

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

А. И. Гольдштейн

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Проанализирована проблема существования решений вида плоской волны для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, описывающей экзотермический процесс химического превращения идеального газа. В предположении о температуре воспламенения доказывается существование детонационных и дефлаграционных волн, близких к соответствующим волнам так называемой ZND-модели, при условии малой вязкости, теплопроводности и диффузии. Примененный в исследовании метод конструктивен, поскольку классические решения ZND-модели служат сингулярными решениями в контексте геометрической теории сингулярных возмущений. Сингулярные решения состоят из траекторий, на которых движение происходит медленно под воздействием химической реакции, и траекторий, на которых движение происходит быстро под воздействием газодинамических ударов. Такой геометрический подход приводит к ясной, полной картине существования структуры и асимптотического поведения детонационных и дефлаграционных волн.

1. Постановка задачи

Рассмотрим проблему существования решений вида плоской волны для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Пусть система описывает одношаговую экзотермическую реакцию превращения в продукт однокомпонентного реагента. Уравнения, определяющие реагирующий поток, задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\rho)_t + (\rho u)_x &= 0; \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= (\mu u_x)_x; \\ \left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + e\right)\right]_t + \left[\rho u\left(\frac{u^2}{2} + e\right) + pu\right]_x &= (\lambda T_x)_x + (q\rho DY_x)_x + (\mu u u_x)_x; \\ (\rho Y)_t + (\rho u Y)_x &= (\rho DY_x)_x - k\rho Y\phi(T). \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях переменные ρ, u, p, e, T, Y соответственно плотность, скорость, давление, удельная энергия, температура и массовая доля реагента. Газу в состоянии негорения соответствует значение $Y=1$, полностью сгоревшему газу соответствует $Y=0$. В дальнейшем все переменные будут положены безразмерными. Константы μ, λ, D - соответственно коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии. Газ считается идеальным, т.е. давление выражается зависимостью $p = \rho RT$, где R - газовая постоянная. Удельная энергия выражается соотношением $e = c_v T + qY$, где c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме, а q - параметр высвобождения теплоты. Предположение, что реакция экзотермическая, означает, что q - положительная величина. В четвертом уравнении системы (1) величина k является константой. Функция $\phi(T)$ обычно задается в виде $\phi(T) = \exp(-E / RT)$, где E - энергия активации. В дальнейшем это условие будет модифицировано.

Детонационные и дефлаграционные волны - решения типа бегущей волны, т.е. решения (1), зависящие только от $\xi = x - ct$, соединяющие состояние негорения при $\xi = -\infty$ с состоянием полного сгорания при $\xi = +\infty$. В силу принципа инвариантности Галилея достаточно рассмотреть случай $c=0$, т.е. стационарную задачу, соответствующую (1):

$$\begin{aligned}
(\rho u)_x &= 0; \\
(\rho u^2 + p)_x &= (\mu u_x)_x; \\
[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) + pu]_x &= (\lambda T_x)_x + (q\rho DY_x)_x + (\mu u u_x)_x; \\
(\rho u Y)_x - (\rho DY_x)_x &= -k\rho Y\phi(T).
\end{aligned}
\tag{2}$$

Далее всюду символы f и f_+ используются для обозначения принимаемого некоторой функцией f значения при $x = -\infty$ и $x = +\infty$ (соответственно). Если пренебречь всеми эффектами рассеивания, т.е. положить $\mu = \lambda = D = 0$, то получим так называемую ZND-модель

$$\begin{aligned}
(\rho u)_x &= 0; \\
(\rho u^2 + p)_x &= 0; \\
[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) + pu]_x &= 0; \\
(\rho u Y)_x &= -k\rho Y\phi(T).
\end{aligned}
\tag{3}$$

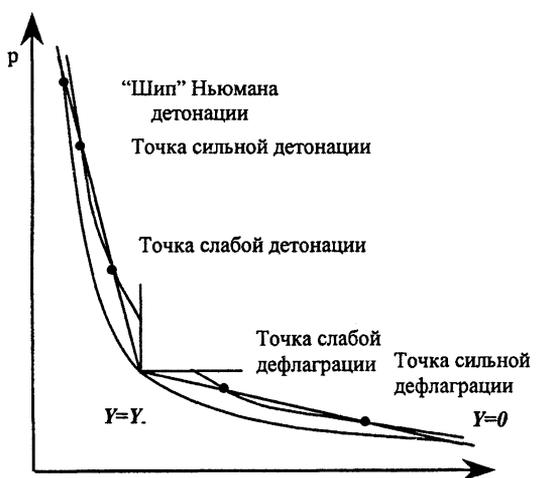
Кратко рассмотрим классический анализ детонационных и дефлаграционных волн для ZND-модели (см., напр., [1], [8]), поскольку он послужит основой настоящего исследования соответствующих волн для (2). Первое уравнение в (3) означает, что поток массы ρu имеет постоянное значение, которое обозначим через $m = \rho_- u_-$. Потоки импульса и энергии также постоянны. Это дает условия Ранкэна - Гюгонно для ударной волны, которые описывают состояния ρ и p для полного сгорания при заданных значениях ρ_- , u_- и Y_- . Интегрируя второе и третье уравнения в (3), получим уравнение линии Рэлея:

$$p - p_- = -m^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_-} \right) \tag{4}$$

и уравнение кривых Гюгонно:

$$e - e_- = \frac{1}{2}(p + p_-) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_-} \right). \tag{5}$$

В силу зависимости внутренней энергии от массовой доли реагента обычная (газодинамическая) кривая Гюгонно смещена при $Y \neq Y_-$. Для заданного состояния на левом конце (при $x = -\infty$) в зависимости от величины m существуют два, одно или ни одного состояния полного сгорания на правом конце (при $x = +\infty$). Состояние полного сгорания при критическом значении m - это точка Шарпан-Жюжет. Возможны два принципиально различных типа процессов: носящие характер сжатия процессы называются детонациями; имеющие же характер расширения - называются дефлаграциями. Состояние сгорания на детонационной ветви, расположенное близко к состоянию негорения, называется точкой слабой детонации, соответствующий процесс называется слабой детонацией. Состояние сгорания на детонационной ветви, расположенное вдали от состояния негорения, называется точкой сильной детонации, соответствующий процесс называется сильной детонацией. Для дефлаграции имеет место аналогичная классификация (рис. 1). Для слабой дефлаграционной волны изменение переменной Y определяется скалярным дифференциальным уравнением; газодинамические переменные находятся в состоянии равновесия (за которым идет параметризованная Y - кривая). Сильные детонации исключаются. С другой стороны, ZND-структура для сильной детонации - это такая газодинамическая ударная волна, которая сжимает и нагревает газ. За ней следует слабая дефлаграция, в ходе которой и протекает реакция. На рис. 1 ZND-структура сильной детонации соответствует мгновенному скачку от состояния негорения до пересечения линии Рэлея с кривой Гюгонно, за которым следует дефлаграция вдоль линии Рэлея до состояния сгорания.



Р и с. 1. Диаграмма Шарпан-Жюжет

Для дефлаграции имеет место аналогичная классификация (рис. 1). Для слабой дефлаграционной волны изменение переменной Y определяется скалярным дифференциальным уравнением; газодинамические переменные находятся в состоянии равновесия (за которым идет параметризованная Y - кривая). Сильные детонации исключаются. С другой стороны, ZND-структура для сильной детонации - это такая газодинамическая ударная волна, которая сжимает и нагревает газ. За ней следует слабая дефлаграция, в ходе которой и протекает реакция. На рис. 1 ZND-структура сильной детонации соответствует мгновенному скачку от состояния негорения до пересечения линии Рэлея с кривой Гюгонно, за которым следует дефлаграция вдоль линии Рэлея до состояния сгорания.

Стандартный критерий для разделения нефизических решений уравнений гиперболических законов сохранения, полученных пренебрежением эффектами рассеивания, и физических - считать допустимыми только те решения, которые являются пределами решений уравнений с диссипацией, когда коэффициенты рассеивания стремятся к нулю. На уровне ударных волн существование вязких профилей, которые сходятся к ударной волне, когда коэффициенты рассеивания стремятся к нулю, - это установленный критерий допустимости [4]. Также необходимо проанализировать сходимости решений (2) к решениям (3) при $(\mu, \lambda, D) \rightarrow 0$. Первая из трудностей, с которой приходится столкнуться, это хорошо известная проблема с холодной границей, т.е. состояние негорения не является стационарной точкой $\phi(T) = \exp(-E / RT)$ при $T_- \neq 0$. Стандартным выходом в этой ситуации является модификация функции $\phi(T)$ таким образом, чтобы $\phi(T)$ становилась тождественно равной нулю при T , меньшей определенной температуры воспламенения T_i . При этом предположении детонационные и дефлаграционные волны являются гетероклиническими траекториями, соединяющими неподвижные точки (2).

Существование детонационных и дефлаграционных волн системы (2) анализировалось многими авторами, обычно при следующих упрощающих предположениях: число Прандтля $Pr = \mu_0 / \lambda_0 = 3/4$ и (или) число Льюиса $Le = \lambda_0 / D_0 = 1$. Сделаем предположения о малости величин μ, λ, D в безразмерной системе, соответствующей (2), и о существовании температуры воспламенения. Рассмотрим (2) как сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mu u_x &= m(u - u_{\pm}) + mR\left(\frac{T}{u} - \frac{T_{\pm}}{u_{\pm}}\right); \\ \lambda T_x &= mc_p(T - T_{\pm}) + mq(Z - Z_{\pm}) - mRu\left(\frac{T}{u} - \frac{T_{\pm}}{u_{\pm}}\right) - \frac{m}{2}(u - u_{\pm})^2; \\ DY_x &= u(Y - Z); \\ Z_x &= \frac{-kY}{u}\phi(T), \end{aligned} \quad (6)$$

где переменная Z определяется третьим уравнением (см. 2). Докажем существование детонационных и дефлаграционных волн, близких к соответствующим волнам ZND-модели. Предлагаемый метод конструктивен, поскольку классические решения ZND-модели служат сингулярными решениями в контексте геометрической теории сингулярных возмущений. Методы теории динамических систем позволяют сделать вывод о существовании решений (6), близких к этим сингулярным решениям. Такой подход приводит к ясной, полной картине существования структуры и асимптотического поведения детонационных и дефлаграционных волн. Получим полную характеристику глобального потока на двумерном инвариантном многообразии, содержащем все неподвижные точки и гетероклинические траектории (6); с этой точки зрения ситуация становится особенно прозрачной. В обычной ситуации, когда для заданного состояния негорения (ρ_-, u_-, T_-, Y_-) температура в двух соответствующих состояниях сгорания выше температуры воспламенения, полученные результаты можно обобщить в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. Пусть $\phi(T)$ - гладкая функция, с температурой воспламенения T_i . Для $\mu = \varepsilon \hat{\mu}$, $\lambda = \varepsilon \hat{\lambda}$, $D = \varepsilon \hat{D}$, где $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D} > 0$, существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливы следующие утверждения.

- (i) Если (ρ_-, u_-, T_-, Y_-) с $T_- < T_i$ - состояние негорения, соответствующее детонации, то тогда существует единственное решение (2) вида сильной детонационной волны.
- (ii) Если (ρ_-, u_-, T_-, Y_-) с $T_- = T_i$ - состояние негорения, соответствующее детонации, то тогда существует двумерное многообразие (с границей), образованное всеми решениями (2) вида сильной детонационной волны. Граница многообразия сильных детонационных волн образована сильной детонационной волной, имеющей вид газодинамического удара, за которой следует слабая дефлаграция, и единственной слабой детонационной волной, за которой следует газодинамический удар.

(iii) Для состояния негорения (ρ_-, u_-, T_-, Y_-) , соответствующего дефлаграции, единственное решение (2) вида слабой дефлаграционной волны существует тогда и только тогда, когда выполнено условие $T = T_i$. Решений вида сильной дефлаграционной волны не существует.

(iv) В подходящей параметризации все детонационные и дефлаграционные волны сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к соответствующим волнам ZND-модели равномерно в норме C^1 вне окрестностей расположения газодинамических ударов. \square

Доказательство теоремы приводится в п. 5.

2. Сингулярно возмущенная безразмерная система

Предварительно пронумеровав каждое из входящих в систему (3) уравнений, выполним преобразования с целью сведения ее к системе дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$(\rho u)_x = 0; \quad (7)$$

$$(\rho u^2 + p)_x = (\mu u_x)_x; \quad (8)$$

$$[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) + pu]_x = (\lambda T_x)_x + (q\rho DY_x)_x + (\mu u u_x)_x; \quad (9)$$

$$(\rho u Y)_x - (\rho DY_x)_x = -k\rho Y\phi(T). \quad (10)$$

Из (7) следует $\rho u = const$; обозначим $\rho u = m = \rho_- u_-$. Преобразовав (8) с учетом введенного обозначения, получим $\mu u_x + p_x = (\mu u_x)_x$. Отсюда $m(u - u_-) + (p - p_-) = \mu u_x$. Учитывая соотношение $p = \rho RT$, приходим к уравнению $m(u - u_-) + mR(\frac{T}{u} - \frac{T_-}{u_-}) = \mu u_x$.

Преобразуем (9), воспользовавшись равенством $e = c_v T + qY$:

$$[\rho u(\frac{u^2}{2} + e) + pu]_x = [m(\frac{u^2}{2} + c_v T + qY) + \rho RTu]_x = [m(\frac{u^2}{2} + c_v T + qY) + mRT]_x,$$

откуда

$$m[(\frac{u^2}{2} - \frac{u_-^2}{2} + c_v(T - T_-) + q(Y - Y_-))] + mR(T - T_-) = \lambda T_x + q\rho DY_x + \mu u u_x. \quad (11)$$

Преобразуем (10): $(\rho u Y)_x - (\rho DY_x)_x = mY_x - (mDY_x/u)_x = m(Y - DY_x/u)_x$. Введем новую переменную Z , чтобы получить систему дифференциальных уравнений первого порядка: $Z = Y - DY_x/u = Y - \rho DY_x/m$; отсюда $\rho DY_x = m(Y - Z)$. Так как $Y_x \equiv 0$ при $x = \pm\infty$, должны выполняться равенства $Z_- = Y_-$, $Z_+ = Y_+$. Уравнение (10) примет вид: $mZ_x = -k\rho Y\phi(T)$;

$Z_x = \frac{-k\rho Y\phi(T)}{\rho u} = \frac{-kY}{u}\phi(T)$. Подставив в уравнение (11) установленные выше представления для μu_x и ρDY_x , получим:

$$\lambda T_x = \frac{m}{2}(u^2 - u_-^2) - mu(u - u_-) + mq(Y - Y_-) - mq(Y - Z) - mRu(\frac{T}{u} - \frac{T_-}{u_-}) + (T - T_-)(c_v + R)m.$$

В равенстве $c_p = c_v + R$ величина c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении. С учетом этого предыдущее равенство принимает вид

$$\lambda T_x = m(u - u_-)(\frac{1}{2}(u + u_-) - u) + mq(Z - Y_-) - mRu(\frac{T}{u} - \frac{T_-}{u_-}) + c_p m(T - T_-).$$

Окончательно уравнение (9) запишется так:

$$\lambda T_x = mc_p(T - T_-) + mq(Z - Z_-) - mRu(\frac{T}{u} - \frac{T_-}{u_-}) - \frac{m}{2}(u - u_-)^2.$$

Тогда преобразованная система (7)-(10) принимает вид

$$\mu u_x = m(u - u_{\pm}) + mR(\frac{T}{u} - \frac{T_{\pm}}{u_{\pm}}); \quad (12)$$

$$\lambda T_x = mc_p(T - T_{\pm}) + mq(Z - Z_{\pm}) - mRu\left(\frac{T}{u} - \frac{T_{\pm}}{u_{\pm}}\right) - \frac{m}{2}(u - u_{\pm})^2; \quad (13)$$

$$DY_x = u(Y - Z); \quad (14)$$

$$Z_x = \frac{-kY}{u}\phi(T). \quad (15)$$

Использование в (12)-(15) констант с двойным нижним индексом “ \pm ” позволяет объединять две системы одинакового вида, получающиеся в зависимости от выбора интервала интегрирования $(-\infty, x)$ или $(x, +\infty)$.

Обозначим $M^2 = u^2 / \gamma RT$ - квадрат числа Маха, где $\gamma = c_p / c_v$ - отношение удельных теплоемкостей. В следующей лемме приводится критерий существования неподвижных точек полного сгорания системы (12)-(15).

Л е м м а 1. Для заданного состояния негорения $P_- = (u_-, T_-, Y_-, Z_-)$ существуют неподвижные точки, соответствующие состояниям полного сгорания системы (2.5)-(2.8), тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$c_p T_- \frac{(M_-^2 - 1)^2}{2(\gamma + 1)M_-^2} \geq qY_-. \quad \square \quad (16)$$

Справедливость утверждения леммы проверяется непосредственно. Число положений равновесия рассматриваемой системы равно числу корней квадратного уравнения, к которому после серии преобразований сводится соответствующая (12)-(15) стационарная система, состоящая из четырех алгебраических уравнений относительно переменных u, T, Y, Z . Таким образом, неравенство (16) представляет собой условие неотрицательности дискриминанта этого уравнения.

Замечание 1. Случай $M_-^2 > 1$ соответствует детонации, $M_-^2 < 1$ соответствует дефлаграции. Строгое неравенство в (16) влечет существование состояния полного сгорания (положения равновесия) $P^* = (u^*, T^*, 0, 0)$, для которого $M^{*2} < 1$, соответствующего сильной детонации или слабой дефлаграции, и состояния $P_* = (u_*, T_*, 0, 0)$, для которого $M_*^2 > 1$, соответствующего слабой детонации или сильной дефлаграции. Равенство в (16) влечет существование единственного состояния полного сгорания с числом Маха - единица, соответствующего точке детонации или дефлаграции Chapman-Jouget.

Далее, полагая $(u_+, T_+, Y_+, Z_+) = (u^*, T^*, 0, 0)$, приведем уравнения системы (12)-(15) к безразмерным в соответствии с таблицей.

Величина	Единицы измерения	Скалярный множитель
x	m	u^* / k
u	mc^{-1}	u^*
T	K	T^*
Z	1	
Y	1	
μ	$кг м/с^1$	mu^* / k
λ	$кг м^3/с^{-3} K^{-1}$	$c_p mu^* / k$
D	$м^2/с^{-1}$	u^{*2} / k
t	$кг / с^{-1}$	
R, c_p, c_v	$м^2/с^{-2} K^{-1}$	
k	$с^{-1}$	
q	$м^2/с^{-2}$	$c_p T^*$

Безразмерная величина получается из исходной делением на ее относительное значение и снабжена нижним индексом 0. После выполнения подстановки и преобразований, с учетом используемой замены $\phi_0(T_0) = \phi(T_0 T^*)$, получается следующая система:

$$\mu_0 \frac{du_0}{dx_0} = u_0 - 1 + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \left(\frac{T_0}{u_0} - 1 \right); \quad (17)$$

$$\lambda_0 \frac{dT_0}{dx_0} = T_0 - 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T_0 - u_0) + q_0 Z - \frac{(\gamma - 1) M^{*2}}{2} (u_0 - 1)^2; \quad (18)$$

$$D_0 \frac{dY}{dx_0} = u_0 (Y - Z); \quad (19)$$

$$\frac{dZ}{dx_0} = -\frac{Y}{u_0} \phi_0(T_0). \quad (20)$$

Полученная система - сингулярно возмущенная, поскольку параметры μ_0, λ_0, D_0 обычно очень малы. Действительные величины этих параметров в данной задаче определяются с помощью таблицы. Далее всюду используются безразмерные величины, поэтому нижний индекс "0" опускается. Для неподвижных точек безразмерной системы сохраняются обозначения P^*, P^*, P^* ; очевидно, что $P^* = (1, 1, 0, 0)$.

3. Геометрическая теория сингулярных возмущений

Ниже приведены необходимые результаты из [2], [5], на которые опирается настоящее исследование в пп. 4, 5. Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y); \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y); \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$ - мало, $(x, y) \in R^{m+k}$. Предполагается, что $f: R^{m+k} \rightarrow R^m$, $g: R^{m+k} \rightarrow R^k$ - это C^r -функции от (x, y) с $r \geq 2$; t - независимая переменная. Система (21) называется медленной задачей. Переходя к переменной $\tau = t / \varepsilon$, получим эквивалентную быструю задачу

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f(x, y); \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (21) и (22), получаем приведенную задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y); \\ 0 &= g(x, y) \end{aligned} \quad (23)$$

и задачу погранслоя

$$\begin{aligned} x' &= 0; \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \quad (24)$$

Основная идея состоит в том, чтобы получить решения (21) как гладкие возмущения составных траекторий предельных задач (23) и (24). Сделаем следующие предположения.

(i) Уравнение $g(x, y) = 0$ имеет гладкое многообразие решений. Пусть C - подмногообразие этого многообразия, которое задается в виде графика функции $h \in C^r$, $h: U \subset R^m \rightarrow R^k$ ($C = \{(x, y) \in R^{m+k} : y = h(x), x \in U\}$).

(ii) Существуют целые числа k_s, k_u , такие, что $k = k_s + k_u$, и у матрицы $\frac{\partial g(x, h(x))}{\partial y}$ имеется k_s собственных значений с отрицательной вещественной частью, равномерно отделенной от нуля, и k_u собственных значений с положительной вещественной частью, также равномерно отделенной от нуля, $\forall x \in U$.

Рассмотрим следующие утверждения в соответствующей окрестности V многообразия C . При выполнении условий (i), (ii) приведенная задача (23) определяет поток на C . Кроме того, C - инвариантное многообразие неподвижных точек (положений равновесия) для потока, определяемого (24). Обозначим k_s -мерное локально - устойчивое многообразие $q \in C$ через $F^s(q)$ и аналогично k_u -мерное локально - неустойчивое многообразие через $F^u(q)$. В [2] показано,

что при достаточно малых ε локально-инвариантное центральное многообразие C_ε с $(m+k_s)$ -мерным центральным устойчивым многообразием C_ε^s и с $(m+k_u)$ -мерным центральным неустойчивым многообразием C_ε^u является возмущением многообразия C . Поток на C_ε - регулярное возмущение приведенной задачи на C . Более того, существуют инвариантные расслоения (листья) C_ε^s и C_ε^u на k_s -мерные многообразия $F_\varepsilon^s(q)$ и k_u -мерные многообразия $F_\varepsilon^u(q)$, $q \in C_\varepsilon$, соответственно. Эти многообразия $(r-1)$ раз непрерывно дифференцируемы по ε , даже при $\varepsilon = 0$ (детальное изложение этого материала приведено в [2]). В настоящем исследовании для заданного потока приходится иметь дело с компактными многообразиями M с границей ∂M . Результаты из теории инвариантных многообразий применимы для многообразия с границей $\overline{M} = M \cup \partial M$, если

- 1) \overline{M} отрицательно (положительно) инвариантно;
- 2) траектории, имеющие общие точки с ∂M , пересекают ∂M трансверсально (далее это условие каждый раз явно не упоминается, однако подразумевается, что его выполнение было достигнуто стандартной локальной модификацией потока в окрестности ∂M).

Пусть $p \in C$ - гиперболическая неподвижная точка (23). Пусть $\Gamma^s(p)$ и $\Gamma^u(p)$ обозначают локально устойчивое и неустойчивое многообразия точки p для приведенной задачи. Определим сингулярное устойчивое и неустойчивое многообразия следующим образом:

$$W^s(p) = \bigcup_{q \in \Gamma^s(p)} F^s(q); \quad W^u(p) = \bigcup_{q \in \Gamma^u(p)} F^u(q); \quad (25)$$

Из [2] следует, что при малых ε устойчивое многообразие $W_\varepsilon^s(p)$ гиперболической неподвижной точки p системы (21) является гладким возмущением $W^s(p)$. Аналогично, неустойчивое многообразие $W_\varepsilon^u(p)$ является гладким возмущением $W^u(p)$. Обычно многообразие решений уравнения $g(x,y)=0$ имеет несколько ветвей.

Теорема 2. Пусть для системы (21) выполнены следующие предположения:

- 1) C_1, C_2 - многообразия решений $g(x,y)=0$, удовлетворяющие условиям (i), (ii);
- 2) $p_1 \in C_1$ - гиперболическая неподвижная точка (23) с неустойчивым многообразием Γ_1^u , $p_2 \in C_2$ - гиперболическая неподвижная точка (23) с устойчивым многообразием Γ_2^s ;
- 3) точки $q_1 \in \Gamma_1^u$ и $q_2 \in \Gamma_2^s$ соединены гетероклинической траекторией η системы (24);
- 4) $\gamma_1 \in \Gamma_1^u$ - отрезок решения (23), соединяющий p_1 и q_1 , $\gamma_2 \in \Gamma_2^s$ - отрезок решения (23), соединяющий q_2 и p_2 ; зададим траекторию $\omega = \gamma_1 \cup \eta \cup \gamma_2$;
- 5) сингулярное неустойчивое многообразие $W^u(p_1)$ и сингулярное устойчивое многообразие $W^s(p_2)$ пересекаются трансверсально и локально единственно вдоль траектории ω .

Тогда при малых ε существует локально единственная гетероклиническая траектория ω_ε системы (21). Траектория ω_ε имеет пограничный (переходный) слой и равномерно близка к ω . \square

Теорема следует из гладкой зависимости многообразий от ε и устойчивости трансверсального пересечения к малым возмущениям. Если сингулярное устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально по s -мерному многообразию D сингулярных гетероклинических траекторий, то тогда при малых ε существует локально единственное s -мерное многообразие D_ε гетероклинических траекторий системы (21). В подходящей параметризации ω_ε равномерно сходится к ω по норме C^l , вне окрестности расположения пограничного слоя.

Замечание 2. Определенная в четвертом условии теоремы 2 траектория ω называется сингулярной траекторией, соединяющей p_1 и p_2 . Допускается, что $p_1=q_1$ или $p_2=q_2$. Очевидно, что $\eta \subset W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Введем следующую параметризацию траекторий γ_1 и γ_2 : $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, $t \in R_0^-$; $\gamma_2 = \gamma_2(t)$, $t \in R_0^+$, причем $\gamma_1(0) = q_1$, $\gamma_2(0) = q_2$.

Пусть ν - многообразие, пересекающее η трансверсально. Введем параметризацию траектории ω_ε : $\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon(t)$, $t \in R$, $\omega_\varepsilon(0) = \omega_\varepsilon \cap \nu$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t < 0; \\ \gamma_2(t), t > 0. \end{cases}$$

Сходимость равномерная в $C^1((-\infty, -\delta])$ и $C^1([\delta, +\infty))$ для $\delta > 0$. \square

Лемма непосредственно следует из установленных в [2] оценок и в настоящей работе приводится без доказательства.

В дальнейшем будет рассмотрена более простая ситуация, попадающая в условия теоремы 2 (в случае $C_1 = C_2$).

Следствие 1. Предположим, что существуют две гиперболические неподвижные точки p_1 и p_2 на многообразии C , которые удовлетворяют условиям (i) и (ii). Допустим, что p_1 и p_2 соединены трансверсальной гетероклинической траекторией ω системы (23). Тогда при малых ε существует гетероклиническая траектория $\omega_\varepsilon \subset C_\varepsilon$ системы (21). Траектория ω_ε не имеет пограничного (переходного) слоя и равномерно близка к ω в норме $C^1(R)$. \square

Обычно в случаях высоких размерностей доказать трансверсальность пересечения сингулярного устойчивого и неустойчивого многообразий трудно. В [5] приведен аналитический метод доказательства трансверсальности, основанный на применении интеграла Мельникова. Однако, как будет показано далее, для детонационных и дефлаграционных волн условие трансверсальности удовлетворяется тривиальным образом.

4. Структура газодинамических ударов

Вязкие профили газодинамического удара представляют собой гетероклинические траектории уравнений (17), (18). Рассмотрим их как двумерную систему.

$$\begin{aligned} \mu u_x &= u - 1 + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \left(\frac{T}{u} - 1 \right); \\ \lambda T_x &= T - 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T - u) + qZ - \frac{(\gamma - 1)M^{*2}}{2} (u - 1)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что константа $qZ=0$ для нереагирующего газа, однако этот член включен для удобства дальнейшего исследования. При $Z=0$ (26) - это уравнения вязкого профиля, соединяющего состояния (u^*, T^*) и (u^*, T^*) , соответствующие состояниям системы (12)-(15).

Запишем (26) в виде

$$\begin{aligned} \mu \dot{u} &= f(u, T); \\ \lambda \dot{T} &= g(u, T), \end{aligned} \quad (27)$$

где переменной дифференцирования является x . Уравнения $f(u, T)=0$, $g(u, T)=0$ описывают две параболы в плоскости (u, T) , которые обозначим соответственно F и G . Строгое неравенство в (2.9) означает, что при $Z \geq 0$ параболы пересекаются так, как показано на рис. 2. Парабола F задается соотношением

$$T = -\gamma M^{*2} u^2 + u(\gamma M^{*2} + 1). \quad (28)$$

Нули функции (28) - это $u = 0$, $u = \frac{\gamma M^{*2} + 1}{\gamma M^{*2}} = 2u_0$ (u_0 определяется ниже). Значение экстремума (максимума)

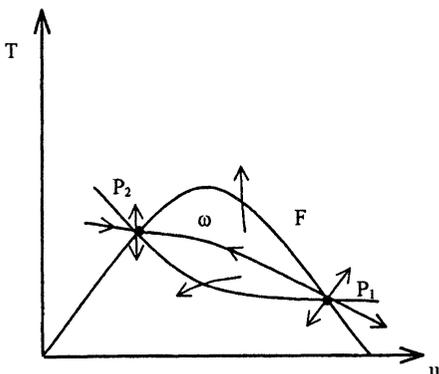
$$T(u_0) = \frac{(1 + \gamma M^{*2})^2}{4\gamma M^{*2}}.$$

Соотношение для G :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma(\gamma - 1)M^{*2}}{2} u^2 - u(\gamma - 1)(\gamma M^{*2} + 1) + \\ &+ (1 - qZ + \frac{(\gamma - 1)M^{*2}}{2})\gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

С ростом значений Z минимум параболы G убывает.

При $u > 0$ и $T > 0$ устанавливаются следующие свойства:



Р и с. 2. Структура взрыва

- (a) $f_T > 0, g_T > 0$;
- (b) существуют ровно две неподвижные точки $P_1=(u_1, T_1)$ и $P_2=(u_2, T_2)$, $u_1 > u_2$;
- (c) $g_u > 0$ на G при $u_2 \leq u \leq u_1$;
- (d) $g_u/g_T < f_u/f_T$ в P_1 , $g_u/g_T > f_u/f_T$ в P_2 ;
- (e) существуют $u_2 < u_0 < u_1$, такие, что $f_u < 0$ при $u < u_0$, $f_u > 0$ при $u > u_0$ на F .

При достаточно больших Z значения T_1 становятся отрицательными, при этом задача утрачивает физический смысл. Свойства (a)-(d) позволяют заключить, что P_1 - неустойчивый узел, P_2 - седло. Более того, все траектории пересекают границу области, заключенной между F и G , во внешнем направлении (т.е. покидают ее).

В [3] показано, что у системы (26) существует трансверсальная гетероклиническая траектория ω , соединяющая неподвижные точки P_1 и P_2 при любых значениях μ и λ . При этом переменные u, T изменяются монотонно вдоль ω .

Если $\mu, \lambda \rightarrow 0$ одновременно, вязкий профиль сходится к ударной волне. Проанализируем предельное поведение вязких профилей в случаях, когда отношения $\lambda/\mu \rightarrow 0, \mu/\lambda \rightarrow 0$. Покажем, как эти ситуации укладываются в рамки изложенной в п. 3 теории. В первом случае представим (27) в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, T); \\ \varepsilon \dot{T} &= g(u, T), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\varepsilon = \lambda/\mu$ - мало. Итак, (30) имеет вид (21), свойство (a) означает, что условия (i), (ii) п. 3 выполнены на компактных сегментах $C \subset G$. Соответствующая приведенная задача одномерная и имеет (сингулярную) гетероклиническую траекторию ω , соединяющую P_1 и P_2 , как показано на рис. 3. На рис. 3 и 4 траектории приведенной задачи обозначены одной стрелкой, траектории задачи погранслоя обозначены двойными стрелками.

Условие трансверсальности следствия 1 выполнено тривиальным образом, следовательно, существует трансверсальная гетероклиническая траектория ω_ε системы (30), равномерно близкая к ω при малых ε .

Во втором случае представим (27) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= f(u, T); \\ \dot{T} &= g(u, T), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\varepsilon = \mu/\lambda$ - мало. В данном случае многообразием приведенной задачи является парабола F , однако условия (i), (ii) п. 3 выполняются лишь для u , отделенных от u_0 , в силу свойства (e). Таким образом, приведенная задача определена на компактных сегментах C_1 и C_2 , расположенных на левой и правой ветвях параболы F (см. рис. 4). P_1 и P_2 - неустойчивые неподвижные точки одномерной приведенной задачи на C_1 и C_2 , соответственно. Легко видеть, что в этой ситуации существует трансверсальная гетероклиническая траектория ω , поскольку каждая точка на C_1 соединена с точкой (P_2) на C_2 (горизонтальной) гетероклинической траекторией соответствующей задачи погранслоя (24). Условие трансверсальности теоремы 2 выполнено тривиальным образом, из чего делается вывод о существовании трансверсальной гетероклинической траектории системы (31) ω_ε , равномерно близкой к ω при малых ε .

5. Детонационные и дефлаграционные волны

В этом пункте рассмотрим систему (17)-(20) при малых μ, λ, D с фиксированными отношениями Pr и Le , т.е. полагаем $\mu = \varepsilon \hat{\mu}, \lambda = \varepsilon \hat{\lambda}, D = \varepsilon \hat{D}$, где ε - мало, $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}$ - положитель-

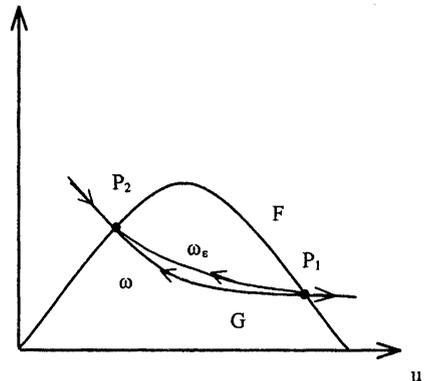


Рис. 3. Случай $\lambda/\mu \rightarrow 0$

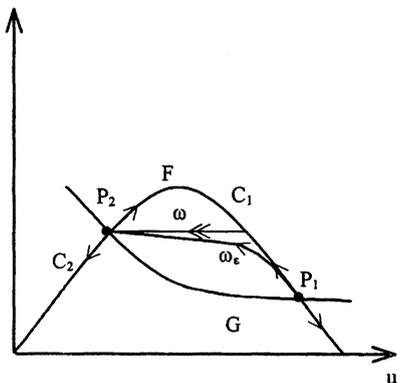


Рис. 4. Случай $\mu/\lambda \rightarrow 0$

ные константы. Предположим, что $\phi(T)$ - гладкая функция с температурой воспламенения T_i , т.е. $\phi(T) = 0$ при $T \leq T_i$. Таким образом, имеем систему

$$\varepsilon \hat{u}_x = u - 1 + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \left(\frac{T}{u} - 1 \right); \quad (32)$$

$$\varepsilon \hat{\lambda} T_x = T - 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T - u) + qZ - \frac{(\gamma - 1) M^{*2}}{2} (u - 1)^2; \quad (33)$$

$$\varepsilon \hat{D} Y_x = u(Y - Z); \quad (34)$$

$$Z_x = -\frac{Y}{u} \phi(T). \quad (35)$$

Система (32)-(35) имеет форму (21), переменная Z - медленная, u, T, Y - быстрые переменные. Следовательно, к ней применима изложенная в п. 3 теория. С математической точки зрения данные уравнения определяют гладкую динамическую систему в фазовом пространстве $R^+ \times R \times R \times R$, причем следует помнить, что физический смысл имеют лишь $T > 0$ и $Y \in [0, 1]$. Полагая $\varepsilon = 0$, получим приведенную систему вида

$$0 = u - 1 + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \left(\frac{T}{u} - 1 \right); \quad (36)$$

$$0 = T - 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T - u) + qZ - \frac{(\gamma - 1) M^{*2}}{2} (u - 1)^2; \quad (37)$$

$$0 = u(Y - Z); \quad (38)$$

$$Z_x = -\frac{Y}{u} \phi(T). \quad (39)$$

Уравнениями (36)-(38) определяют одномерное многообразие C , а уравнением (39) - поток. Уравнение (36) не зависит от Y, Z , а (37) не зависит от Y . Так как $u > 0$, из (38) следует, что $Y = Z$. Это позволяет изобразить C в трехмерном пространстве (u, T, Z) . На плоскости (u, T) уравнение (36) определяет параболу F из п. 4, в пространстве же (u, T, Z) им задается цилиндр P с поперечным сечением F для каждого $Z \in R$. Следует отметить, что параболу F и, следовательно, цилиндр P соответствуют линии Рэлея на рис. 1. Исключим u^2 в (37) при помощи соотношения

(36). Из (36) следует, что $M^{*2} u^2 = \frac{1}{\gamma} (u(\gamma M^{*2} + 1) - T)$. Окончательно

$$0 = T \frac{\gamma + 1}{2\gamma} + u \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 + \gamma M^{*2}) + qZ - 1 - \frac{(\gamma - 1) M^{*2}}{2}. \quad (40)$$

Это уравнение описывает плоскость K , на которой значения T убывают с ростом u и Z . Таким образом, P и K пересекаются по параболе C , как показано на рис. 5. Очевидно, что все неподвижные точки (32)-(35) должны лежать на C . В силу (16) координата Z вершины параболы C находится в точке $Z = Z_0 < 0$ (для процесса Шарпан-Жуэга $Z_0 = 0$). Выберем компактные сегменты C_1, C_2 на каждой из ветвей гладкого одномерного многообразия C , которые вдали от вершины параметризуются посредством Z следующим образом:

$$C_k = \{u_k(Z), T_k(Z), Z, Z: Z \in I\}, k=1,2.$$

Замкнутый интервал I следует выбирать так, чтобы $u_2(Z)$ было отделено от нуля. Система погранслоя с быстрой независимой переменной $\xi = x / \varepsilon$ имеет вид

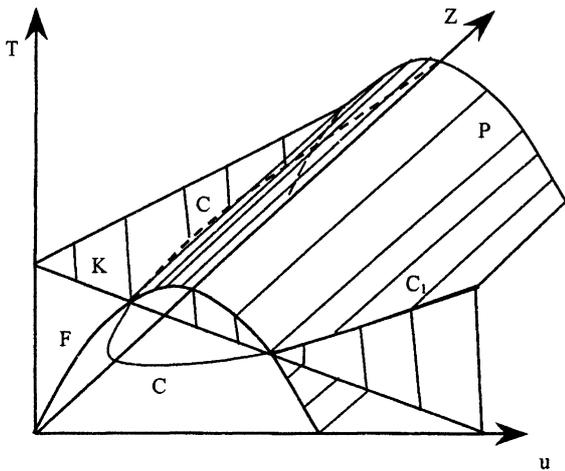
$$\hat{u}_\xi = u - 1 + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \left(\frac{T}{u} - 1 \right); \quad (41)$$

$$\hat{\lambda} T_\xi = T - 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (T - u) + qZ - \frac{(\gamma - 1) M^{*2}}{2} (u - 1)^2; \quad (42)$$

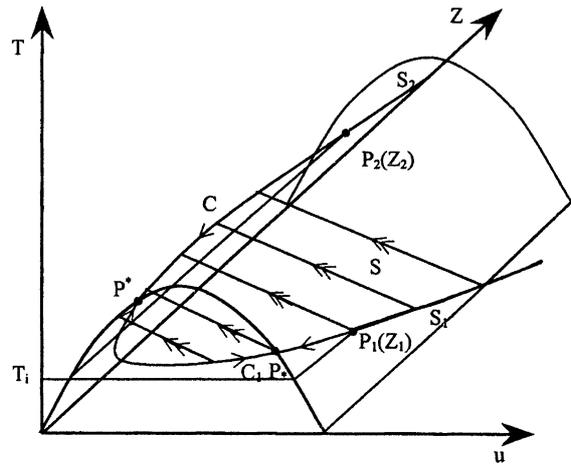
$$\hat{D} Y_\xi = u(Y - Z); \quad (43)$$

$$Z_\xi = 0. \quad (44)$$

Задача погранслоя - это задача газодинамического удара (26), к которой добавлено тривиальное уравнение (43), что дает дополнительную неустойчивую размерность l , так как $u > 0$. На основании полученных в п. 4 результатов заключаем, что все точки $P_1 \in C_1$ - неустойчивые узлы системы (41)-(43) с трехмерными неустойчивыми многообразиями $F^u(P_1)$. Все точки $P_2 \in C_2$ - седловые точки системы (41)-(43) с одномерными устойчивыми многообразиями $F^s(P_2)$ и двумерными неустойчивыми многообразиями $F^u(P_2)$. При $Z \in I$ вещественные части соответствующих собственных значений линеаризации равномерно отделены от нуля. Таким образом, условия (i), (ii) п. 3 выполнены на C_1, C_2 , следовательно, применима изложенная теория инвариантных многообразий. Из леммы 1 следует, что при $Z \in I$ каждая точка $P_1(Z) \in C_1$ соединена с точкой $P_2(Z) \in C_2$ гетероклинической траекторией $\omega(Z)$ системы (41)-(43). Компоненты u, T траектории $\omega(Z)$ образуют вязкий профиль газодинамического удара, соединяющего $(u_1(Z), T_1(Z))$ и $(u_2(Z), T_2(Z))$, координата $Y=Z$ постоянна. Таким образом, существует гладкое двумерное многообразие S траекторий, соединяющих C_1 и C_2 (рис. 6).



Р и с. 5. Фазовое пространство



Р и с. 6. Сингулярные инвариантные многообразия

Следующим шагом в построении сингулярных детонационных и дефлаграционных волн является анализ приведенной задачи (36)-(39), а также изучение одномерного уравнения

$$Z_x = -\frac{Z}{u_k(Z)} \phi(T_k(Z)), \quad (45)$$

где $k=1,2$. Неподвижные точки уравнения (45) должны удовлетворять равенствам $Z=0$ или $\phi(T_k(Z))=0, k=1,2$. Ясно, что при $Z=0$ имеем неподвижные точки $P^* \in C_1$ и $P^* \in C_2$. Величина $\phi(T_k(Z))=0$, как только $T_k(Z) \leq T_i, k=1,2$. На C_1 температура - строго убывающая функция Z , следовательно, существует не более одного решения Z_1 уравнения $T_1(Z)=T_i$ и $\phi(T_1(Z))=0$ при $Z \geq Z_1$. В этом пункте предполагается существование такого $Z_1 > 0$. На C_2 температура - строго убывающая функция Z тогда и только тогда, когда точка P^* лежит слева от вершины параболы F в плоскости (u, T) . Это выполняется при $\gamma M^{*2} < 1$. В случае $\gamma M^{*2} > 1$

температура на C_2 возрастает до максимального значения $\frac{(1 + \gamma M^{*2})^2}{4\gamma M^{*2}}$ в вершине P и убывает

при больших значениях Z . Следовательно, уравнение $T_2(Z)=T_i$ имеет либо одно, либо два решения $Z_2 > 0$. Рассмотрим случай единственного решения $Z_2 > 0$. Поскольку $T_2(Z) > T_1(Z)$, заключаем, что $Z_2 > Z_1$. Проводя эти рассуждения, предполагаем, что интервал I выбран достаточно широким, чтобы отрезок $[0, Z_2]$ содержался внутри I . Таким образом, имеем ситуацию, показанную на рис. 7. На C_1 (45) имеет гиперболическую притягивающую неподвижную точку P^* и континуум (обязательно негиперболических) неподвижных точек $S_1 = \{P_1(Z): Z \in I, Z \geq Z_1\}$. Поскольку на C_1 нет других неподвижных точек, точка $P_1(Z_1)$ соединена с P^* гетероклинической траекторией (36)-(39). Ситуация на C_2 аналогична. Существо-

ет континуум неподвижных точек $S_2 = \{P_2(Z): Z \in I, Z \geq Z_2\}$? и точка $P_2(Z_2)$ соединена с притягивающей гиперболической неподвижной точкой P^* гетероклинической траекторией (36)-(39).

Заданное состояние негорения P при $M_-^2 > 1$ лежит на S_1 и на S_2 при $M_-^2 < 1$. Однако ясно, что P не является некой особенной неподвижной точкой (32)-(35). Предпочтительней рассматривать P^* как заданное дозвуковое состояние сгорания, которое определяет P^* , S_1 , S_2 . Тогда все точки на S_1 - возможные начальные состояния для детонационных волн с состояниями сгорания P^* или P^* , все точки на S_2 - возможные начальные состояния для дефлаграционных волн с состояниями сгорания P^* или P^* . Следующая теорема обобщает вышеприведенные рассуждения.

Теорема 3. Пусть $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}$ - положительные константы в системе (32)-(35). Предположим, что $\phi(T)$ - гладкая функция с температурой воспламенения T_i , т.е. $\phi(T) = 0$ при $T \leq T_i$. Пусть $C_k = \{u_k(Z), T_k(Z), Z, Z: Z \in I\}$, $k=1,2$ - компактные сегменты гладкого одномерного многообразия C , определяемого уравнениями (36)-(38), причем I - замкнутый интервал, такой, что $u_2(Z)$ отделено от нуля. Предположим, что существуют $Z_1 > 0$, такое, что $T_1(Z_1) = T_i$, и единственное $Z_2 > 0$, такое, что $T_2(Z_2) = T_i$. Пусть отрезок $[0, Z_2] \subset I$. Тогда существуют следующие сингулярные гетероклинические траектории (32)-(35):

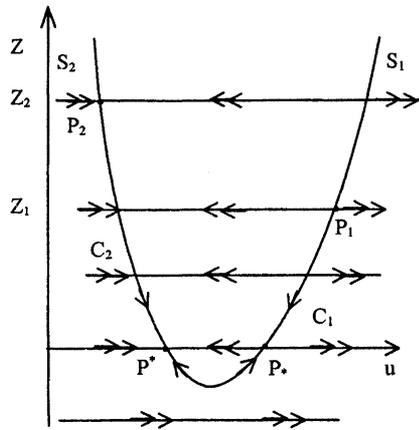
- (i) точка P^* соединена с P^* гетероклинической траекторией (41)-(44);
- (ii) точка $P_1(Z_1)$ соединена с P^* гетероклинической траекторией (36)-(39);
- (iii) существует двумерное многообразие D (с границей) сингулярных траекторий из $P_1(Z_1)$ в P^* ; эти траектории состоят из отрезка решения (36)-(39) от $P_1(Z_1)$ до $P_1(Z)$, гетероклинической траектории (41)-(44) из $P_1(Z)$ в $P_2(Z)$ и сегмента решения (36)-(39) от $P_2(Z)$ до P^* для $Z \in (0, Z_1]$; граница D образована сингулярной траекторией, соответствующей $Z = Z_1$, и сингулярными траекториями из (i) и (ii);
- (iv) при $Z_1 < Z < Z_2$ точка $P_1(Z)$ соединена с P^* гетероклинической траекторией (41)-(44) из $P_1(Z)$ в $P_2(Z)$, за которой следует отрезок решения (36)-(39) от $P_2(Z)$ до P^* ;
- (v) при $Z \geq Z_2$ точка $P_1(Z)$ соединена с $P_2(Z)$ гетероклинической траекторией (41)-(44);
- (vi) точка $P_2(Z_2)$ соединена с P^* гетероклинической траекторией (36)-(39); все эти сингулярные траектории лежат на многообразии S ; других сингулярных траекторий нет. \square

Данная ситуация изображена на рис. 7. В случаях (iv) и (v) возможно, что $T_1(Z) < 0$, тогда сингулярная траектория утрачивает физический смысл и не исключается лишь для полноты математического описания. Если в теореме заменить гетероклинические траектории задачи погранслоя (41)-(44) на разрывы с конечными скачками по газодинамическим переменным u, T , то в этом случае в ней описываются все решения ZND-модели (3) с состояниями сгорания P^* и P^* . Основная теорема 1 из пункта 1 будет сразу следовать из теоремы 3, если доказать, что гетероклинические траектории (32)-(35) являются возмущениями сингулярных траекторий при достаточно малых ε . Теорема 2 не применима непосредственно, поскольку все неподвижные точки (36)-(39) на S_1, S_2 не являются гиперболическими в силу предположения о температуре воспламенения.

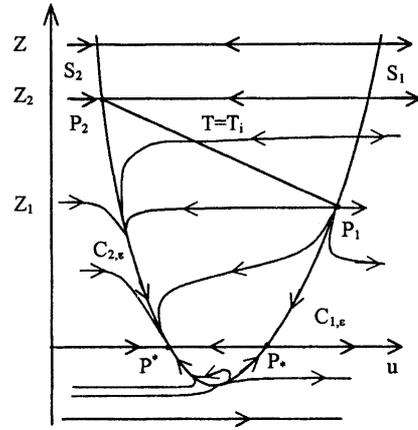
Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}) > 0$, такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для системы (32)-(35) выполняются следующие утверждения:

- (i) P^* и P^* - гиперболические неподвижные точки с двумерным и, соответственно, одномерным устойчивым многообразиями. S_1, S_2 - одномерные многообразия неподвижных точек;
- (ii) гетероклинические траектории системы (32)-(35), соединяющие соответствующие неподвижные точки, являются гладкими возмущениями сингулярных гетероклинических траекторий (i)-(vi) из теоремы 3;
- (iii) все соединяющие траектории лежат на гладком двумерном инвариантном многообразии S_ε , представимом графиком отображения на плоскости (u, T) . Поток на S_ε показан на рис. 8. \square

Доказательство теоремы 4. Многообразия C_1, C_2 удовлетворяют условиям (i), (ii) пункта 3, из чего делается вывод о существовании центральных многообразий $C_{i,\varepsilon}$, их устойчивых и неустойчивых многообразий $C_{i,\varepsilon}^s$ и $C_{i,\varepsilon}^u$ и их инвариантных листов $F_{i,\varepsilon}^s$ и $F_{i,\varepsilon}^u$, соответственно,



Р и с. 7. Сингулярные траектории



Р и с. 8. Поток на S_ε

где $i=1,2$; ε - достаточно мало. $C_{1,\varepsilon}^u$ и $C_{2,\varepsilon}^s$ - гладкие возмущения многообразий $C_1^u = \bigcup_{P_1 \in C_1} F^u(P_1)$; $C_2^s = \bigcup_{P_2 \in C_2} F^s(P_2)$. Теорема 3 позволяет сделать заключение, что четырехмерное многообразие C_1^u и двумерное многообразие C_2^s пересекаются трансверсально по двумерному многообразию S (см. рис. 6). Устойчивость трансверсального пересечения доказывает существование гладкого инвариантного многообразия $S_\varepsilon = C_{1,\varepsilon}^u \cap C_{2,\varepsilon}^s$, близкого к S по норме C^l при малых ε . Многообразие S представимо графиком, т.е. $T=T(u, Z)$ и $Y=Z$ на S , таким образом, S_ε - график на плоскости (u, Z) . Рассмотрим вопрос существования гетероклинических траекторий на S_ε . Поскольку P^*, P^* - устойчивые гиперболические неподвижные точки (36)-(39), они должны лежать на $C_{1,\varepsilon}$ и $C_{2,\varepsilon}$ соответственно и удовлетворять утверждению (i), что непосредственно проверяется при помощи вычислений для произвольного ε . Существование (чисто газодинамической) гетероклинической траектории, соединяющей P^* и P^* следует из теоремы 2, если ограничить поток на инвариантное подпространство $Y=Z=0$. Последний аргумент влечет также существование (чисто газодинамических) гетероклинических траекторий, соединяющих $P_1(Z)$ и $P_2(Z)$ при $Z \geq Z_2$. Поскольку S_1, S_2 - множества неподвижных точек системы (32)-(35), они являются инвариантными. Таким образом, результаты из [2] позволяют установить, что справедливы включения $S_1 \subset C_{1,\varepsilon}$ и $S_2 \subset C_{2,\varepsilon}$. Поскольку других неподвижных точек нет, одномерный поток на $C_{1,\varepsilon}$ должен соединять $P_1(Z_1)$ и P^* . Аналогично существует траектория из $P_2(Z_2)$ в P^* на $C_{2,\varepsilon}$. Это доказывает устойчивость к возмущениям траекторий, указанных в (ii), (vi) в теореме 3. Таким образом, область на S_ε , ограниченная траекториями из $P^* \rightarrow P^*$, из $P_1(Z_1)$ в P^* , из $P_2(Z_2)$ в P^* , из $P_1(Z_2)$ в $P_2(Z_2)$ и кривой из неподвижных точек $\{P_1(Z) : Z_1 \leq Z \leq Z_2\}$ инвариантна (рис. 8). Поскольку других неподвижных точек нет, все точки в этой области принадлежат устойчивому многообразию точки P^* , откуда следует утверждение (ii). Это доказывает, что поток имеет вид, указанный на рис. 8, на нем изображен поток на объединении $C_{2,\varepsilon}^s$ и гладкого продолжения S_ε на $C_{1,\varepsilon}^u$; S_ε - это область между $C_{1,\varepsilon}$ и $C_{2,\varepsilon}$. \square

Для заданного состояния негорения P . основной результат из п. 1 следует из леммы 1, теоремы 4 и леммы 2. Слабые детонационные и слабые дефлаграционные волны - это гетероклинические траектории, которые относятся к рассмотренному в следствии 1 типу; они не имеют погранслоев. Сильные детонационные волны относятся к типу, указанному в теореме 2, газодинамический удар соответствует пограничному слою.

Выполненный выше анализ доказывает существование слабых детонационных и слабых дефлаграционных волн с температурой состояния негорения, равной температуре воспламенения. Процессом движет химическая реакция, газодинамические переменные близки к равновесию, сильные детонационные волны с температурой в состоянии негорения ниже порога воспламенения единственны, температура поднимается выше этого порога газодинамическим уда-

ром. Далее реакция продолжается как слабая дефлаграция. Существует однопараметрическое семейство сильных детонационных волн с температурой в состоянии негорения, равной температуре воспламенения. В одном из двух предельных случаев детонационная волна имеет обычную структуру газодинамического удара. Другой предельный случай - это слабая детонация, за которой следует нереактивный газодинамический удар. В промежуточных случаях реакция начинается как слабая детонация, затем газодинамический удар повышает температуру и процесс завершается как слабая дефлаграция.

Далее обсудим монотонность температуры и давления, основываясь на том, что строгая монотонность переменной вдоль сингулярной траектории сохраняется при малых ε . При $\gamma M^{*2} < 1$ температура строго возрастает на всех сингулярных траекториях. Таким образом, температура строго возрастает вдоль всех детонационных и дефлаграционных волн при $\gamma M^{*2} < 1$ и малых ε . При $\gamma M^{*2} > 1$ температура строго возрастает вдоль слабых дефлаграционных волн. Давление строго возрастает вдоль слабых детонационных волн и строго убывает вдоль слабых дефлаграционных волн при малых ε . Следовательно, для сильной детонационной волны давление достигает своего максимума после газодинамического удара (этот пик давления соответствует известному "шипу" Ньюмана).

В настоящем исследовании предполагалось, что $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}$ в (32)-(35) - произвольные положительные константы. Поскольку величины этих констант не оказывают влияния на анализ в п. 5, полученные результаты справедливы и в случаях, когда $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}$ ограничены снизу и сверху положительными константами. Более того, при числах $0 < \alpha < \beta < \infty$ существует константа $\varepsilon_0(\alpha, \beta) > 0$, такая, что утверждения теоремы 4 имеют место при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для всех $\alpha < \hat{\mu} < \beta, \alpha < \hat{\lambda} < \beta$ и $\alpha < \hat{D} < \beta$. В случаях, когда $(\mu, \lambda, D) \rightarrow 0$ вдоль гладкой кривой в пространстве параметра с асимптотически ограниченными отношениями, поступают следующим образом. Полагают $\mu = \varepsilon \hat{\mu}(\varepsilon), \lambda = \varepsilon \hat{\lambda}(\varepsilon), D = \varepsilon \hat{D}(\varepsilon)$, где $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \hat{D}$ - гладкие положительные функции на отрезке $[0, \varepsilon_1]$, где ε_1 - мало. Это дает систему вида (21), где функция g гладко зависит от ε . Теория, кратко изложенная в п. 3, применима в случае, когда правая часть (21) гладко зависит от ε (см. [2], [5]). Соответствующая приведенная задача - это (32)-(35), а задача погранслоя - это (41)-(44), где $\hat{\mu} = \hat{\mu}(0), \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(0), \hat{D} = \hat{D}(0)$, т. е. получается в точности ситуация, проанализированная в п. 5. Простая зависимость правой части g от ε и результаты из [5] означают, что $\exists \varepsilon_0$, такое, что утверждения основной теоремы 1 в п. 1 имеют место при всех $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

При сильных ударах $\hat{\mu}, \hat{\lambda}$ могут зависеть от газодинамических переменных. Если считать $\hat{\mu} = \hat{\mu}(u, T, Y), \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(u, T, Y), \hat{D} = \hat{D}(u, T, Y)$ гладкими функциями, ограниченными снизу и сверху некоторыми положительными константами, все полученные результаты остаются справедливыми, поскольку эти положительные множители в (32)-(35) не меняют геометрию и анализ задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Courant R., Friedrichs K. O. Supersonic Flow and Shock waves // Applied Mathematical Sciences. 21. Springer. New York. 1948.
2. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory // J. Differential Equations. 31. 1979. P. 53-98.
3. Gilbarg D. The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer // Amer. J. Math. 73. 1951. P. 256-274.
4. Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations // Grundlehren Math. Wiss. 258. Springer. New York. Berlin. 1983.
5. Szmolyan P. Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbation problems // J. Differential Equations. 92. 1991. P. 252-281.
6. Wagner D. H. The existence and behavior of viscous structure for plane detonation waves // SIAM J. Math. Anal. 20. 1989 P. 1035-1054.
7. Wagner D. H. Detonation waves and deflagration waves in the one-dimensional ZND-model for high Mach number combustions // IMA-preprint 498. Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, Minneapolis, MN. 1989.
8. Williams F. A. Combustion Theory. Benjamin - Cummings, Menlo Park, CA, 1985.