УДК 517.9

В.Л. Спицын

О МЕТОДЕ РИМАНА – АДАМАРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Построена матрица Римана-Адамара задачи Коши-Гурса. Методом Римана-Адамара получено классическое решение задачи Коши-Гурса для гиперболических уравнений второго порядка в случае, когда матрица коэффициентов имеет комплексно – сопряженные корни.

Рассмотрим в области $D=\{(\xi,\eta)/0\langle\xi\langle\eta\langle1\}$ систему уравнений

$$L[U]=U_{\xi\eta}-\frac{G}{\xi-\eta}\left(U_{\xi}-U_{\eta}\right)-\frac{\mu}{4}U=0, \tag{1}$$

где $U=(U_1, U_2)^{\mathrm{T}}$ – искомый 2×1-вектор, G- заданная над полем вещественных чисел 2×2-матрица; μ - положительное число.

Задача Коши – Гурса. Найти вектор –функцию $U(\xi,\eta)$,удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$U(\xi,\eta)\in C(\overline{D})\cap C^1(D); \tag{2}$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0}\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)^{2G}\left(U_{\xi}-U_{\eta}\right)=\nu(\xi),\ \xi\in J; \tag{3}$$

$$U(0,\eta)=\ (\eta),\ \eta\in\overline{J},\ J=(0,1),$$

где $\nu(t)$, $\varphi(t)$- заданные 2×1 -векторы.

Построение решения поставленной задачи проводится методом Римана- Адамара. Наряду с системой (1) рассмотрим сопряженную с ней по Лагранжу систему

$$\mathrm{M}[\mathrm{V}]=\mathrm{V}_{\xi\eta}+\left[\mathrm{V}\frac{\mathrm{G}}{\xi-\eta}\right]\xi-\left[\mathrm{V}\frac{\mathrm{G}}{\xi-\eta}\right]\eta-\mathrm{V}\frac{\mu}{4}=0. \tag{4}$$

Определение [5]. Матрицей Римана- Адамара поставленной задачи Коши- Гурса для системы (1) будем называть квадратную матрицу второго порядка

$$\mathrm{W}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}\mathrm{R}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0),\eta>\xi_0;\\ \mathrm{H}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0),\eta<\xi_0,\end{cases} \tag{5}$$

где R – матрица Римана системы (1); H – аналитическое продолжение матрицы Римана для задачи Коши- Гурса, если соблюдены следующие условия:

1) каждая строка матрицы W относительно переменных ξ, η является решением системы (4);
2) каждый столбец матрицы W относительно переменных ξ_0, η_0 является решением системы (1);
3) имеют место равенства

$$W(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=E;\quad \frac{\partial}{\partial\xi}[W]+[W]\frac{G}{\eta-\xi}=0\ ;\ \ \eta=\xi_0,$$

где $[W]=\lim\limits_{\varepsilon\to0}[W(\xi,\xi_0+\varepsilon;\ \xi_0,\eta_0)-W(\xi,\xi_0-\varepsilon;\ \xi_0,\eta_0)]$ - скачок функции W на линии $\eta=\xi_0$; E – единичная 2×2 – матрица.

Матрица Римана для системы (1) известна [1]. В рассматриваемом случае она имеет вид

$$R(G)=\sum_{i=1}^{2}G_i\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\lambda i}\Xi_2\left(\begin{matrix}\lambda_i,1-\lambda_i\\1\end{matrix};\ \rho;\mu\tau\right), \tag{6}$$

где $\Xi_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};\,x;y\right)$ - двойной вырожденный гипергеометрический ряд из списка Горна [2];
G_i, λ_i – соответственно идемпотенты и собственные числа матрицы G [3],

$$\rho=\frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)};\quad \tau=\frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{4}.$$

Из анализа матрицы (6) следует, что на линии $\eta=\xi$ она имеет особенность довольно высокого порядка. Поэтому для произвольной точки $(\xi_0,\eta_0)\in D$ необходимо строить аналитическое продолжение на ту часть рассматриваемой области, где $\eta<\xi_0$. Применяя формулу аналитического продолжения для гипергеометрической функции Гаусса [2]

$$F(a,b;c;z)=\Gamma\begin{pmatrix}c, & b-a\\ c-a, & b\end{pmatrix}(-z)^{-a}F\left(a,a+1-c;a+1-b;z^{-1}\right)+$$
$$+\Gamma\begin{pmatrix}c, & a-b\\ c-b, & a\end{pmatrix}(-z)^{-b}F\left(b+1-c,b;b+1-a;z^{-1}\right),$$

после некоторых преобразований получим аналитическое продолжение матрицы Римана (6) вида

$$R(G)=\sum_{i=1}^{2}G_i\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\lambda i}\Xi_2\left(\begin{matrix}\lambda i,1-\lambda i\\ 1\end{matrix};\rho;\mu\tau\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}G_i\Gamma\left(\begin{matrix}1-2\lambda i\\ 1-\lambda i,1-\lambda i\end{matrix}\right)\left[\frac{(\eta-\xi)^2}{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}\right]^{\lambda i}\mathrm{H}_3\left(\begin{matrix}\lambda i,\lambda i\\ 2\lambda i\end{matrix};\frac{1}{\rho};-\mu\tau\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}G_i\Gamma\left(\begin{matrix}1-2\lambda i\\ \lambda i,\lambda i\end{matrix}\right)\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\left[\frac{(\eta_0-\xi_0)^2}{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}\right]^{\lambda i-1}\mathrm{H}_3\left(\begin{matrix}1-\lambda i,1-\lambda i\\ 2-2\lambda i\end{matrix};\frac{1}{\rho};-\mu\tau\right),\tag{7}$$

где функция $\mathrm{H}_3\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \delta\end{matrix};x;y\right)$ – двойной вырожденный ряд из списка Горна [2].

Первую группу слагаемых в правой части разложения (7) используем для построения матрицы Римана-Адамара задачи Коши-Гурса. Представим матрицу $\mathrm{H}(G;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ из формулы (5) в виде

$$\mathrm{H}(G)=\sum_{i=1}^{2}G_i a(\lambda i)\left[\frac{(\eta-\xi)^2}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}\right]^{\lambda i}\mathrm{H}_3\left(\begin{matrix}\lambda i,\lambda i\\ 2\lambda i\end{matrix};\frac{1}{\rho};-\mu\tau\right),\tag{8}$$

где $a(\lambda i)$ – произвольные константы, подлежащие определению.

Потребуем выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[W]+[W]\frac{G}{\xi-\eta}=0,\ \eta=\xi_0.\tag{9}$$

Здесь $[\mathrm{W}]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\mathrm{R}\big|_{\eta=\xi_0+\varepsilon}-.\mathrm{H}\big|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\right]$, $\varepsilon>0$. Выберем сколь угодно малое положительное число ε и изучим поведение матрицы Римана-Адамара в ε-окрестности линии $\eta=\xi_0$. С этой целью разложим входящие в матрицу (7) двойные ряды Ξ_2, H_3 по гипергеометрическим функциям Гаусса

$$\Xi_2\begin{pmatrix} \lambda i,1-\lambda i \\ 1 \end{pmatrix}; \rho; \mu\tau\Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\tau)^n}{(1)_n n!}\; {}_2F_1\begin{pmatrix} \lambda i, 1-\lambda i \\ 1+n \end{pmatrix}; \rho\Bigg); \tag{10}$$

$$\mathrm{H}_3\begin{pmatrix} \lambda i, \lambda i \\ 2\lambda i \end{pmatrix}; \frac{1}{\rho}; -\mu\tau\Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\tau)^n}{(1-\lambda i)_n n!}\; {}_2F_1\begin{pmatrix} \lambda i, \lambda i - n \\ 2\lambda i \end{pmatrix}; \frac{1}{\rho}\Bigg). \tag{11}$$

Можно заметить, что на линии $\eta=\xi$ двойные ряды (10), (11) имеют особенности для любого индекса суммирования n. Более того, особенности носят логарифмический характер при n, равном нулю. Для выделения особенностей воспользуемся в логарифмическом случае тождеством [2]

$$F(a,b;a+b;z) = \Gamma\begin{pmatrix} a+b \\ a,b \end{pmatrix} F(a,b;1;1-z)\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) +$$
$$+\Gamma\begin{pmatrix} a+b \\ a,b \end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n n!}\left[2\psi(1+n)-\psi(a+n)-\psi(b+n)\right](1-z)^n, \tag{12}$$

а в общем случае –

$$F(a,b;c;z) = \Gamma\begin{pmatrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{pmatrix} F(a,b;1-c+a+b;1-z) +$$
$$+\Gamma\begin{pmatrix} c, a+b+c \\ c-a, c-b \end{pmatrix}(1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-z). \tag{13}$$

В терминах функций сравнения, при z стремящемся к единице, тождества (12) и (13) имеют вид, соответственно

$$F(a,b;a+b;z) = -\Gamma\begin{pmatrix} a+b \\ a,b \end{pmatrix}\left[c+1+0(1-z)\ln(1-z) = 0(1-z)\right], \quad c = const;$$

$$F(a,b;c;z) = -\Gamma\begin{pmatrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{pmatrix}\left[1+0(1-z)\right] + 0(1-z)\left[1+0(1-z)\right].$$

Обратимся к формулам (10) и (11). Учитывая показанные выше упрощенные тождества (12) и (13), после некоторых преобразований получим в ε– окрестности линии $\eta=\xi_0$ следующие разложения матриц Римана – R и Римана-Адамара для задачи Коши-Гурса – H:

$$R(G) = \sum_{i=1}^{2} G_i\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\lambda i}\Gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda i, \lambda i \end{pmatrix}\Bigg\{\left[C_1(\lambda i) - \ln(1-\rho) + 0(\varepsilon)\right] +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu\tau)^n}{n(1-\lambda i)_n(\lambda i)_n}\left[1+0(\varepsilon)\right]\Bigg\}; \tag{14}$$

$$\mathrm{H}(G) = \sum_{i=1}^{2} G_i\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\lambda i} a(\lambda i)\Gamma\begin{pmatrix} 2\lambda i \\ \lambda i, \lambda i \end{pmatrix}\left[1+0(\varepsilon)\right]\Bigg\{\left[C_2(\lambda i) - \ln\left(1-\frac{1}{\rho}\right) + 0(\varepsilon)\right] +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu\tau)^n}{n(1-\lambda i)_n(\lambda i)_n}\left[1+0(\varepsilon)\right]\Bigg\}. \tag{15}$$

Подставляя разложения (14) и (15) в условие (9), находим матричный коэффициент

$$a(G)=\sum_{i=1}^{2}G_i\Gamma\begin{pmatrix}\lambda i\\ 2\lambda i,1-\lambda i\end{pmatrix},$$

определяющий матрицу Римана-Адамара для задачи Коши-Гурса

$$\mathrm{H(G)}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{2}\mathrm{G_i}\Gamma\begin{pmatrix}\lambda \mathrm{i}\\ 2\lambda \mathrm{i},1-\lambda \mathrm{i}\end{pmatrix}\left[\frac{(\eta-\xi)^2}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}\right]^{\lambda\mathrm{i}}\mathrm{H}_3\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{i},\lambda\mathrm{i}\\ 2\lambda\mathrm{i}\end{pmatrix};\frac{1}{\varrho};-\mu\tau\Bigg). \tag{16}$$

Пусть матрица G имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_1=\lambda=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$. Преобразуем матрицу Римана-Адамара поставленной задачи Коши-Гурса (5) к виду, допускающему явное разделение на реальную и мнимую части. Это можно сделать, если найти интегральные представления для вырожденных рядов Ξ_2 и H_3.

В самом деле, запишем функции Ξ_2 и H_3 в виде повторных рядов

$$\Xi_2\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix};x;y\Bigg)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!(\gamma)_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma+n)_m}\frac{x^m}{m!}, \tag{17}$$

$$\mathrm{H}_3\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \delta\end{pmatrix};x;y\Bigg)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)^n}{(1-\alpha)_n n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha-n)_m(\beta)_m}{(\delta)_m}\frac{x^m}{m!}. \tag{18}$$

Используя интеграл Эйлера первого рода для бета-функции, формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса [2]

$$\mathrm{F(a,b;c;z)}=\Gamma\begin{pmatrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{b,c-b}\end{pmatrix}\int_0^1\mathrm{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt},\quad \mathrm{Re\,c>Re\,b>0},\quad |\arg(1-\mathrm{z})|<\pi,$$

проверяемое тождество

$$\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\frac{\mathrm{z^n}}{\mathrm{n!(c)_n}}=1+\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\frac{\mathrm{z^{n+1}}}{\mathrm{(c+1)_n(2)_n}},$$

находим искомые интегральные представления рядов (17) и (18) (соответственно):

$$\Xi_2\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{pmatrix};x;y\Bigg)=\Gamma\begin{pmatrix}\gamma\\ \beta,\gamma-\beta\end{pmatrix}\int_0^1\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\Big[1+$$
$$+y(1-t)(1-s)^{\gamma-\beta-1}{}_0F_1(2;y(1-t)s)\Big]dsdt,\qquad \mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\beta>0,\mathrm{Re}\,\alpha<1; \tag{19}$$

$$\mathrm{H}_3\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \delta\end{pmatrix};x;y\Bigg)=\Gamma\begin{pmatrix}\delta\\ \beta,\delta-\beta\end{pmatrix}\int_0^1\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\delta-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\Big[1-$$

$$-y(1-xt)(1-s)^{-\alpha}{}_0F_1(2;-y(1-xt)s)\Big]dsdt,\ \ \mathrm{Re}\,\delta>\mathrm{Re}\,\beta>0,\mathrm{Re}\,\alpha<1. \tag{20}$$

Заметим, что при выводе формул (19) и (20) приходится дважды менять порядок интегрирования и суммирования. Это возможно в силу сходимости соответствующих рядов при $0\le t\le 1$ и $0\le S\le 1$.

Введем обозначения весовых функций

$$V=\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0},\quad h=\frac{(\eta-\xi)^2}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}. \tag{21}$$

Применяя формулы (19) и (20), обозначения (21) и функциональное соотношение для гамма-функции $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$,

$$R(G;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sum_{i=1}^{2}G_i\frac{\sin\pi\lambda i}{\pi}v^{\lambda i}\int_0^1\int_0^1 t^{\lambda i}(1-t)^{\lambda i-1}(1-\rho t)^{-\lambda i}\big[1+$$
$$+\mu\tau(1-t)(1-s)^{\lambda i-1}{}_0F_1(2;\mu\tau(1-t)s)\big]dsdt,\qquad \operatorname{Re}2\lambda i\in(0,1). \tag{22}$$

$$\mathrm{H}(G;\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sum_{i=1}^{2}G_i\frac{\sin\pi\lambda i}{\pi}h^{\lambda i}\int_0^1\int_0^1 t^{\lambda i-1}(1-t)^{\lambda i-1}\left(1-\frac{1}{\rho}t\right)^{-\lambda i}\big[1+$$
$$+\mu\tau\left(1-\frac{1}{\rho}t\right)(1-s)^{-\lambda i}{}_0F_1\left(2;\mu\tau\left(1-\frac{1}{\rho}t\right)s\right)\bigg]dsdt,\quad \operatorname{Re}2\lambda i\in(0,1), \tag{23}$$

получим матрицу Римана- Адамара поставленной задачи Коши-Гурса W(G ;ξ , η; ξ_0, η_0) (формула (5)).

Не ограничивая общности, в наших условиях (с выделением главных ветвей) матрицы (22), (23) можно записать в виде

$$R(G)=\begin{pmatrix}P & Q\\ -Q & P\end{pmatrix};\ \mathrm{H}(G)=\begin{pmatrix}S & T\\ -T & S\end{pmatrix};\ G=\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ -\beta,\alpha\end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $P=P(\alpha,\beta)=\operatorname{Re}R(\lambda)$; $Q=Q(\alpha,\beta)=\operatorname{Jm}R(\lambda)$; $S(\alpha,\beta)=\operatorname{Re}\mathrm{H}(\lambda)$; $T(\alpha,\beta)=\operatorname{Jm}\mathrm{H}(\lambda)$ – вещественные функции вещественных переменных α,β. Они определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{matrix}P\\ Q\end{matrix}\right\}=\frac{V^\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^1\left[\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\gamma_1-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\gamma_1\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\gamma_1+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\gamma_1\end{Bmatrix}\times\right.$$
$$\times t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}(1-\rho t)^{-\alpha}+\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\gamma_2-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\gamma_2\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\gamma_2+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\gamma_2\end{Bmatrix}\times$$
$$\left.\times\mu\tau t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha}(1-\rho t)^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}{}_0F_1(2;\mu\tau(1-t)s)\right]dsdt,$$
$$\beta\ln\frac{V(1-t)}{t(1-\rho t)},\qquad \gamma_2=\beta\ln\frac{V(1-t)(1-s)}{t(1-\rho t)}; \tag{25}$$

$$\left.\begin{matrix}S\\ T\end{matrix}\right\}=\frac{h^\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^1\left[\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\delta_1-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\delta_1\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\delta_1+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\delta_1\end{Bmatrix}\times\right.$$
$$\times t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}+\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\delta_2-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\delta_2\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\delta_2+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\delta_2\end{Bmatrix}\times$$
$$\left.\times\mu\tau t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{-\alpha}(1-s)^{-\alpha}{}_0F_1\left(2;\mu\tau\left(1-\frac{1}{\rho}\right)s\right)\right]dsdt;$$

$$
\delta_1 = \beta \ln \frac{ht(1-t)}{1-\frac{1}{\rho}}, \qquad \delta_2 = \beta \ln \frac{ht(1-t)}{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(1-s)}. \tag{26}
$$

Выведем формулу Римана-Адамара, доставляющую решение поставленной задачи Коши-Гурса при наиболее общих предположениях относительно спектра матрицы системы (1). Для этого поступим следующим образом. Составим векторный аналог тождества Грина для системы (1) [4]:

$$
WL[U] - M[W]U = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[WU_\xi - W_\xi U + 2W\frac{G}{\xi-\eta}U\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[WU_\eta - W_\eta U + 2W\frac{G}{\xi-\eta}U\right]. \tag{27}
$$

Для произвольной точки $(\xi_0, \eta_0) \in D$ проинтегрируем тождество (27) по области $D_1 \subset D$, являющейся суммой областей

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \left\{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \xi_0 - \delta,\ \xi_0 + \delta < \eta < \eta_0,\ \xi + \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} + \delta < \eta\right\};\\
D_3 &= \left\{(\xi,\eta) \mid \xi < 0,\ \xi + \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} - \delta < \eta < \xi_0 - \delta\right\}, \quad \forall\, \varepsilon > \sqrt{2}\delta > 0.
\end{aligned}
$$

Применяя формулу Грина [6], приходим к тождеству

$$
\begin{aligned}
\iint_D \{WL[U] - M[W]U\}\,d\xi d\eta = \frac{1}{2}\int_{\partial D}&\left(WU_\eta - W_\eta U - 2W\frac{G}{\xi-\eta}U\right)d\eta -\\
&-\left(WU_\xi - W_\xi U + 2W\frac{G}{\xi-\eta}U\right)d\xi,
\end{aligned} \tag{28}
$$

где $\partial D = \partial D_2 \cup \partial D_3$ – двусвязный контур, состоящий из восьми отрезков.

Если $U(\xi,\eta)$есть решение поставленной задачи для системы (1), $W(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$- матрица Римана-Адамара поставленной задачи системы (1), то из тождества (28) приходим к сумме восьми интегралов вида

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} J_k = &\int_0^{\xi_0-\xi_1}\left[W(U_\eta - U_\xi) - \left(W_\eta - W_\xi + W\frac{4G}{\xi-\eta}\right)U\right]_{\eta=\xi+\xi_1-\delta} d\xi +\\
&+\int_0^{\xi_0-\xi_1}\left[WU_\xi - W_\xi U + W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\eta=\xi_0-\delta} d\xi - \int_{\varepsilon_1-\delta}^{\xi_0-\delta}\left[WU_\eta - W_\eta U - W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\xi=0} d\eta +\\
&+\int_{\xi_0-\xi_1}^{\eta_0}\left[WU_\eta - W_\eta U + W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\xi=\xi_0-\delta} d\eta + \int_0^{\xi_0-\delta}\left[WU_\xi - W_\xi U + W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\eta=\eta_0} d\xi -\\
&-\int_{\varepsilon_0+\delta}^{\delta_0}\left[WU_\eta - W_\eta U - W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\xi=0} d\eta - \int_0^{\xi_0-\xi 1}\left[WU_\xi - W_\xi U + W\frac{2G}{\xi-\eta}U\right]_{\eta=\xi_0+\delta} d\xi +\\
&+\int_{\xi_0-\xi_1}^{\xi_0-\delta}\left[W(U_\eta - U_\xi) - \left(W_\eta - W_\xi + W\frac{2G}{\xi-\eta}\right)U\right]_{\eta=\xi+\varepsilon_1+\delta} d\xi = 0, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Во всех интегралах, кроме первого и восьмого, в выражении (29) применим интегрирование по частям. Приводя подобные, учитывая свойства матрицы Римана-Адамара и ее обозначение, после преобразований находим формулу Римана-Адамара для получения решения поставленной задачи Коши-Гурса (Дарбу):

$$U(\xi_0,\eta_0;\varepsilon,\delta)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi_0-\varepsilon_1}\left[\mathrm{H}(U_\xi-U\eta)+\left(\mathrm{H}_\eta-\mathrm{H}_\xi+\mathrm{H}\frac{4G}{\xi-\eta}\right)U\right]_{\eta=\xi+\varepsilon_1-\delta}d\xi+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon_1-\delta}^{\xi_0-\delta}\left[\mathrm{H}\left(U_\eta-\frac{G}{\xi-\eta}U\right)\right]_{\xi=0}d\eta+\int\limits_{\xi_0+\delta}^{\eta_0}\left[R\left(U_\eta-\frac{G}{\xi-\eta}U\right)\right]_{\xi=0}d\eta+\frac{1}{2}(RU)\Big|_{(\xi_0-\delta,\xi_0+\varepsilon_1)}+$$

$$+\frac{1}{2}(RU)\Big|_{(\xi_0-\varepsilon_1,\xi_0+\delta)}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0+\varepsilon_1}^{\eta_0}\left[\left(R_\eta+R\frac{G}{\xi-\eta}\right)U\right]_{\xi=\xi_0-\delta}d\eta-\frac{1}{2}(\mathrm{H}U)\Big|_{(\xi_0-\varepsilon_1,\xi_0-\delta)}+\frac{1}{2}(\mathrm{H}U)\Big|_{(0,\varepsilon_1-\delta)}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0-\varepsilon_1}^{\xi_0-\delta}\left[R(U_\xi-U\eta)+\left(R_\eta-R_\xi+R\frac{4G}{\xi-\eta}\right)U\right]_{\eta=\xi+\varepsilon_1+\delta}d\xi=\sum_{k=1}^{9}J_k(\varepsilon,\delta). \tag{30}$$

Заметим, что в формуле Римана-Адамара (30) присутствуют две произвольные сколь угодно малые положительные величины ε и δ, на которые могут налагаться взаимные требования , например, в нашем случае $\delta=\varepsilon^{1+\alpha}$, $\alpha>0$. Это связано с тем, что понятие сходимости несобственных интегралов в смысле главного значения в случае функций двух переменных сводится к нахождению «согласованных» границ областей интегрирования и, следовательно, контуров интегрирования. Точнее, таких контуров, интегралы по которым взаимно компенсировали бы друг друга подобно случаю, рассмотренному в классическом примере Адамара [7].

Подстановкой в формулу (30) матриц R и Н – Римана-Адамара (24), с существенным использованием свойств этих матриц и применением краевых условий (2), (3), предельным переходом, при ε,δ, стремящихся к нулю, получим решение поставленной задачи:

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{2^{2\alpha-1}}{\pi}\int\limits_0^{\xi_0}[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)]^{-\alpha}\begin{pmatrix}S_1 & T_1\\ -T_1 & S_1\end{pmatrix}\nu(\xi)d\xi+\frac{\xi_0^{-\alpha}}{\pi}\int\limits_0^{\xi_0}\eta^{2\alpha}(\eta_0-\eta)^{-\alpha}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}S_2 & T_2\\ -T_2 & S_2\end{pmatrix}\left(\phi'(\eta)+\frac{G}{\eta}\phi(\eta)\right)d\eta+\frac{(\eta_0-\xi_0)^{-\alpha}}{\pi}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\eta^{\alpha}\begin{pmatrix}P_1 & Q_1\\ -Q_1 & P_1\end{pmatrix}\left(\phi'(\eta)+\frac{G}{\eta}\phi(\eta)\right)d\eta. \tag{31}$$

В решении (31) функции S_1 и T_1 определяются следующими формулами:

$$\begin{Bmatrix}S_1\\ T_1\end{Bmatrix}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\nu_1-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\nu_1\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\nu_1+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\nu_1\end{Bmatrix}t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}+\right.$$

$$+\begin{Bmatrix}\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\cos\nu_2-\cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\sin\nu_2\\ \cos\pi\alpha\,\mathrm{sh}\pi\beta\cos\nu_2+\sin\pi\alpha\,\mathrm{ch}\pi\beta\sin\nu_2\end{Bmatrix}\frac{\mu(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}{4}\times$$

$$\left.\times t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}{}_0F_1\left(2;\frac{\mu(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}{4}s\right)\right]dsdt,$$

где $\nu_1=\beta\ln\dfrac{4t(1-t)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)}$, $\nu_2=\beta\ln\dfrac{4t(1-t)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\xi)(1-s)}$.

Во втором интеграле решения (31) функции S_2 и T_2 имеют вид

$$\left.\begin{matrix} S_2 \\ T_2 \end{matrix}\right\} = \int_0^1\int_0^1 \left[\left\{ \begin{matrix} \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\cos\mu_1 - \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\sin\mu_1 \\ \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\cos\mu_1 + \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\sin\mu_1 \end{matrix} \right\} t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{\eta(\eta_0-\xi_0)}{\xi_0(\eta_0-\eta)}t\right)^{-\alpha} + \right.$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\cos\mu_2 - \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\sin\mu_2 \\ \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\cos\mu_2 + \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\sin\mu_2 \end{matrix} \right\} \times \frac{\mu\xi_0(\eta_0-\eta)}{4} t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1} \times$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\eta(\eta_0-\xi_0)}{\xi_0(\eta_0-\eta)}t\right)^{1-\alpha} (1-s)^{-\alpha}\ {}_0F_1\left(2; \frac{\mu(\eta_0-\eta)}{4}\left(1 - \frac{\eta(\eta_0-\xi_0)}{\xi_0(\eta_0-\eta)}t\right)s\right)\right] ds dt,$$

где $\mu_1 = \beta \ln \dfrac{\eta^2 \mathrm{t}(1-\mathrm{t})}{\xi_0(\eta_0-\eta)\left(1 - \dfrac{\eta(\eta_0-\xi_0)}{\xi_0(\eta_0-\eta)}\mathrm{t}\right)}$, $\mu_2 = \beta \ln \dfrac{\eta^2 \mathrm{t}(1-\mathrm{t})}{\xi_0(\eta_0-\eta)\left(1 - \dfrac{\eta(\eta_0-\xi_0)}{\xi_0(\eta_0-\eta)}\mathrm{t}\right)(1-\mathrm{s})}$.

В третьем интеграле формулы (31) функции P_1 и Q_1 определяются следующим образом:

$$\left.\begin{matrix} P_1 \\ Q_1 \end{matrix}\right\} = \int_0^1\int_0^1 \left[\left\{ \begin{matrix} \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\cos\partial_1 - \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\sin\partial_1 \\ \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\cos\partial_1 + \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\sin\partial_1 \end{matrix} \right\} t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0-\eta)}{\eta(\eta_0-\xi_0)}t\right)^{-\alpha} + \right.$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\cos\partial_2 - \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\sin\partial_2 \\ \cos\pi\alpha\ \mathrm{sh}\pi\beta\cos\partial_2 + \sin\pi\alpha\ \mathrm{ch}\pi\beta\sin\partial_2 \end{matrix} \right\} \times \frac{\mu\xi_0(\eta_0-\eta)}{4} t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha} \times$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0-\eta)}{\eta(\eta_0-\xi_0)}t\right)^{-\alpha} (1-s)^{\alpha-1}\ {}_0F_1\left(2; \frac{\mu(\eta_0-\eta)}{4}(1-t)s\right)\right] ds dt,$$

где $\partial_1 = \beta \ln \dfrac{\eta t(1-t)}{(\eta_0-\xi_0)t\left(1 - \dfrac{\xi_0(\eta_0-\eta)}{\eta(\eta_0-\xi_0)}t\right)}$, $\partial_2 = \beta \ln \dfrac{\eta(1-t)(1-s)}{(\eta_0-\xi_0)t\left(1 - \dfrac{\xi_0(\eta_0-\eta)}{\eta(\eta_0-\xi_0)}t\right)}$.

Теорема. Если $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\nu(\xi) \in C^1(J)$, $\varphi(\eta) \in C^2(\bar{J})$, то вектор-функция, определяемая формулой (31), суть классическое решение задачи Коши- Гурса для системы (1) в области D.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреев А.А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения : Сб. науч. тр. пед.ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т. 1980. Вып. 16. С. 9-14.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959.
5. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
6. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Гостехиздат, 1948.
7. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1947.