УДК 517.3:517.956

А.А. Андреев, Е.Н. Огородников

МАТРИЧНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Рассматривается обобщение оператора дробного интегродифференцирования на матричный порядок. Обсуждаются и доказываются некоторые свойства, тождества и утверждения. Указана область приложений матричного интегродифференциального оператора к системам интегральных уравнений абелевского типа и нелокальным краевым задачам для вырождающихся систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Дробным исчислением принято называть область математического анализа, в которой исследуются производные и интегралы произвольного комплексного порядка. Они применяются в самых различных областях естествознания – в физике, механике, химии, биологии и др. Наиболее полную библиографию, охватывающую практически все публикации по дробному исчислению и его применению вплоть до 1986 года, можно найти в монографии С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева [1], а также работах [2 - 6] других авторов, в которых затрагиваются различные прикладные аспекты.

Среди приложений дробного интегродифференцирования особое место занимают вопросы существования, единственности и возможности получить в явном виде решение уравнений и систем уравнений абелевского типа. Как известно [1], именно уравнение Абеля первого рода лежит в основе одной из конструкций дробного интеграла.

Развитие идей и методов в теории дробного исчисления привело к появлению различных обобщений операторов дробного интегродифференцирования (операторы типа Эрдейи-Кобера, Джбрашана, дробные интегралы и производные Вейля и Чженя, операторы со степенно-логарифмическим ядром, операторы М.Сайго и др.) [1].

В данной работе рассматривается обобщение оператора дробного интегродифференцирования на матричный порядок. Введенный одним из авторов статьи [7,8] матричный интегродифференциальный оператор позволяет с единых позиций подойти к вопросу о разрешимости некоторых классов систем интегральных уравнений абелевского типа, среди которых следует особо отметить систему обобщенных уравнений Абеля в связи с ее приложениями, например, к смешанным задачам теории упругости [9 - 12].

Основные определения и некоторые свойства матричного интегродифференциального оператора

Пусть λ - любое комплексное число, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [13], функция $f(x) \in L(a,b)$.

Для оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лувилля используем обозначения [1,6].

$$I_{ax}^{\lambda} f = D_{ax}^{-\lambda} f = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{sign(x-a)}{\Gamma(\lambda)} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{1-\lambda}}, & \operatorname{Re}\lambda > 0; \\ \left(sign(x-a) \dfrac{\partial}{\partial x} \right)^n D_{ax}^{-(n+\lambda)} f, & \operatorname{Re}\lambda \le 0, n = [-\operatorname{Re}\lambda] + 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $[Re\lambda]$ – целая часть числа $Re\lambda$, а значение многозначной функции τ^{λ} при $\lambda=\alpha+\beta i$ выбирается следующим:

$$\tau^{\lambda} = \tau^{a} \left[\cos(\beta \ln \tau) + i \sin(\beta \ln \tau) \right], \quad \tau > 0. \quad (2)$$

Если $a>x$, то вместо $D_{ax}^{-\lambda}$ записывают $D_{xa}^{-\lambda}$. Если $Re\lambda<0$, то, обозначая $-\lambda=\mu$, пишем D_{ax}^{μ}, что представляет собой дробную производную порядка μ.

Известно, что дробный интеграл $D_{ax}^{-\lambda} f$ определен почти всюду на (a,b) и принадлежит классу $L(a,b)$, а интегралы (производные) комплексного порядка λ ($Re\lambda \neq 0$) являются аналитическим продолжением по параметру λ дробных интегралов (производных), определенных первоначально при $Im\lambda=0$ [1].

В случае чисто мнимого порядка дробные производные определяются в соответствии с (1) по формуле

$$D_{ax}^{i\beta} = \frac{sign(x-a)}{\Gamma(1-i\beta)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{i\beta}}. \tag{3}$$

Дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять как $D_{ax}^{-i\beta} = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-(1+\beta i)}$. Таким образом ,

$$I_{ax}^{i\beta} f = D_{ax}^{-i\beta} = \frac{sign(x-a)}{\Gamma(1+i\beta)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x |x-t|^{i\beta} f(t)dt. \tag{4}$$

Подобно формулам (1) определяются операторы со степенно-логарифмическим ядром [14]:

$$J_{ax}^{\lambda,m} \equiv D_{ax}^{-\lambda,m} f = \begin{cases} \dfrac{sign(x-a)}{\Gamma(\lambda)} \displaystyle\int_a^x \frac{\ln^m |x-t|}{|x-t|^{1-\lambda}} f(t)dt & ,\mathrm{Re}\ \lambda > 0,\ m \in N; \\ \left(sign(x-a) \dfrac{\partial}{\partial x} \right)^n \displaystyle\sum_{k=0}^m C_m^k \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+n} \right) D_{ax}^{-(n+\lambda),m-k} f & ,\ \mathrm{Re}\ \lambda \le 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из определения (4) видно, что, например, $D_{ax}^{-\lambda,1} f$ возникает при дифференцировании по параметру λ дробного интеграла (1):

$$\frac{d}{d\lambda} D_{ax}^{-\lambda} f = D_{ax}^{-\lambda,1} f - \psi(\lambda) D_{ax}^{-\lambda} f, \tag{6}$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера [13].

В работах M.Saigo [15 - 17] введены интегральные операторы

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta} f = \begin{cases} \dfrac{sign(x-a)}{\Gamma(\alpha)(x-a)^{\alpha+\beta}} \displaystyle\int_a^x |x-t|^{\alpha-1}\ {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \left| \frac{x-t}{x-a} \right| \right) f(t)dt & ,\mathrm{Re}\ \lambda > 0; \\ \left(sign(x-a) \dfrac{\partial}{\partial x} \right)^n I_{ax}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f & ,\ \mathrm{Re}\ \alpha \le 0,\ n = [-\mathrm{Re}\,\alpha]+1, \end{cases} \tag{7}$$

сводящиеся при $\beta=-\alpha$ к операторам дробного интегродифференцирования (1), где ${}_2F_1$ $(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [13].

Приведем определение и сформулируем некоторые свойства функций от матриц [18-20], используемые в дальнейшем.

Обозначим M_n - множество постоянных матриц порядка n, $\Lambda(G) = \{\lambda_i\}$ – спектр матрицы G: $G \in M_n$; λ_i – собственные значения матрицы G, $\lambda_i \in \boldsymbol{C}$. Пусть $H \subset \boldsymbol{C}$ – произвольная область на комплексной плоскости : $\Lambda(G) \subset H$.

Рассмотрим отображение $f(z)$: $f(z): H \xrightarrow{f} X$, где X, в частности, может быть областью на комплексной плоскости, множеством функций комплексной или действительной переменной, зависящих от $\lambda \in H$ как от параметра, множеством операторов дробного интегродифференцирования D_{ax}^{λ} или их различных обобщений и т.д.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [18] можно определить значение отображения на множестве квадратных матриц [7] :

$$f(G)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\alpha_{kj}(G-\lambda_k E)^{j-1}\psi^k(G), \tag{8}$$

где $\psi^k(\lambda)=\dfrac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}$; $\alpha_{kj}=\dfrac{1}{(j-1)!}\left[\dfrac{f(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k}$,; $j=\overline{1,m_k}$; $k=1,s$.

Очевидно, если $X\subset \boldsymbol{C}$, а $f(z)$ – аналитическая функция, то определение (9) является определением функции от матрицы и при n=2, в частности, дает следующие представления:

$$f(G)=\begin{cases}\dfrac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)+\dfrac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2-\lambda_1}f(\lambda_2), & \lambda_1\neq\lambda_2;\\[2ex] Ef(\lambda)-(G-\lambda E)f'(\lambda), & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda.\end{cases} \tag{9}$$

Л е м м а 1 [18]. Пусть $A\in M_n$, $f(z)$ – аналитическая функция с областью определения $D(f): \Lambda(A)\subset D(f)$. Тогда спектр $\Lambda(B)$ матрицы $B=f(A)$ состоит из чисел $\beta_i=f(\alpha_i)$, $\alpha_i\in\Lambda(A)$.

Л е м м а 2 [18]. Если суперпозиция двух аналитических функций $g(z)=h(f(z))$ определена на спектре матрицы A, то $g(A)=h(f(A))$.

Л е м м а 3 [21]. Пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – некоторые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$ матрицы G, и $\alpha(G)=A$, $\beta(G)=B$. Пусть $\varphi(z)$ – аналитическая функция с областью определения $D(\varphi): \Lambda(A)\cup\Lambda(B)\subset D(\varphi)$. Тогда матрицы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ коммутативны и обе записываются в терминах матрицы G.

Например, для матрицы $A\in M_2: A=\alpha(G)$ с учетом перечисленных свойств и формулы (9) матрица

$$\tau^A=\begin{cases}\dfrac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1-\lambda_2}\tau^{\alpha_1}+\dfrac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2-\lambda_1}\tau^{\alpha_2}, & \lambda_1\neq\lambda_2;\\[2ex] \tau^{\alpha}[E-(G-\lambda E)\ln\tau], & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda,\end{cases} \tag{10}$$

где $\tau>0$, $\alpha_i\in\Lambda(A)$, $\lambda_i\in\Lambda(G)$, i=1,2 , а функции τ^{α_i} при $\alpha_i\in C$ определены в (2).

Дадим теперь определения некоторых специальных символов и функций, зависящих от матричного аргумента или зависящих от матрицы как от параметра.

1. Гамма-функцией $\Gamma(G)$ называется матрица, определяемая для $G\in M_n$ по формулам (8), а если $G\in M_2$, то в соответствии с (9) получим

$$\Gamma(G)=\begin{cases}\dfrac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1-\lambda_2}\Gamma(\lambda_1)+\dfrac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2-\lambda_1}\Gamma(\lambda_2), & \lambda_1\neq\lambda_2;\\[2ex] E\Gamma(\lambda)+(G-\lambda E)\Gamma'(\lambda), & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda,\end{cases} \tag{11}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [13].

Используется также логарифмическая производная гамма-функции , называемая пси-функцией Эйлера [13]:

$$\psi(z)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{12}$$

Соответствующая матрица, например, для $G\in M_2$, определяемая по формулам (9), имеет вид

$$\psi(G)=\begin{cases}\dfrac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1-\lambda_2}\psi(\lambda_1)+\dfrac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2-\lambda_1}\psi(\lambda_2), & \lambda_1\neq\lambda_2;\\[2ex] E\psi(\lambda)+(G-\lambda E)\psi'(\lambda), & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda.\end{cases} \tag{13}$$

2. Символ Похгаммера $(A)_n$, $A\in M_n$ определяется равенством [22]

$$(A)_n = A(A+E)...[A+(n-1)E]=\Gamma(A+nE)\,[\Gamma(A)]^{-1},\; n=1,2,..,\tag{14}$$

где $(A)_0 \equiv E$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

3. Гипергеометрическая функция Гаусса с коммутативными матричными параметрами определяется как сумма ряда [22]

$$_2F_1(A,B;C;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n(B)_n}{n!(C)_n}z^n,\tag{15}$$

который сходится абсолютно при $|z|<1$.

Пусть $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ – аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$ матрицы G. Тогда, используя леммы 1-3 и формулы (8), можно построить аналитическое продолжение матричного ряда (15) на всю комплексную плоскость z с разрезом по лучу $|arg(1\text{-}z)| < \pi$, если использовать интегральное представление гипергеометрической функции Эйлера [13]

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt.\tag{16}$$

Пусть $G\in M_2$, $A=\alpha(G)$, $B=\beta(G)$ и $C=\gamma(G)$. Их собственные значения соответственно $\lambda_i\in\Lambda(G)$, $\alpha_i\in\Lambda(A)$, $\beta_i\in\Lambda(B)$ *и* $\gamma_i\in\Lambda(C)$, причем $Re\,\gamma_i>Re\,\beta_i>0$. Тогда

$$F(A,B;C;z)=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{G-\lambda_2E}{\lambda_1-\lambda_2}F(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1;z)+\dfrac{G-\lambda_1E}{\lambda_2-\lambda_1}F(\alpha_2,\beta_2;\gamma_2;z), & \lambda_1\neq\lambda_2;\\ \\ EF(\alpha,\beta;\gamma;z)+(G-\lambda E)\dfrac{d}{d\lambda}F(\alpha,\beta;\gamma;z)\quad, & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda,\end{array}\right.\tag{17}$$

где $\dfrac{d}{d\lambda}F(\alpha,\beta;\lambda;z)=\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{d\lambda}+\dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{d\lambda}+\dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{d\gamma}{d\lambda}$, причем частные производные гипергеометрической функции по параметрам определяются через ассоциированные гипергеометрические функции [23 - 25].

4. Функцию Миттаг-Леффлера [13] с матричным параметром определим как сумму ряда

$$E_A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[\Gamma(kA+E)]^{-1}z^k,\tag{18}$$

где $Re\,\alpha_i>0$, $\alpha_i\in\Lambda(A)$, а $[\Gamma(kA+E)]^{-1}$ – матрица, обратная к $\Gamma(kA+E)$.
Для матрицы $A\in M_2$,в частности , получим

$$E_A(z)=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{A-\alpha_2E}{\alpha_1-\alpha_2}E_{\alpha_1}(z)+\dfrac{A-\alpha_1E}{\alpha_2-\alpha_1}E_{\alpha_2}(z), & \alpha_1\neq\alpha_2;\\ \\ E\cdot E_\alpha(z)+(A-\alpha E)\dfrac{d}{d\alpha}E_\alpha(z)\quad, & \alpha_1=\alpha_2\equiv\alpha.\end{array}\right.\tag{19}$$

В работах [7,8] определение (8) было распространено на понятие интегродифференциального оператора, являющегося матричным аналогом оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля. В соответствии с определением, данным, например, в [7] для матрицы $G\in M_2$ и вектор-функции (в.ф.) $f(x)=(f_1;f_2)^T\in L(a,b)$, получаем

$$\boldsymbol{D}^G_{ax}f=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{G-\lambda_2E}{\lambda_1-\lambda_2}D^{\lambda_1}_{ax}f+\dfrac{G-\lambda_1E}{\lambda_2-\lambda_1}D^{\lambda_2}_{ax}f, & \lambda_1\neq\lambda_2;\\ \\ ED^{\lambda}_{ax}f+(G-\lambda E)\dfrac{d}{d\lambda}D^{\lambda}_{ax}f\quad, & \lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda.\end{array}\right.\tag{20}$$

Из формул (20) следует, что если $Re\lambda_1$ *и* $Re\lambda_2$ имеют одинаковые знаки, то оператор $\boldsymbol{D}^G_{ax}$ может ассоциироваться с дробным интегралом или дробной производной матричного порядка.

Пусть $Re\lambda_i>0$. Тогда с учетом определений (1) и (8) представление матричного интегрального оператора $\boldsymbol{D}^{-G}_{ax}f$ можно записать в виде

$$D_{ax}^{-G} f = sign(x-a)[\Gamma(G)]^{-1}\int_a^x |x-t|^{G-E} f(t)dt. \tag{21}$$

Формула (21) имеет один и тот же вид при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и при $\lambda_1 = \lambda_2$, однако, с учетом формул (10), (11) и (15) явное представление матричного оператора D_{ax}^{-G} через скалярные операторы при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ будет следующим:

$$D_{ax}^{-G} f = ED_{ax}^{-\lambda} f + (G - \lambda E)\left(D_{ax}^{-\lambda,1} f - \psi(\lambda) D_{ax}^{-\lambda} f\right), \tag{22}$$

где оператор $D_{ax}^{-\lambda,1}$ определен в (5), а $\psi(\lambda)$ определена в (12).

Как и в скалярном случае [1], класс в.ф. $f(x) \in L_p(a,b)$, представимых матричным интегральным оператором D_{ax}^{-G} (22), обозначим $I_{ax}^{-G}(L_p)$.

Таким образом,

$$f(x) \in I_{ax}^{G}(L_p) \Leftrightarrow \exists \varphi(x): \varphi(x) \in L_p(a,b), 1 \le p < \infty \text{ и } f(x) = D_{ax}^{-G}\varphi.$$

Пусть для определенности $Re\lambda_i \in (0,1)$. Подобно скалярному случаю формула

$$D_{ax}^{G} f = sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-(E-G)} f \tag{23}$$

определяет матричный оператор дробного дифференцирования. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то явное представление оператора D_{ax}^{G} через скалярные операторы дается первой формулой в (20), а при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ оно будет следующим:

$$D_{ax}^{G} f = sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\left[ED_{ax}^{-(1-\lambda)} f + (G-\lambda E)(D_{ax}^{-(1-\lambda),1} f - \psi(1-\lambda) D_{ax}^{-(1-\lambda)} f)\right]. \tag{24}$$

Заметим, что определяя дифференциальный оператор D_{ax}^{G} при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ формально равенством (22)

$$D_{ax}^{G} f = sign(x-a)\left[ED_{ax}^{\lambda} f + (G-\lambda E)(D_{ax}^{\lambda,1} f - \psi(-\lambda) D_{ax}^{\lambda} f)\right]$$

и сопоставляя эту запись с формулой (24), получаем явное представление дифференциального оператора $D_{ax}^{\lambda,1}$ через дробные интегралы (см. (4)):

$$D_{ax}^{\lambda,1} f = sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{ax}^{-(1-\lambda),1} f + \frac{1}{\lambda} D_{ax}^{-(1-\lambda)} f\right), \tag{25}$$

где использовано тождество $\psi(-z) - \psi(1-z) = 1/z$ [13].

Лемма 4. (Полугрупповое свойство). Пусть $G \in M_n$; $\alpha(z)$, $\beta(z)$ – любые аналитические функции, определенные на $\Lambda(A) = \{\lambda_i\}$. Пусть $\Lambda(A) = \{\alpha_i\}$ и $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$ – спектры матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ соответственно, причем $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset C_+$. Тогда равенство

$$D_{ax}^{-A} D_{ax}^{-B} f = D_{ax}^{-B} D_{ax}^{-A} f = D_{ax}^{-(A+B)} f \tag{26}$$

выполняется для любой в.ф. $f(x) = (f_1; f_2; ...; f_n)^T \in L(a,b)$.

Доказательство леммы 4. Ограничимся случаем $n=2$. Используя леммы 1-3 и записывая операторы D_{ax}^{-A} и D_{ax}^{-B} по определению (20) в терминах матрицы G, в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получим

$$D_{ax}^{-A} D_{ax}^{-B} f = \frac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{ax}^{-\lambda_1}\left(\frac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{ax}^{-\beta_1} f + \frac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{ax}^{-\beta_2} f\right) + \frac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{ax}^{-\lambda_2} \times$$

$$\times \left(\frac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{ax}^{-\beta_1} f + \frac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{ax}^{-\beta_2} f\right) = \frac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{ax}^{-\lambda_1} D_{ax}^{-\beta_1} f + \frac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{ax}^{-\lambda_2} D_{ax}^{-\beta_2} f =$$

$$= \frac{G-\lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{ax}^{-(\lambda_1+\beta_1)} f + \frac{G-\lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{ax}^{-(\lambda_2+\beta_2)} f = D_{ax}^{-(A+B)} f.$$

Коммутативность матричных интегральных операторов является очевидным следствием коммутативности дробных интегралов в скалярном случае.

В случае $\lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda$ с учетом (20) и (22) имеем

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}f = ED_{ax}^{-\alpha}\left[ED_{ax}^{-\beta}f+(G-\lambda E)\frac{\partial}{\partial\beta}D_{ax}^{-\beta}f\right]+(G-\lambda E)\frac{\partial}{\partial\alpha}D_{ax}^{-\alpha}\times\left[ED_{ax}^{-\beta}f+\right.$$

$$\left.+(G-\lambda E)\frac{\partial}{\partial\beta}D_{ax}^{-\beta}f\right]=ED_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f+(G-\lambda E)\left(D_{ax}^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}D_{ax}^{-\beta}f+\frac{\partial}{\partial\alpha}D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{-\beta}f\right)=$$

$$=ED_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f+(G-\lambda E)\left[D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{-\beta,1}f+D_{ax}^{-\alpha,1}D_{ax}^{-\beta}f-(\psi(\alpha)+\psi(\beta))D_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f\right].$$

Аналогично

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}f=ED_{ax}^{-(\beta+\alpha)}f+(G-\lambda E)\left[D_{ax}^{-\beta,1}D_{ax}^{-\alpha}f+D_{ax}^{-\beta}D_{ax}^{-\alpha,1}f-(\psi(\beta)+\psi(\alpha))D_{ax}^{-(\beta+\alpha)}f\right].$$

Равенство правых частей полученных выражений теперь является следствием коммутативности операторов $D_{ax}^{-\alpha},D_{ax}^{-\beta,1}$ и $D_{ax}^{-\beta},D_{ax}^{-\alpha,1}$ и , следовательно, можно писать

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}f=ED_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f+(G-\lambda E)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}D_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f+\frac{\partial}{\partial\beta}D_{ax}^{-(\alpha+\beta)}f\right),$$

откуда вытекает утверждение леммы и для случая $\lambda_1=\lambda_2$.□

Л е м м а 5. Пусть выполнены все условия леммы 4 , тогда равенство

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}|x-a|^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}|x-a|^{-B}f=\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}|x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}|x-a|^{-A}f \tag{27}$$

выполняется для в.ф. $|x-a|^{-A}f,|x-a|^{-B}f=L(a,b)$ и $\Lambda(A)\cup\Lambda(B)\subset\{z:z\in\boldsymbol{C},Rez\in(0,1)\}$ почти всюду на (a,b).

Приведем доказательство этого свойства для левосторонних операторов с началом в нуле и $A,B\in M_2$.

В условиях леммы 4 матрицы A и B определены как функции от матрицы G. Для матрицы $G\in M_2$ и матриц $A=\alpha(G)$ и $B=\beta(G)$ по определению (20) в случае $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1\in\Lambda(G)$ запишем левую часть равенства (27) при a=0:

$$\frac{G-\lambda_2E}{\lambda_1-\lambda_2}D_{ax}^{-\alpha_1}x^{-\alpha_1}D_{ax}^{-\beta_1}x^{-\beta_1}f+\frac{G-\lambda_1E}{\lambda_2-\lambda_1}D_{ax}^{-\alpha_2}x^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\beta_2}x^{-\beta_2}f, \tag{28}$$

где $\alpha_i\in\Lambda(A)$, $\beta_i\in\Lambda(B)$.

Согласно определению (1) для каждой композиции дробных интегралов в (28) имеем

$$J_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\int_0^x(x-t)^{\alpha_i-1}t^{-\alpha_i}dt\int_0^x(t-s)^{\beta_i-1}s^{-\beta_i}f(s)ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}\times$$
$$\times\int_0^x s^{-\beta_i}f(s)ds\int_0^x(x-t)^{\alpha_i-1}(t-s)^{\beta_i-1}t^{-\alpha_i}dt\quad,\ i=1,2. \tag{29}$$

Полагая во внутреннем интеграле (29) t=x-(x-s)z и воспользовавшись формулой (16) , получим

$$J_1=\frac{x^{-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}\int_0^x(x-s)^{\alpha_i+\beta_i-1}s^{-\beta_i}F\left(\alpha_i,\alpha_i;\alpha_i+\beta_i;\frac{x-s}{x}\right)f(s)ds. \tag{30}$$

Аналогично для правой части равенства (27) найдем

$$J_2=\frac{x^{-\beta_i}}{\Gamma(\alpha_i+\beta_i)}\int_0^x(x-s)^{\alpha_i+\beta_i-1}s^{-\alpha_i}F\left(\beta_i,\beta_i;\alpha_i+\beta_i;\frac{x-s}{x}\right)f(s)ds. \tag{32}$$

После применения формулы автотрансформации [13] следует равенство $J_1=J_2$.□

Замечание 1. В процессе доказательства леммы возникли два интегральных оператора (31) и (32) с гипергеометрической функцией в ядре. Сопоставляя их с оператором M.Saigo (7) , видим, что $J_1=J_2\Leftrightarrow I_{ax}^{\alpha_i+\beta_i,-\beta_i,-\alpha_i}x^{-\beta_i}f=I_{ax}^{\alpha_i+\beta_i,-\alpha_i,-\beta_i}x^{-\alpha_i}f$ и является одним из известных тождеств для операторов этого типа [15].

Замеченное обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение матричный аналог оператора M.Saigo. Запись, дающая его определение , не отличается от (6), если положить в ней $\alpha=\alpha(G)$, $\beta=\beta(G)$, $\eta=\eta(G)$, где $G\in M_n$, а $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\eta(z)$ – произвольные аналитические функции.

В терминах матричного оператора M.Saigo свойство, доказанное в лемме 5 , может быть записано так:

$$I_{ax}^{A+B,-B,-A} x^{-B} f = I_{ax}^{A+B,-A,-B} x^{-A} f\ , \tag{32}$$

где $A=\alpha(G)$, $B=\beta(G)$.

Замечание 2. Часто встречающаяся в нелокальных краевых задачах [26 - 32] композиция интегральных операторов $D_{ax}^{-A} x^{-A} D_{ax}^{-(E-A)}\varphi$ с учетом леммы 5 и замечания к ней может быть записана в терминах матричного оператора M.Saigo. Действительно ,

$$D_{ax}^{-A} x^{-A} D_{ax}^{-(E-A)}\varphi = x^{-A}\int_0^x F\left(A, A; E; \frac{x-s}{x}\right)\varphi(s)ds = I_{ax}^{E,A-E,-A}\varphi\ . \tag{33}$$

Рассмотренные ниже свойства касаются основных композиционных тождеств с интегральными и дифференциальными матричными операторами.

Пусть матрица $A \in M_m$ и обладает следующим спектром:

$$\Lambda(A) = \{\alpha_i : \alpha_i \in C_+, n-1 \le \operatorname{Re}\alpha_i \le n, n \in N\}. \tag{34}$$

В этом случае, обобщая (23), матричный дифференциальный оператор можно определить формулой

$$D_{ax}^{A} f = \left(sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D_{ax}^{-(nE-A)} f\ . \tag{35}$$

Как обычно класс абсолютно непрерывных на отрезке Ω в.ф. $f(x)$ обозначаем $AC(\Omega)$. Известно [33], что он совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций. Через $AC^n(\Omega)$, где n=1,2,... обозначается класс в.ф. таких, что

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) \in C^{n-1}(\Omega) \cap \{f(x) : f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)\}\ .$$

Нижеследующие теоремы отражают основные полугрупповые свойства матричных интегродифференциальных операторов.

Т е о р е м а 1. Пусть матрица $A \in M_m$, а ее спектр $\Lambda(A) \subset C_+$. Тогда равенство

$$D_{ax}^{A} D_{ax}^{-A} f = f(x) \tag{36}$$

выполняется почти всюду на (a,b) для любой в.ф. $f(x) \in L(a,b)$, а равенство

$$D_{ax}^{-A} D_{ax}^{A} f = f(x) \tag{37}$$

- для в.ф. $f(x) \in I_{ax}^{A}(L)$.

Доказательство теоремы 1. В довольно частном , но весьма важном для приложений случае, когда собственные значения матрицы A удовлетворяют условию (35), доказательство теоремы 1 с учетом формулы (35) полностью повторяет аналогичные рассуждения в скалярном случае.

Действительно, равенство (36) немедленно следует из леммы 4, так как

$$D_{ax}^{A} D_{ax}^{-A} f = \left(sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D_{ax}^{-(nE-A)} D_{ax}^{-A} f = \left(sign(x-a)\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D_{ax}^{-nE} f = f(x).$$

Теперь пусть $f(x) \in I_{ax}^{A}(L)$. Тогда существует в.ф. $\varphi(x) \in L(a,b)$: $f(x) \in D_{ax}^{-A}\varphi$ и равенство (38) $D_{ax}^{-A}\left(D_{ax}^{A} D_{ax}^{-A}\varphi\right) = D_{ax}^{-A}\varphi$ становится верным для любой в.ф. $\varphi(x)$ в силу (37).

Если же о спектре матрицы A известно лишь, что $\Lambda(A) \subset C_+$, то для доказательства теоремы нужно обратиться к определению (8).

Ограничиваясь для простоты множеством M_2 , заметим, что формулы (36) и (37) для $\alpha_1 \ne \alpha_2$ являются очевидным следствием аналогичных формул в скалярном случае.

Действительно, используя (20), получим

$$D_{ax}^{-A} D_{ax}^{A} f = \frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2} D_{ax}^{\alpha_1}\left(\frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f + \frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_2} f\right) +$$

$$+\frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1} D_{ax}^{\alpha_2}\left(\frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f + \frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_2} f\right) =$$

$$= \frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2} D_{ax}^{\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_1} f + \frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1} D_{ax}^{\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_2} f = \frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2} f + \frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1} f = f.$$

Так же обосновывается (37) для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ в классе в.ф. $I_{ax}^{A}(L)$.

В случае, когда собственные значения $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, можно указать единичный отрезок, такой, что $\alpha \in [n-1, n]$, $n \in N$. Но в этом случае имеет место формула (35) и справедливы рассуждения, приведенные в начале доказательства.

Теорема доказана.□

Доказанное в теореме 1 свойство (36) матричных интегродифференциальных операторов имеет прямое отношение к проблеме разрешимости систем интегральных уравнений Абеля.

Пусть матрица $A \in M_m$, а ее спектр $\Lambda(A) \subset C_+$.

Систему интегральных уравнений (с.и.у.)

$$D_{ax}^{-A}\varphi = f(x), \tag{38}$$

где $x > a > -\infty$, $\varphi(x)$ и $f(x)$ - m- мерные в.ф., рассматриваемую на конечном отрезке $[a,b]$, будем называть матричным уравнением Абеля первого рода.

Рассмотрим вначале случай, когда $Re\alpha_i \in (0,1)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$.

Действуя, пока формально, оператором D_{ax}^{A} на левую и правую части равенства (38) на основании теоремы 1 и формулы (36), получим

$$\varphi(x) = D_{ax}^{A} f,$$

или, учитывая (23),

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-(E-A)} f. \tag{39}$$

Таким образом, если уравнение (38) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (39) и, следовательно, единственно.

Приведем одно достаточное условие разрешимости уравнения (38) в классе в.ф. $L(a,b)$.

Л е м м а 6. Если $f(x) \in AC([a,b,])$, то и $D_{ax}^{-(E-A)} f \in AC([a,b])$, при этом

$$D_{ax}^{-(E-A)} f = [\Gamma(2E-A)]^{-1}(x-a)^{E-A} f(a) + D_{ax}^{-(2E-A)} f'. \tag{40}$$

Доказательство леммы 6. Так как $f(x) \in AC([a,b,])$, то в.ф. $f(x)$ можно представить так [33]:

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds. \tag{41}$$

Подставляя (41) в левую часть равенства (40), получим

$$D_{ax}^{-(E-A)} f = [\Gamma(2E-A)]^{-1}(x-a)^{E-A} f(a) + [\Gamma(E-A)]^{-1} \int_a^x (x-t)^{-A} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt. \tag{42}$$

Непосредственной перестановкой порядка интегрирования нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_a^x (x-t)^{-A} \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt = \int_a^x \left(\int_a^t (t-s)^{-A} f'(s)ds \right) dt. \tag{43}$$

Очевидно, что первое и второе слагаемые в (42) являются первообразными от суммируемых в.ф. и, следовательно, абсолютно непрерывны. Представление (40) следует из того, что

$$[\Gamma(E-A)]^{-1} \int_a^x \left(\int_a^t (t-s)^{-A} f'(s)ds \right) dt = \int_a^x \left(D_{at}^{-(E-A)} f' \right) dt = D_{ax}^{-E} D_{ax}^{-(E-A)} f'.$$

По лемме 4 $D_{ax}^{-E} D_{ax}^{-(E-A)} f' = D_{ax}^{-(2E-A)} f'$, что и доказывает лемму 6.□

Т е о р е м а 2. Пусть матрица $A \in M_m$, а ее спектр $\Lambda(A) = \{\alpha_i : \alpha_i \in C_+, 0 < \mathrm{Re}\,\alpha_i < 1\}$.

Если $f(x) \in AC([a,b])$, то матричное уравнение Абеля (38) разрешимо в $L(a,b)$, а решение (39) можно представить в виде

$$\varphi(x) = [\Gamma(E-A)]^{-1}(x-a)^{-A} f(a) + D_{ax}^{-(E-A)} f'. \tag{44}$$

Доказательство теоремы 2. Так как в силу леммы 4 $D_{ax}^{-(E-A)} f \in AC[(a,b)]$, то, дифференцируя равенство (40), получим формулу (44). Разрешимость уравнения (38) теперь обосновывается непосредственной подстановкой (44) в (38), что и доказывает теорему. □

Замечание. Пусть для простоты матрица $A \in M_2$. В теореме не охвачены случаи, когда одно или оба собственных значения матрицы A принимают значения 0 или 1. Эти случаи не являются особыми. Как следует из определения (20) они сводятся к очевидным соотношениям между скалярными операторами дробного интегродифференцирования.

Случай, когда спектр матрицы A удовлетворяет условию (34), сводится к рассмотренному дифференцированием обеих частей (38).

Т е о р е м а 3. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условиям леммы 4. Тогда равенство

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{B}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{f}(x) \tag{45}$$

выполняется почти всюду на (a,b) в следующих случаях:

1) $\Lambda(B)\subset \boldsymbol{C}_-, \Lambda(A+B)\subset \boldsymbol{C}_-, f(x)\in L(a,b)$;

2) $\Lambda(B)\subset \boldsymbol{C}_+, \Lambda(A)\subset \boldsymbol{C}_-, f(x)\in \boldsymbol{I}_{ax}^{B}(L)$;

3) $\Lambda(A)\subset \boldsymbol{C}_+, \Lambda(A+B)\subset \boldsymbol{C}_+, f(x)\in \boldsymbol{I}_{ax}^{A+B}(L)$.

Доказательство теоремы 3. 1) усли $\Lambda(A),\Lambda(B)\subset \boldsymbol{C}_-$, то равенство (46) установлено в лемме 4. Пусть $\Lambda(A)\subset \boldsymbol{C}_+$. Тогда учитывая, что $\Lambda(B)\subset \boldsymbol{C}_-$ и $\Lambda(A+B)\subset \boldsymbol{C}_-$, по лемме 4 $\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}_{ax}^{-A+(A-B)} = \boldsymbol{D}_{ax}^{B}\boldsymbol{f}$, откуда, используя (36), получим

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{B}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{A+B} = \boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{f};$$

2) в этом случае существует в.ф. $\varphi(x)\in L(a,b)$: $f(x)=\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\varphi$. Поскольку $\Lambda(-B)\subset \boldsymbol{C}_-$ и $\Lambda(A)\subset \boldsymbol{C}_-$ и, следовательно, $\Lambda(A+B+(-B))\subset \boldsymbol{C}_-$, то согласно первому случаю получим $\boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A+B-B}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{B}\boldsymbol{f}$;

3) в этом случае существует в.ф. $\varphi(x)\in L(a,b)$: $\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{D}_{ax}^{-A-B}\varphi.$ Тогда, замечая, что $\Lambda(B+(-A-B))=\Lambda(-A)\subset \boldsymbol{C}_-$ и $\Lambda(-A-B)\subset \boldsymbol{C}_-$, в соответствии с первым случаем и (36), получим $\boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{B}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A-B}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{B-A-B}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\varphi = \varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A+B}\boldsymbol{f}$.

Теорема доказана.□

Замечание. В теореме допустимы случаи $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ и $\alpha_i + \beta_i = 0$, при $\alpha_i, \beta_i \in R$, $\alpha_i \in \Lambda(A), \beta_i \in \Lambda(B)$, а при некоторых дополнительных требованиях и случаи, когда $Re\beta_i = 0, Re\alpha_i > 0$; $Re\alpha_i = 0, Re\beta_i < 0$; $Re(\alpha_i + \beta_i) = 0, Re\beta_i > 0.$

Т е о р е м а 4. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условиям леммы 4. Пусть $Re\alpha_i \in [0,1]$, $Re\beta_i > 0, |Re(\alpha_i - \beta_i)| < 1$. Тогда формула

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{A}|x-a|^{A-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\boldsymbol{f} = |x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{A-B}|x-a|^{A}\boldsymbol{f} \tag{46}$$

справедлива для $\boldsymbol{f}(x)\in L(a,b)$.

Доказательство этой теоремы в $L(a,b)$ достаточно громоздко и мы его здесь не приводим. В скалярном случае тождество (46) доказано, например, в [6]. В монографии [1] приведены и другие весовые формулы композиций трех интегродифференциальных операторов.

Приведем здесь простое доказательство формулы (47) в классе в.ф. $|x-a|^{A}\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{I}_{ax}^{A}(L)$.

Доказательство теоремы 4. Если $|x-a|^{A}\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{I}_{ax}^{A}(L)$, то существует вектор-функция $\varphi(x)\in L(a,b)$: $\boldsymbol{f}(x)=|x-a|^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\varphi.$ Подставляя $f(x)$ в равенство (46) и учитывая лемму 5 и теорему 3, получим

$$\boldsymbol{D}_{ax}^{A}|x-a|^{A-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}|x-a|^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}|x-a|^{A}|x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}|x-a|^{-A}\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}\varphi = \boldsymbol{D}_{ax}^{A}|x-a|^{A}|x-a|^{-A}\times$$
$$\times\boldsymbol{D}_{ax}^{-A}|x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\varphi = |x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\varphi = |x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{A}|x-a|^{A}\boldsymbol{f} = |x-a|^{-B}\boldsymbol{D}_{ax}^{A-B}|x-a|^{A}\boldsymbol{f}.$$

Теорема доказана.□

Следствия.

1. Если в (46) положить $B=E-A$,получим матричный аналог известного при $a=0$ [34] тождества $\boldsymbol{D}_{ax}^{A}x^{2A-E}\boldsymbol{D}_{ax}^{-(E-A)}\boldsymbol{f} = x^{-(E-A)}\boldsymbol{D}_{ax}^{2E-A}x^{A}\boldsymbol{f}$, справедливого для любых $\alpha_i : Re\alpha_i \in (0,1)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$, причем при $\alpha_i : Re\alpha_i \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ оно верно для $x^{A}\boldsymbol{f}(x)\in L(0,b)$.

2. Если в (46) положить $A=E-B$, то получим тождество $\boldsymbol{D}_{ax}^{E-B} x^{E-2B} \boldsymbol{D}_{ax}^{-B} \boldsymbol{f} = x^{-B} \boldsymbol{D}_{ax}^{E-2B} x^{E-B} \boldsymbol{f}$, справедливое для любых $\beta_i : Re\beta_i \in (0,1), \beta_i \in \Lambda(B)$, причем при $\beta_i : Re\beta_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ оно верно для $x^{E-B} \boldsymbol{f}(x) \in L(0,b)$.

В качестве одного из приложений матричных интегродифференциальных операторов рассмотрим систему обобщенных интегральных уравнений (с.о.и.у.) Абеля в матричной форме

$$A(x) I_{ax}^{G} U(x) \boldsymbol{u} + B(x) I_{xb}^{G} V(x) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x), \qquad (47)$$

где $G \in M_n$, $A(x)$, $B(x)$, $U(x)$ и $V(x)$ – функциональные $[n x n]$-матрицы, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ и $\boldsymbol{f}(x)$ – вектор-функции, $\boldsymbol{I}_{ax}^{G} = \boldsymbol{D}_{ax}^{-G}$ и $\boldsymbol{I}_{xb}^{G} = \boldsymbol{D}_{xb}^{-G}$ - введенные выше матричные интегральные операторы.

Первая попытка решения с.о.и.у. Абеля содержится в работе N.Zeilon [35]. Более серьезные шаги были предприняты в уже упомянутых в начале статьи работах M.Lowengrub, J.Walton [11] и J.R.Walton [12]. В обеих работах рассматривается система двух уравнений (n=2) в весьма частных случаях. Так ,в работе [11] $G=(1-\mu)E$, $0<\mu<1$;
$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & 0 \\ 0 & \alpha_2(x) \end{pmatrix}$; $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(x) \\ \beta_2(x) & 0 \end{pmatrix}$; $U = V \equiv 0$, а система уравнений (48) приводится методом аналитического продолжения к задаче Римана для двух пар функций. Содержащееся в этой работе решение задачи Римана ошибочно. В работе [12] дано сведение системы уравнений (48) к полному сингулярному уравнению для следующих матриц:

$$G = \begin{pmatrix} 1-\mu_1 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2 \end{pmatrix}, \ 0 < \mu < 1; \ A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & 0 \\ 0 & \alpha_2(x) \end{pmatrix}, \ B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(x) \\ \beta_2(x) & 0 \end{pmatrix};$$
$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

В работах И.Л. Васильева [36,37] система уравнений (48) для $G \in M_n$, $G=\alpha E$, $A(x)$ и $B(x)$-матрицы-функции, $U=V\equiv 0$ сведена к системе сингулярных интегральных уравнений; аналогичное исследование проведено и для систем с матрицами $A(x)=B(x) \equiv 0$, $U, V \in M_n$.

В работе А.А. Андреева [8] система уравнений (48) рассмотрена в самом общем виде и указаны условия ее нормальной разрешимости.

Другим приложением матричных интегродифференциальных операторов является круг нелокальных краевых задач для вырождающихся систем дифференциальных уравнений с частными производными. Некоторые работы авторов [26-32] в этом направлении уже упоминались в начале данной статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688с.
2. *Oldham K.B., Spanier J.* The fractional calculus. N.Y.– London: Acad. Press, 1974. 234 p.
3. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. *Nigmatullin R.R.* The realization of the generalized transfer equation in a medium with the fractal geometry // Phis. Stst. Sol. (b) 133. 1986.
5. *Нахушев А.М.* Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик-Майкоп : Логос, 1995. 59 с.
6. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995. 301 с.
7. *Андреев А.А.* Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Краевые задачи для уравнений математической физики. Куйбышев: Куйбыш. пед. ин-т, 1990. С. 3-6.
8. *Андреев А.А.* Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики : Мат. Всесоюз. конф. Владивосток, 1990.. С. 91.
9. *Самко С.Г.* О сведении некоторых интегральных уравнений первого рода теории упругости и гидродинамики к уравнениям второго рода // Прикл. мат. и мех. 1967. Т.31. N2. С. 343-345.
10. *Lowengrub M.* Systems of Abel type equations // Function theoretic methods in defferencial equations / R.P. Gilbert, R.J. Weinacht, eds. Pitman Publ. 1976. P. 277-296.
11. *Lowengrub M., Walton J.* Systems of generalized Abel equations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol.10. N4. P. 794-807.

12. *Walton J.* Systems of generalized Abel integral equations with applications to simultaneous dual relations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol.10, N4. P. 808-822.
13. *Бейтман Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
14. *Килбас А.А.* Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гельдеровских функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975, N1. С.37-43.
15. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11, N2. P. 135-143.
16. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler-Darboux equation // Math. Japon. 1979. Vol.24, N4. P. 377-385.
17. *Репин О.А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Сарат. ун-т, Самар. филиал, 1992. 162 с.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
19. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
21. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1957.
22. *Андреев А.А.* Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100 с.
23. *Андреев А.А., Килбас А.А.* О решениях неоднородного гипергеометрического уравнения и вычислении интегралов // Докл. АН БССР. 1983. Т.27, N6. С. 493-496.
24. *Андреев А.А., Килбас А.А.* О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // Изв. вузов. Сер.– Мат. 1984. N12. С .3-12.
25. *Андреев А.А.* О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // Диффер. уравнения (математическая физика) : Мат. Куйбыш. обл. межвуз. науч. совещ.-сем. Куйбышев, 1984. N12. С.8-9.
26. *Огородников Е.Н.* О нелокальной краевой задаче для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Некласс. уравн. мат. физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С.150-151.
27. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* О некоторых нелокальных краевых задачах для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Линейные операторы в функциональных пространствах : Мат. регион. конф./ Чечен.-ингуш. ун-т. Грозный, 1989. С. 23-24.
28. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы и интегральные уравнения третьего рода // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики : Мат. Всесоюз. конф. Владивосток, 1990. С. 97.
29. *Андреев А.А., Линьков А.В.* Нелокальные краевые задачи для модельной вырождающейся системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и их применения : Мат. междунар. конф. Саранск: МГУ, 1994. С.41.
30. *Огородников Е.Н.* Две нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. пятой межвуз. конф. / Самар. техн. ун-т. Самара, 1995. С. 81-82.
31. *Огородников Е.Н.* Краевые задачи со смещением для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. шестой межвуз. конф./ Самар. техн. ун-т. Самара, 1996. С. 75-77.
32. *Огородников Е.Н.* Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. седьмой межвуз. конф./ Самар. техн. ун-т. Самара, 1997. С. 60-65.
33. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1986. 496с.
34. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
35. *Zeilon N.* Sur quelque points de la theorie de l'equation integrale d'Abel // Arkiv. for Mat., Astr. och Fysik. 1924. Bd 18, N5. S.1-19.
36. *Васильев И.Л.* О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами // Докл. АН БССР. 1981. Т.25, N2. С. 105-107.
37. *Васильев И.Л.* Системы интегральных уравнений с ядром Абеля на отрезке вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. мат.-физ. наук. 1982. N2. С.47-53.