

УДК 539.421.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ РАСКЛИНИВАЮЩЕЙ ТРЕЩИНЫ В НАРУШЕННОМ МАТЕРИАЛЕ

Е. В. Спиридонова, С. В. Белобородова

Оренбургский государственный университет,
460018, Оренбург, пр. Победы 13.

E-mails: skatyusha@rambler.ru, svetabelkhor@yandex.ru

Представлено численное решение задачи развития расклинивающей трещины в нарушенном материале. Решение задачи осуществлялось методом разрывных смещений. Установлены аналитические зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от нормальных смещений берегов трещины.

Ключевые слова: *зияющая трещина, метод разрывных смещений, коэффициент интенсивности напряжений первого рода.*

Введение. Проектирование и строительство крупных инженерных сооружений, особенно в горных районах, требуют надежного обоснования проектных решений. Для проведения расчётов или физического моделирования этих систем необходима инженерно-геологическая схема основания, содержащая информацию о структуре массива и физико-механических свойствах среды.

Под скальным массивом понимают приповерхностную часть земной коры, сложенную прочными изверженными, метаморфическими и осадочными породами. Он обладает определенной внутренней структурой, составом, состоянием пород и конкретными характеристиками свойств. Поведение скального массива часто определяется наличием в нем нарушений сплошности. К таким нарушениям относятся разломы, плоскости напластования, пустые или заполненные грунтом трещины. Эти ослабления определяют направление возможного разрыва или взаимного скольжения частей массива.

В настоящее время общепризнано, что любой скальный массив, будучи разделенным нарушениями сплошности разного генезиса, в том числе экзогенными трещинами выветривания и разгрузки, является дискретной, неоднородной и анизотропной средой зонально-блочного строения. Неоднородность массива в той или иной степени связана с факторами различного генезиса: возрастом, условиями залегания, структурой, текстурой, слоистостью, блочностью, трещиноватостью, естественным напряженным состоянием, заполнителем трещин и пор, выветриванием и другими. Вопросы, связанные с развитием трещины направленного разрыва в трещиноватых массивах горных пород, вызывают огромный интерес и находят большое практическое приложение при выполнении следующих работ:

- цементация породного массива, что приводит к устойчивости подземных выработок;
- добыча полезных ископаемых, т. е. выемка ценного минерального сырья при открытой и подземной разработке;
- разработка новых способов управления горным давлением и состоянием

Спиридонова Екатерина Владимировна, старш. преподаватель, каф. математического анализа. Белобородова Светлана Валентиновна, аспирант, каф. математического анализа.

- массава, включая охрану выработок, борьбу с горными ударами, внезапными выбросами угля, породы, соли и газа;
- разупрочнение массива горных пород, добыча блочного камня;
- повышение эффективности таких процессов, как дренирование воды и газа, тампонаж пород и др.

Одно из первых решений по формированию разрыва пласта в результате расклинивания материала без учета сдвига опубликовано в работе Г. П. Черепанова [1]. Все остальные исследования проводились путём физического моделирования на образцах из эквивалентных материалов. Основной целью экспериментов являлось установление того, как будет происходить взаимодействие трещины направленного разрыва с естественной трещиной. В итоге было определено, что пересечение щелью естественной трещины горного массива в основном зависит от деформационных свойств его материала, величины угла между плоскостями щели и трещины, а также давления, которое нагнетается в искусственную трещину [2].

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины являются основными критериями в линейной механике разрушения по оценке роста и развития трещин характеристиками напряжённости материала у вершины трещины. Их знание необходимо для прогнозирования возможности распространения трещины, оценки последствий горных ударов и землетрясений, определения критических смещений породы, при которых происходит разрушение материалов с учётом их прочностных характеристик. Поэтому для объективной оценки механизма формирования трещины разрыва возникает необходимость в установлении связи между смещением и коэффициентом интенсивности напряжений.

Целью настоящего исследования является разработка аналитического представления КИН первого рода в нарушенном материале.

1. Постановка задачи. Плоскодеформированное состояние упругой среды описывается в декартовой системе координат уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

уравнением совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

и законом Гука

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}.$$

Компоненты деформаций определяются выражениями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

В уравнениях использованы следующие обозначения: u_x, u_y — компоненты вектора перемещений; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — компоненты тензора напряжений; ε_{xx} ,

$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ — компоненты тензора деформаций; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга.

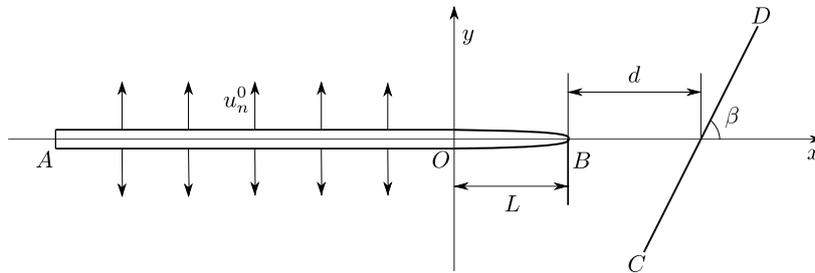
На рисунке приведена схема, моделирующая развитие расклинивающей трещины в нарушенном материале при изменении длины зияющей трещины L , расстояния от трещины OB до наклонной d . Для упрощения расчётов введено условие, что величина $(d + L)$ является постоянной. Нарушение материала моделировалось трещиной CD с углами наклона $30^\circ, 45^\circ$ и 60° к оси Ox . Рассматривалась схема плоской деформации. Длина нагруженного участка трещины $AO = 20$ см.

Краевые условия имели следующий вид:

$$u_n = -u_n^0, \quad \sigma_s = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s = 0, \quad \sigma_n = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad O \leq x \leq B,$$

где u_n — нормальные смещения трещины на участке AO ; σ_s, σ_n — касательные и нормальные напряжения соответственно, заданные на участке OB ; u_n^0 — заданная величина.



Схема, моделирующая развитие расклинивающей трещины в нарушенном материале

2. Численный алгоритм. Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, который включает в себя нижеследующую последовательность операций.

1. Формирование геометрической модели трещины, имеющей образ математического разреза полуплоскости.
2. Формирование системы граничных условий в рамках теории метода граничных элементов.
3. Формирование замкнутой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и приведение её к виду, используемому в методе разрывных смещений [3].
4. Решение СЛАУ методом Гаусса.
5. Представление решения СЛАУ в виде таблицы компонентов векторов смещений и напряжений согласно порядковым номерам граничных элементов.
6. Построение функционала, аппроксимирующего нормальное раскрытие зияющей трещины

$$D_n = -\frac{4u_n^0}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot \left(c_0 + c_1 \exp\left(c_2 \frac{d}{L}\right) \right),$$

где постоянные коэффициенты c_i находятся с помощью метода наименьших квадратов.

7. Образование КИН первого рода с использованием формулы Линькова [4]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2(1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n}{\sqrt{L-x}},$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений первого рода; $G = E/(2(1+\nu))$ – модуль сдвига; $D_n = u_n(x,0_-) - u_n(x,0_+)$ – нормальные раскрытия берегов зияющей трещины; $u_n(x,0_-)$, $u_n(x,0_+)$ – нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины; L – длина трещины OB .

8. Аппроксимация КИН первого рода в виде

$$K_I = \frac{\sqrt{2}Gu_n^0}{\sqrt{\pi L}(1-\nu)} \cdot \left(c_0 + c_1 \exp\left(c_2 \frac{d}{L}\right) \right).$$

3. Численное решение задачи. В результате численного решения задачи была установлена следующая зависимость нормального раскрытия трещины OB (см. рисунок):

$$D_n = -\frac{4u_n^0}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot f(d, L), \quad (1)$$

где функции $f(d, L)$ приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены результаты сравнения расчётов раскрытия берегов трещины OB , вычисленные по формуле (1), и численно при $L = 3$ см, $d = 9$ см и $\beta = 30^\circ$. Знак «минус» перед D_n соответствует раскрытию берегов трещины.

Таблица 1

Функции $f(d, L)$

β	$(L+d)$, см	$f(d, L)$, см, ($2d \geq L$)
30°	9	$1 - 0,128 \cdot \exp\left(-0,633 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	12	$1 - 0,146 \cdot \exp\left(-0,489 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	16	$1 - 0,171 \cdot \exp\left(-0,375 \cdot \frac{d}{L}\right)$
45°	9	$1 - 0,125 \cdot \exp\left(-0,652 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	12	$1 - 0,145 \cdot \exp\left(-0,495 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	16	$1 - 0,170 \cdot \exp\left(-0,377 \cdot \frac{d}{L}\right)$
60°	9	$1 - 0,109 \cdot \exp\left(-0,739 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	12	$1 - 0,138 \cdot \exp\left(-0,517 \cdot \frac{d}{L}\right)$
	16	$1 - 0,168 \cdot \exp\left(-0,383 \cdot \frac{d}{L}\right)$

Результаты расчётов, приведённые в табл. 2, выполнялись при следующих входных параметрах: $u_n^0 = 1,2$ мкм; $\nu = 0,3$; $E = 3 \cdot 10^4$ МПа.

Анализ результатов, приведённых в табл. 2, показал, что значения нормального раскрытия трещины OB в аналитических и численных решениях отличаются друг от друга в среднем на 3%.

Результаты сравнения численных и аналитических расчётов нормального раскрытия зияющей трещины для случая, когда $L = 2$ см, $d = 10$ см и $\beta = 45^\circ$, приведены в табл. 3.

Анализ результатов моделирования, приведённых в табл. 3, показал, что значения нормального раскрытия трещины OB в аналитических и численных решениях отличаются друг от друга в среднем на 3,75%.

В табл. 4 представлены нормальные раскрытия трещины CD при различных расстояниях d до наклонной трещины (угол наклона $\beta = 60^\circ$, $L = 1$ см и $CD = 3$ см).

Из вышеизложенного следует, что при удалении природной трещины от зияющей абсолютные величины нормального раскрытия трещины уменьшаются. Так, при изменении d от 3 до 8 см в среднем нормальные раскрытия трещины CD уменьшаются в 3,2 раза.

В результате расчётов были разработаны аналитические зависимости КИН первого рода в материале, нарушенном наклонной трещиной, с учётом вели-

Таблица 2

Номер граничного элемента	x , см	D_n , мкм	
		решение по формуле (1)	численное решение
1	0,15	-1,986	-1,949
2	0,45	-1,732	-1,715
3	0,75	-1,546	-1,531
4	1,05	-1,384	-1,370
5	1,35	-1,233	-1,220
6	1,65	-1,086	-1,075
7	1,95	-0,935	-0,929
8	2,25	-0,773	-0,777
9	2,55	-0,587	-0,607
10	2,85	-0,333	-0,396

Таблица 3

Номер граничного элемента	x , см	D_n , мкм	
		решение по формуле (1)	численное решение
1	0,1	-2,030	-1,956
2	0,3	-1,771	-1,725
3	0,5	-1,581	-1,543
4	0,7	-1,415	-1,383
5	0,9	-1,261	-1,234
6	1,1	-1,109	-1,089
7	1,3	-0,955	-0,942
8	1,5	-0,790	-0,788
9	1,7	-0,600	-0,617
10	1,9	-0,340	-0,403

Таблица 4

Номер граничного элемента	Нормальные раскрытия трещины CD при различных d		
	D_n , мкм		
	$d = 8$ см	$d = 5$ см	$d = 3$ см
1	-0,0331	-0,0622	-0,1080
2	-0,0479	-0,0901	-0,1590
3	-0,0576	-0,1084	-0,1937
4	-0,0645	-0,1214	-0,2186
5	-0,0695	-0,1305	-0,2363
6	-0,0731	-0,1367	-0,2481
7	-0,0754	-0,1406	-0,2549
8	-0,0767	-0,1423	-0,2573
9	-0,0771	-0,1423	-0,2560
10	-0,0767	-0,1407	-0,2514
11	-0,0754	-0,1377	-0,2439
12	-0,0735	-0,1333	-0,2340
13	-0,0709	-0,1276	-0,2218
14	-0,0676	-0,1208	-0,2076
15	-0,0635	-0,1126	-0,1915
16	-0,0586	-0,1031	-0,1735
17	-0,0528	-0,0921	-0,1532
18	-0,0458	-0,0792	-0,1302
19	-0,0369	-0,0634	-0,1032
20	-0,0248	-0,0422	-0,0680

чин L , d , $L + d$ и углов наклона $\beta = 30^\circ$, 45° и 60° :

$$K_I = \frac{\sqrt{2}Gu_n^0}{\sqrt{\pi L}(1-\nu)} \cdot f(d, L),$$

где функции $f(d, L)$ приведены в табл. 1.

Выводы.

1. Разработан алгоритм численного моделирования, позволяющий вычислять КИН первого рода для нарушенной среды.
2. Разработаны аналитические представления КИН первого рода.
3. Установлена количественная сопоставимость нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях.
4. Установлено, что при удалении трещины CD от трещины OB абсолютные значения ее нормальных раскрытий уменьшаются. Так, при изменении d от 3 до 8 см в среднем нормальные раскрытия трещины CD уменьшаются в 3,2 раза.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Черепанов Г. П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1987. 308 с. [*Cherepanov G. P. Fracture mechanics of rock during drilling. Moscow: Nedra, 1987. 308 pp.*]
2. Хямяляйнен В. А., Бурков Ю. В., Сыркин П. С. Формирование цементационных завес вокруг капитальных горных выработок. М.: Недра, 1994. 400 с. [*Khyamyalyainen V. A., Burkov Yu. V., Syrkin P. S. Cement screening around permanent roadways. Moscow: Nedra, 1994. 400 pp.*]

3. *Crouch S. L., Starfield A. M.* Boundary element methods in solid mechanics: with applications in rock mechanics and geological engineering. London – Boston – Sydney: George Allen & Unwin, 1983. 322 pp.; русск. пер.: Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
4. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.; англ. пер.: *Linkov A. M.* Boundary integral equations in elasticity theory / Solid mechanics and its applications. Vol. 99. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. 268 pp.

MSC: 74R10; 74S15

MATHEMATICAL MODEL OF THE DEVELOPMENT OF THE WEDGING CRACK IN THE DISTURBED MATERIAL

E. V. Spiridonova, S. V. Beloborodova

Orenburg State University,
13, pr. Pobedy, Orenburg, 460018, Russia.

E-mails: skatyusha@rambler.ru, svetabelkhor@yandex.ru

The article represents the numerical solution of the problem of the increasing wedging crack in the disturbed material. Solution of problem was achieved by the method of discontinuous displacements. Analytical dependences of the stress intensity factors of the first type on the normal displacements of the crack was determined.

Key words: *hiatal crack, method of discontinuous displacements, stress intensity factors of I type.*

Original article submitted 20/XI/2010;
revision submitted 12/II/2011.

Ekaterina V. Spiridonova, Senior Lecturer, Dept. of Mathematical Analysis. *Svetlana V. Beloborodova*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.