однако в обобщённых реологических моделях вида (6) и при моделировании динамических процессов в системах с дробными вязкоупругими связями начальные условия не обязательно являются однородными, и это различие становится существенным из-за несуммируемости производных $D_{0t}^{\alpha+k} \varphi$. Всё это отражается на постановке начальных задач (задача типа Коши, видоизменённая задача типа Коши) для дифференциальных уравнений динамики, что показано на примере двух простейших уравнений дробных осцилляторов в работе [21].

Приведены также два частных случая обобщённой модели Фойхта с двумя дробными производными. Во всех рассмотренных случаях получены явные решения дифференциальных уравнений. Соответствующие формулы могут быть полезны в задачах параметрической идентификации моделей вязкоупругих сред (тел, связей и т.д.), а сами определяющие соотношения — при

моделировании вязкоупругих связей в динамических системах, в частности, в моделях дробных осцилляторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с. [Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable rigid body. Moskva: Nauka, 1988. 712 pp.]
2. Bagley R. L., Torvik P. J. Fractional calculus — A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // *AIAA J.* Vol. 21, no. 5. Pp. 741–748; русск. пер.: Бегли Р. Л., Торвик П. Дж. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка — новый подход к расчету конструкции с вязкоупругим демпфированием // *Аэрокосмическая техника*, 1984. Т. 2, № 2. С. 84–93.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
4. Scott Blair G. W. A survey of general and applied rheology. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1949. 314 pp.
5. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260. [Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to the problems of internal friction // *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948. Vol. 12, no. 3. Pp. 251–260].
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62. [Rabotnov Yu. N. The equilibrium of an elastic medium with after-effect // *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948. Vol. 12, no. 1. Pp. 53–62].
7. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // *La Rivista del Nuovo Cimento*, 1971. Vol. 1, no. 2. Pp. 161–198.
8. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism // *Pure Appl. Geophys.*, 1971. Vol. 91, no. 1. Pp. 134–147.
9. Bagley R. L., Torvik P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity // *J. Rheol.*, 1983. Vol. 27, no. 3. Pp. 201–210.
10. Нахушев А. М. Математические модели вязкоупругого тела // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки*, 2000. № 3. С. 107–109. [Nakhushhev A. M. Mathematical models of viscoelastic body // *Izv. Vuzov. Sev.-Kavk. Reg. Estestv. Nauki*, 2000. no. 3. Pp. 107–109].
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204 / ed. J. van Mill. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
12. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Математические модели вязкоупругого тела и вынужденные колебания дробных осцилляторов / В сб.: *Материали конф.*, Тринадцата Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (13–15 травня, 2010), Т. 1. Київ: НТУУ, 2010. С. 344–345. [Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Yashagin N. S. Mathematical models of viscoelastic body and forced oscillations of the fractional oscillator / In: *Conference Materials*, International conference named after Academician M. Kravchuk (May 13–15, 2010), 1. Kyiv: NTU, 2010. Pp. 344–345].
13. Огородников Е. Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши / В сб.: *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием* (1–4 июня 2009 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 177–181. [Ogorodnikov E. N. Mathematical models of the fractional oscillator, setting and structure of the Cauchy problem / In: *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 1 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009. Pp. 177–181].

14. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [Dzhrbashyan M. M. Integral transforms and representation of functions in the complex domain. Moscow: Nauka, 1966. 672 pp.]
15. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / В сб.: *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2008 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 215–221. [Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Forced oscillations of the fractional oscillator / In: *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 1 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2008. Pp. 215–221].
16. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О некоторых свойствах операторов с функциями типа Миттаг—Леффлера в ядрах / В сб.: *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием* (1–4 июня 2009 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 181–188. [Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. On some properties of operators with Mittag–Leffler type functions in kernels / In: *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009. Pp. 181–188].
17. Огородников Е. Н. Корректность задачи Коши—Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и её равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. № 26. С. 26–38. [Ogorodnikov E. N. The correctness of the Cauchy–Goursat problem for loaded degenerate hyperbolic equations in some special cases, and its equivalent to the problem with nonlocal boundary conditions // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2004. no. 26. Pp. 26–38].
18. Огородников Е. Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей / В сб.: *Тр. десятой межвуз. науч. конф.* Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Мат. моделирование и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2000. С. 119–126. [Ogorodnikov E. N. Some boundary value problems for Bitsadze–Lykov equations system with involutory matrix / In: *Proceedings of the Tenth Inter-University Scientific Conference*. Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2000. Pp. 119–126].
19. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 276–279. [Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Some special functions in the solution to Cauchy problem for a fractional oscillating equation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 276–279].
20. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Об одном обобщении функции типа Миттаг—Леффлера, интегральном операторе с указанной функцией в ядре, их свойствах и приложениях / В сб.: *Актуальные проблемы современной науки: Труды 5-го Международного форума. Естественные науки.* Ч. 1–3: Математика. Математическое моделирование. Механика. Самара: СамГТУ, 2010. С. 261–267. [Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. On a generalization of Mittag–Leffler type functions, integral operator with the specified function in kernel, their properties and applications / In: *Actual Problems of Modern Science*. Part. 1–3. Mathematics. Mathematical Modeling. Mechanics. Samara: SamGTU, 2010. Pp. 261–267].
21. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 24–36. [Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Setting and solving of the Cauchy type problems for the second order differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 24–36].

Поступила в редакцию 12/XII/2010;
в окончательном варианте — 17/II/2011.

MSC: 74D10; 26A33

RHEOLOGICAL MODEL OF VISCOELASTIC BODY WITH MEMORY AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL OSCILLATOR

E. N. Ogorodnikov, V. P. Radchenko, N. S. Yashagin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com; radch@samgtu.ru; nik-yashagin@yandex.ru

One-dimensional generalized rheologic model of viscoelastic body with Riemann-Liouville derivatives is considered. Instead of derivatives of order $\alpha > 1$ there are employed in defining relations derivatives of order $0 < \alpha < 1$ from integer derivatives. It's shown, that the differential equation for the deformation with given dependence of the tension from the time with classical initial conditions of Cauchy are reduced to the Volterra integral equations. Some variants of the generalized fractional Voigt's model are considered. Explicit solutions for corresponding differential equation for the deformation are found out. It's indicated, that these solutions coincide with the classical ones when the fractional parameter vanishes.

Key words: rheological model of viscoelastic body, differential equations with fractional Riemann-Liouville derivatives Mittag-Leffler type special functions.

Original article submitted 12/XII/2010;
revision submitted 17/II/2011.

Eugeni N. Ogorodnikov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Vladimir P. Radchenko* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Nikolay S. Yashagin*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.