

УДК 524.8

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ НА РАДИАЦИОННО-ДОМИНАНТНОЙ СТАДИИ

М. В. Долгополов, Е. Ю. Петрова

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: mvdolg@ssu.samara.ru, kuleobul@rambler.ru

Рассмотрен вывод термодинамических уравнений на радиационно-доминантной стадии эволюции Вселенной в рамках стандартной модели, проанализированы основные закономерности. Записываются динамические уравнения эволюции Вселенной в терминах температуры. Осуществлен выход за рамки стандартной модели, учтено влияние тёмной энергии. Вселенная рассматривается при этом однородной и изотропной и описывается как в рамках стандартной модели, так и в её расширениях.

Ключевые слова: динамические уравнения, эволюция Вселенной, радиационно-доминантная стадия.

Введение. В работе исследуется зависимость температуры Вселенной от времени на радиационно-доминантной стадии. Задачу нахождения шкалы $T(t)$ впервые сформулировал А. Гус в работе [1]. Получение явного вида такой зависимости температуры $T(t)$ от времени интересно, поскольку по сложившейся традиции динамические уравнения принято записывать в терминах масштабного фактора $a(t)$, эффективного потенциала $V(t)$ или красного смещения $z(t)$. В настоящей работе рассматриваются процессы, происходящие на ранней стадии эволюции Вселенной при условии, что вещество можно представить в виде смеси идеальных бозе- и ферми-газа, а температура сильно отличается от массового порога. Это значит, что уравнение состояния подчиняется закону $p = \rho/3$, где ρ — плотность энергии вещества, p — давление. При этом химический потенциал $\mu = 0$, и число частиц не сохраняется.

Термодинамические законы оказываются полезными для качественного описания ситуации выхода из равновесия, они позволяют оценить момент времени этого события и определить направление того или иного неравновесного процесса. В данной работе рассмотрен вывод термодинамических уравнений эволюции Вселенной в рамках стандартной модели, проанализированы закономерности и построены графики. Осуществлен выход за рамки стандартной модели и рассмотрено уравнение, учитывающее влияние тёмной энергии. Необходимость учета этого вклада очевидна. Данные, накопленные за последние годы, доказывают, что влиянием тёмной материи и тёмной энергии на структуру и динамику Вселенной пренебрегать нельзя. Свидетельствами

Михаил Вячеславович Долгополов (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. общей и теоретической физики; зав. лаб., научно-исследовательская лаборатория математической физики.

Елена Юрьевна Петрова, студент, каф. общей и теоретической физики.

существования тёмной материи и тёмной энергии являются данные об анизотропии и поляризации реликтового излучения, о распространенности легких элементов во Вселенной, о согласовании результатов возраста Вселенной, полученных разными методами: гравитационного линзирования, изучения эволюции галактических кластеров при красных смещениях и другие.

1. Термодинамические уравнения в стандартной модели. Известно, что при высокой температуре вещество можно описывать полевой теорией, уравнение состояния в которой с хорошим приближением соответствует идеальному квантовому газу безмассовых частиц (в общем случае это может быть смесь идеальных бозе- и ферми-газа). В этой теории при условии, что температура находится далеко от массового порога, термодинамические функции задаются формулами [2]

$$\rho = 3p = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4, \quad s = \frac{2\pi^2}{45} N(T) T^3,$$

где $N(T)$ — функция, связанная с количеством бозонных ($N_b(T)$) и фермионных ($N_f(T)$) степеней [2] свободы соотношением $N(T) = N_b(T) + (7/8)N_f(T)$, s — удельная энтропия, ρ — плотность энергии вещества, p — давление вещества, T — температура. Используется система единиц, в которой $c = 1$, $\hbar = 1$.

Необходимо записать динамические уравнения эволюции Вселенной в терминах температуры. Требуемые уравнения — это не уравнения Эйнштейна в стандартной форме [3, 4]. Следует применять уравнения эволюции Вселенной в модели Фридмана, используя термодинамические функции с температурой, зависящей от времени. Для этого следует исключить из уравнений Эйнштейна масштабный фактор, заменив его на температуру и энтропию. Сделать это можно, используя закон изменения энергии и условие адиабатического расширения (и остывания) Вселенной в рамках стандартной космологической модели.

Многие физические системы, включая и саму Вселенную, можно рассматривать как идеальную жидкость (см., например, [2, с. 61–72], [4, с. 105]). Идеальная жидкость имеет в каждой точке некоторую скорость v , причём, по определению, наблюдатель, движущийся с этой скоростью, воспринимает жидкость как изотропную. Это имеет место в том случае, когда средняя длина свободного пробега частиц между столкновениями меньше линейного масштаба, используемого наблюдателем. Идеальной жидкостью называется ввиду того, что вклады теплопроводности и напряженностей, вызываемых вязкостью, отсутствуют.

Приведённое определение идеальной жидкости можно сформулировать с помощью тензора энергии-импульса. Пусть в начальный момент времени мы находимся в такой системе отсчёта (будем отмечать её знаком «тильда»), в которой рассматриваемая жидкость покоится в какой-то заданной области пространства-времени. В этой области тензор однородно и изотропно распределённого вещества диагонален и его компоненты имеют следующий вид:

$$\tilde{T}_{ab} = p\delta_{ab}, \quad \tilde{T}_{a0} = \tilde{T}_{0a} = 0, \quad \tilde{T}_{00} = \rho,$$

где $a = 1, 2, 3$, и сигнатура метрики $(-, +, +, +)$. В рассматриваемом случае радиационной доминантности мы имеем уравнение состояния $p = \rho/3$. Здесь материя рассматривается ультрарелятивистской, для которой справедливо $\rho \sim a^{-4}$ (см., например, [5, с. 112]).

В среднем вещество покоится в сопутствующей системе отсчёта, поэтому единственная отличная от нуля компонента 4-скорости — это u_0 . Тензор энергии-импульса тогда можно записать в общем виде:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b), \quad (1)$$

где a, b принимают значения $0, 1, 2, 3$.

Отсутствие теплообмена между отдельными областями жидкости означает, что движение происходит адиабатически, причём в каждой области жидкости (см., например, [6, с. 17]).

При адиабатическом движении энтропия каждого участка жидкости остаётся постоянной при перемещении последнего в пространстве. Тогда адиабатичность движения выражается уравнением

$$\frac{d}{dt}(sa^3) = 0, \quad (2)$$

где s — удельная энтропия.

Рассмотрим уравнение баланса энергии (см. [5, с. 110]). Можно записать $dE = -pdV$. Подставив $E = \rho V \sim \rho a^3$ и разделив обе части уравнения на dt , получим

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3). \quad (3)$$

Выпишем уравнение Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (4)$$

и Эйнштейна—Фридмана

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p). \quad (5)$$

2. Результаты для стандартной модели. Запишем уравнения Фридмана (4), (5) в терминах температуры, учитывая, что значение температуры далеко от массового порога (см., например, [3]). Преобразуя уравнение (5) с учётом уравнения состояния

$$\rho = 3p = \frac{\pi^2}{30}N(T)T^4, \quad (6)$$

получим

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi^3}{45}GN(T)T^4. \quad (7)$$

Введём вспомогательную функцию

$$\epsilon(T) = \frac{k}{a^2 T^2}, \quad (8)$$

где $k = 0, \pm 1$ соответственно для плоской, открытой и замкнутой Вселенной с масштабным фактором $a \equiv a(t)$, зависящим от времени. Учитывая (6) и вспомогательную функцию $\epsilon(T)$, представим уравнение (4) в виде

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \epsilon(T)T^2 = \frac{4\pi^3}{45}GN(T)T^4. \quad (9)$$

Учитывая уравнение состояния, закон изменения энергии (3), используя условие адиабатического расширения Вселенной (2), получим связь масштабного фактора и температуры:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{T}}{T}. \quad (10)$$

Подставив это выражение в преобразованное уравнение Эйнштейна—Фридмана (9), получим одно из (термо)динамических уравнений эволюции Вселенной:

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 + \epsilon(T)T^2 = \frac{4\pi^3}{45}GN(T)T^4. \quad (11)$$

Используя (8), получим уравнение

$$\epsilon(T) = k\left(\frac{2\pi^2}{45}\frac{N(T)}{S}\right)^{2/3}, \quad (12)$$

где $S \equiv sa^3$ — полная энтропия в объёме, определяемом радиусом кривизны a (масштабом). Отметим, что N , S и, следовательно, ϵ постоянны в рассматриваемом интервале температур или времени (a непостоянно).

В итоге динамическим уравнением эволюции Вселенной в терминах температуры и энтропии является уравнение (11).

3. Исследование результатов. Все соотношения, рассмотренные в данной задаче: плотность энергии вещества $\rho(T)$, её связь с давлением $p = 3p$, удельная энтропия $s(T)$ и другие, справедливы для радиационно-доминантной стадии эволюции Вселенной, которая длилась до момента времени t порядка $4 \cdot 10^{10}$ с, а по температуре в единицах энергии изменялась примерно с 10^{19} ГэВ до 10^{-9} ГэВ.

При численном исследовании зависимости $T(t)$ все величины заданы в естественной системе единиц, в которой постоянная Планка \hbar , скорость света c и константа Больцмана k_B полагаются равными единице. При этом гравитационная постоянная $G = 1/M_{Pl}^2$, где M_{Pl} — Планковская масса. Для численных расчётов необходимо знать в явном виде функцию $N(T)$. Поэтому воспользуемся значением $N(T) = 106,75$ для $T > 300$ ГэВ, $N(T) \simeq 10,75$ для $T \sim 10^{-3}$ ГэВ (см. [7, с. 124]).

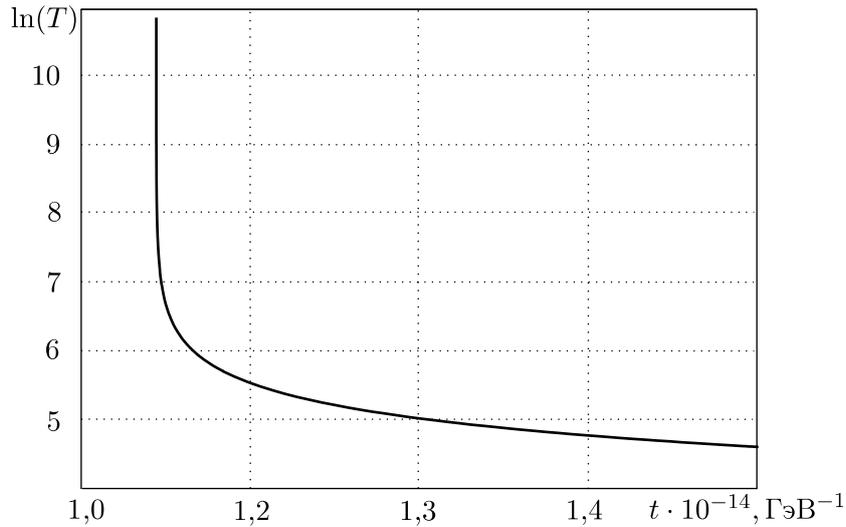
Термические уравнения очень важны для понимания процессов, происходящих на всех этапах эволюции Вселенной. Знание этих уравнений открывает возможность оценивать момент «вымерзания частиц», позволяет найти барион-антибарионное отношение и определить особенности расширения Вселенной на протяжении значительного времени.

На приведённом рисунке можно проследить характер зависимости решений уравнения (11) для различных значений функции $N(T)$. Получены численные решения термодинамических уравнений (11) для разных случаев:

$$T = \frac{5,96346 \cdot 10^8}{\sqrt{t - 7,11258 \cdot 10^{17}C}} \text{ (ГэВ)}, \quad C = 0,00016;$$

$$T = \frac{1,05255 \cdot 10^9}{\sqrt{t - 2,21572 \cdot 10^{18}C}} \text{ (ГэВ)}, \quad C = -48679;$$

размерность $t = [\text{ГэВ}^{-1}]$, C — постоянная величина, соответствующая начальным условиям.



Решение термодинамического уравнения (11) на радиационно-доминантной стадии эволюции Вселенной при $N(T) = 106,75$ и $T > 300$ ГэВ (время по оси абсцисс отложено в обратных энергетических единицах в используемой системе единиц, или $7,5 \cdot 10^{-11} - 9,9 \cdot 10^{-11}$ с)

4. Термодинамические уравнения с учётом тёмной энергии. Космологические решения, полученные ранее, нельзя рассматривать как реалистичские [2]. В действительности плотность энергии в современной Вселенной обеспечивается нерелятивистским веществом (барионы и темная материя, а также те типы нейтрино, чья масса заметно выше $1 \text{ К} \sim 10^{-4}$ эВ), ультрарелятивистским веществом (фотоны, а также тот тип нейтрино, масса которого меньше 10^{-4} эВ, если такое нейтрино существует) и тёмной энергией.

О ненулевой плотности тёмной энергии и тёмной материи свидетельствуют следующие факты [5, 8, 9, 10]: согласование результатов возраста Вселенной, полученных разными методами, гравитационное линзирование, изучение эволюции галактических кластеров при разных красных смещениях, изучение равновесия газа в богатых галактических скоплениях, уменьшение яркости сверхновых и другие.

В пользу того, что тёмная энергия действительно существует, говорят несколько наблюдательных фактов. Во-первых, Вселенная с хорошей степенью точности пространственно плоская, а это означает, что полная плотность энергии в ней совпадает с критической плотностью ρ_c . Однако оценки плотностей кластеризованной тёмной материи и известных частиц меньше ρ_c . Недостающий вклад — вклад тёмной энергии. Во-вторых, наблюдение за сверхновыми типа Ia показали, что далекие сверхновые выглядят тусклее близких. Это может быть проинтерпретировано как свидетельство ускоренного расширения Вселенной (в не слишком далеком прошлом). Ускоренное расширение в общей теории относительности возможно только при наличии тёмной энергии, плотность которой не зависит (или слабо зависит) от времени [2]. Таким образом, доминантный вклад в плотность космологической материи вносит неизвестная форма энергии, которая приводит к антигравитации в космических масштабах и расширению с ускорением. Однако так было не всегда. В течение практически всей истории Вселенной тёмная энергия была субдоминантной и только недавно, при красном смещении $z \approx 0,3$, она снова стала доминировать [5]. В силу этого факта можно утверждать, что учёт тёмной энергии в термодинамическом уравнении (11) приведёт к уточнению решения, а не к кардинальному изменению его вида.

Вообще говоря, Вселенная могла бы иметь и ненулевую пространственную кривизну. Поэтому все соответствующие слагаемые необходимо учитывать в правой части уравнения Фридмана (4). Тогда оно примет вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho_M + \rho_{\text{rad}} + \rho_\Lambda + \rho_{\text{curv}}), \quad (13)$$

где ρ_M , ρ_{rad} , ρ_Λ — плотности энергии нерелятивистского вещества, ультрарелятивистского вещества («радиации») и тёмной энергии. Здесь полагаем, что ρ_Λ является постоянной величиной, поэтому можно считать эту плотность также и плотностью вакуума. По определению,

$$\frac{8\pi}{3}G\rho_{\text{curv}} = -\frac{k}{a^2}.$$

При этом будем считать, что

$$\rho = \rho_M + \rho_{\text{rad}} + \rho_\Lambda. \quad (14)$$

С учётом (14) плотность энергии вещества примет вид

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30}N(T)T^4 + \rho_\Lambda. \quad (15)$$

Термодинамические уравнения с учётом уравнений (11) и (15) можно записать так:

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 + \epsilon(T)T^2 = \frac{4\pi^3}{45}GN(T)T^4 + \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda. \quad (16)$$

Уравнение (16) является термодинамическим уравнением с учётом тёмной энергии.

Заключение. В работе получены термодинамические уравнения эволюции Вселенной в явном виде при условии, что ряд физических параметров системы (плотность энергии вещества ρ , давление p , функция распределения бозонных и фермионных степеней свободы N) должны удовлетворять определенным требованиям. Однозначная зависимость температуры от времени позволила построить кривые, описывающие характер изменения температуры T . Было установлено, что $T \sim 1/\sqrt{t}$. При этом заметную роль играет функция распределения N : при разных значениях степеней свободы частиц темп изменения температуры разный. Таким образом, можно сделать вывод, что остывание Вселенной происходит с ускорением.

Была рассмотрена модель с ненулевым значением плотности тёмной энергии. Получена явная зависимость температуры от времени в этом случае.

Нельзя исключить возможность того, что ρ_Λ в действительности зависит от времени. Например, можно было бы рассмотреть тёмную энергию с уравнением состояния $p_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda$ с $w_\Lambda \neq -1$; в этом случае её плотность изменялась бы с масштабным фактором по степенному закону. Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что $-1,2 \leq w_\Lambda \leq -0,8$.

С учётом этого основные выводы данной работы остаются справедливыми, хотя при $w_\Lambda \neq -1$ формулы приобретают более громоздкий вид. Следует подчеркнуть, что вопрос о зависимости ρ_Λ от времени — один из важнейших вопросов как с точки зрения космологии, так и с точки зрения физики частиц, поскольку он прямо связан с происхождением тёмной энергии.

Авторы выражают благодарность Б. В. Данилюку, М. Г. Иванову и А. Л. Бобрику за замечания и дискуссии, С. В. Червону и О. Г. Паниной за идейную постановку задачи. Научная работа выполнена при поддержке грантом ведомственной программы Министерства образования и науки РФ (проект АВИЦП № 3341, 10854) и контрактом ФЦП 5163.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Guth A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems // *Phys. Rev. D*, 1981. no. 2. Pp. 347–356.
2. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. М.: ЛКИ, 2008. 552 с.; англ. пер.: *Gorbunov D. S., Rubakov V. A. Introduction to the Theory of the Early Universe. Hot Big Bang Theory*. Hackensack, New York: World Scientific, 2011. 488 pp.
3. Weinberg S. Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1972. 657 pp.; русск. пер.: *Вайнберг С. Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности*. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. Wald R. M. General Relativity. Chicago: University of Chicago, 1984. 491 pp.; русск. пер.: *Уолд Р. М. Общая теория относительности*. М.: РУДН, 2008. 693 с.
5. Физика фундаментальных взаимодействий: Летняя школа Фонда Дмитрия Зимина «Династия» (17–26 августа 2006 г.). М.: Арт-Бизнес-Центр, 2008. 496 с. [Physics of fundamental interactions Dmitry Zimin's "Dynasty" Foundation Summer School (17–26 August 2006). Moscow: Art-Business Center, 2008. 496 pp.]
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебн. пос. в 10 т. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 500 с.

- намика. М.: Наука, 1986. 736 с. [*Landau L. D., Lifshits E. M.* Theoretical physics. Vol. VI: Fluid dynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 pp.]
7. *Кландор–Клейнротхаус Г. В., Цюбер К.* Астрофизика элементарных частиц / пер. с нем.; ред. В. А. Бедняков. М.: Ред. ж. УФН, 2000. 496 с. [*Klapdor–Kleingrothaus G. V., Tsyuber K.* Elementary particle astrophysics / transl. from German; ed. V. A. Bednyakov. Moscow: Red. zh. UFN, 2000. 496 pp.]
 8. *Dolgov A. D.* Mystery of vacuum energy or rise and fall of cosmological constant, 2002, arXiv: [hep-ph/0203245](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0203245).
 9. *Dolgov A. D.* Problems of vacuum energy and dark energy, 2004, arXiv: [hep-ph/0405089](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0405089).
 10. *Лукаш В. Н., Михеева Е. В.* Темная материя: от начальных условий до образования структуры Вселенной // *УФН*, 2007. Т. 177, № 9. С. 1023–1028; англ. пер.: *Lukash V. N., Mikheeva E. V.* Dark matter: from initial conditions to structure formation in the Universe // *Phys. Usp.*, 2007. Vol. 50, no. 9. Pp. 971–976.

Поступила в редакцию 21/XII/2010;
в окончательном варианте — 16/III/2011.

MSC: 83F05

THERMAL EQUATIONS OF THE RADIATION DOMINATED UNIVERSE EVOLUTION

M. V. Dolgoplov, E. Yu. Petrova

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: mvdolg@ssu.samara.ru, kuleobul@rambler.ru

The equations of the evolution of the Universe in Friedmann model are considered using thermodynamic functions and temperature as function of time. The exit for frameworks of the standard model is carried out, the influence of dark energy is considered.

Key words: radiation dominance, Universe evolution, thermal equations.

Original article submitted 21/XII/2010;
revision submitted 16/III/2011.

Mikhail V. Dolgoplov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General and Theoretical Physics; Head of Lab., Research Lab. of Mathematical Physics. *Elena Yu. Petrova*, Student, Dept. of General and Theoretical Physics.