

Механика деформируемого тела

УДК 539.376

Я.М. Клебанов, А.Н. Давыдов

ПАРАЛЛЕЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И СКОРОСТЬЮ ДЕФОРМАЦИЙ

Разработан новый метод параллельной реализации задач установившейся ползучести на основе использования численных обобщенных моделей нелинейного деформирования и метода подконструкций. Построены нелинейные обобщенные модели установившейся ползучести при неограниченном числе степеней свободы. Разработаны алгоритмы и созданы программные средства, позволяющие ускорить и уточнить расчет напряженно-деформированного состояния конструкции в условиях ползучести. Метод может быть использован при решении задач в различных отраслях техники и технологии, проектировании сложных строительных конструкций, деталей авиационной и космической техники.

Значительное повышение эффективности параллелизации решений задач установившейся ползучести вследствие применения итерационных вычислительных процедур взамен пошаговых становится возможным в результате использования наряду с методом декомпозиции метода обобщенных моделей.

С этой целью необходимо разработать такой подход к построению обобщенных моделей подконструкций, который позволил бы оперировать с произвольно большим числом степеней свободы. Эти модели должны обладать достаточно высокой точностью и обеспечивать сходимость соответствующих итерационных процедур. Решение перечисленных выше задач рассматривается в данной работе.

1. Определяющие уравнения

Поскольку решения задач установившейся ползучести совпадают с решениями по теории малых упругопластических деформаций в данном разделе для простоты изложения вместо скоростей деформаций и скоростей перемещений будем рассматривать соответственно деформации и перемещения.

Рассмотрим конструкцию, занимающую объем Ω , и разделим ее на N подконструкций с объемами Ω_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Запишем определяющие уравнения в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi_\alpha(x_k, \sigma_{lm}(x_k))}{\partial \sigma_{ij}(x_k)}; \Phi_\alpha(x_k, \sigma_{ij}) = B_\alpha(x_k) \frac{\sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha + 1}}{\nu_\alpha + 1};$$

$$\sigma_{e\alpha}^2 = \Phi_{ijkl}^{(\alpha)} \sigma_{ij} \sigma_{kl}; \quad i, j, k, l, m = 1, 2, 3; \alpha = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где σ_{ij} ε_{ij} - компоненты тензора напряжений и деформаций; Φ_α - дополнительная работа; x_k - пространственные координаты точек конструкции; $\sigma_{e\alpha}$ - эквивалентное напряжение; B_α - функция координат; $\Phi_{ijkl}^{(\alpha)}$ - тензор свойств податливости анизотропного материала; ν_α - константа для подконструкции с номером α ($\nu_\alpha > 1$). В (1) и ниже суммирование по индексам, обозначенными греческими буквами, не производится.

В дальнейшем полагаем выполнение свойств симметрии

$$\Phi_{ijkl}^{(\alpha)} = \Phi_{jikl}^{(\alpha)} = \Phi_{klij}^{(\alpha)} \quad (2)$$

и условий, ограничивающих значения компонент тензора податливости

$$0 \leq \Phi_{ijkl}^{(\alpha)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \leq M_1 \sigma_{ij} \sigma_{ij}, 0 \leq \Phi_{ijkl}^{(\alpha)} \sigma_{kl} \Phi_{ijmn}^{(\alpha)} \sigma_{mn} \leq M_2 \sigma_{ij} \sigma_{ij},$$

где равенства нулю возможны, если все $\sigma_{ij} = 0$.

Функция B_α описывает неоднородность свойств материала подконструкции α , занимающей пространственную область Ω_α . Эта неоднородность может быть вызвана разбросом свойств материала, воздействием внешних физических полей или другими факторами.

В дальнейшем полагаем, что

$$B_\alpha(x_i) = B_{0\alpha} B_{1\alpha}(x_i), \quad (3)$$

где $B_{0\alpha}$ - константа; $B_{1\alpha}$ - безразмерная функция пространственных координат ($x_i \in \Omega_\alpha$), отвечающая условию нормирования в виде

$$\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha}(x_i) d\Omega = 1. \quad (4)$$

Непротиворечивость записанных выше определяющих зависимостей (1) обеспечивается выполнением условия единственности решения краевых задач [1].

Из зависимостей (1) следует существование эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{e\alpha}^2 = \Psi_{ijkl}^{(\alpha)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3; \alpha = 1, \dots, N,$$

где $\Psi_{ijkl}^{(\alpha)}$ - тензор жесткостных констант анизотропного материала, связанный с тензором податливости равенствами

$$\Psi_{ijkl}^{(\alpha)} \Phi_{ijmn}^{(\alpha)} = \delta_{km} \delta_{ln}; \quad i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3; \alpha = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Подставляя в правую часть условия (4) зависимость для деформаций (1), получаем

$$\varepsilon_{e\alpha}^2 = (B_\alpha \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha - 1})^2 \Psi_{ijkl}^{(\alpha)} \Phi_{ijmn}^{(\alpha)} \sigma_{mn} \Phi_{klrs}^{(\alpha)} \sigma_{rs}; \quad i, j, k, l, m, n, r, s = 1, 2, 3; \alpha = 1, \dots, N.$$

Учитывая (2) и (5), легко определить зависимость, связывающую эквивалентную деформацию и эквивалентное напряжение в виде

$$\varepsilon_{e\alpha} = B_\alpha \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Если определяющие соотношения (1) записать в обратной форме

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_\alpha(x_k, \varepsilon_{lm}(x_k))}{\partial \varepsilon_{ij}(x_k)}; \quad \Psi_\alpha(x_k, \varepsilon_{ij}) = \frac{\varepsilon_{e\alpha}^{\mu_\alpha + 1}}{C_\alpha(x_k)(\mu_\alpha + 1)}; \quad \mu_\alpha = 1/\nu_\alpha; \quad C_\alpha = B_\alpha^{\mu_\alpha}, \quad (7)$$

где

$$C_\alpha(x_i) = C_{0\alpha}(x_i) C_{1\alpha}(x_i); \quad \frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \frac{d\Omega}{C_{1\alpha}(x_i)} = 1; \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (8)$$

то приходим к обратной зависимости между эквивалентным напряжением и эквивалентной деформацией в виде

$$\sigma_{e\alpha} = \frac{1}{C_\alpha} \varepsilon_{e\alpha}^{\mu_\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Отметим также, что в для каждой подконструкции справедливы равенства

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = (1 + \nu_\alpha) \Phi_\alpha = (1 + \mu_\alpha) \Psi_\alpha. \quad (9)$$

Здесь Ψ_α - работа диссипации.

2. Поверхности равной диссипации в пространствах сил и перемещений.

Обобщенная модель подконструкции

Рассмотрим две подконструкции одинакового размера, находящиеся под действием одних и тех же нагрузок, но состоящие из различных материалов. Соответствующие определяющие соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{e1} = B_1 \sigma_{e1}^{\nu_1}; \quad \varepsilon_{e2} = B_2 \sigma_{e2}^{\nu_2}.$$

В работе [2] доказано, что функционал

$$\left(\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha} \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha + 1} d\Omega \right)^{\frac{1}{\nu_\alpha + 1}}$$

является монотонно возрастающей функцией. Он ограничен снизу значением при $\nu_\alpha = 1$ и сверху значением при $\nu_\alpha = \infty$. Если в пространстве сил рассматривать гиперповерхности

$$\left(\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha} \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha+1} d\Omega \right)^{\frac{1}{\nu_\alpha+1}} = const,$$

то они будут “вкладываться” одна в другую с ростом ν_α . Этим поверхностям отвечают постоянные эквивалентные обобщенные силы [3].

Нетрудно доказать, что поверхности равной диссипации [4] $\int_{\Omega_\alpha} B_\alpha \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha+1} d\Omega$ при надлежащем нормировании вкладываются одна в другую в пространстве сил с ростом ν_α . Условие нормирования имеет вид $\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_\alpha \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha+1} d\Omega = B_{0\alpha}$.

Аналогичные поверхности могут быть построены и в пространстве перемещений. Ниже показано, что их форма связана с формой поверхностей в пространстве сил, что используется при анализе трансформации поверхностей с изменением степени нелинейности определяющих соотношений. Поверхности постоянной диссипации в пространстве перемещений вкладываются друг в друга с ростом μ_α и снаружи ограничены гиперповерхностью при $\mu_\alpha = 0$, а внутри - гиперэллипсоидом при $\mu_\alpha = 1$ [2].

Введем функционал, являющийся дополнительной работой для всей подконструкции

$$\tilde{\Phi}_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} \Phi_\alpha d\Omega; \quad \alpha=1, \dots, N.$$

В соответствии с (1), (3) и (4)

$$\tilde{\Phi}_\alpha = [B_{0\alpha} / (\nu_\alpha + 1)] \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha} \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha+1} d\Omega.$$

Согласно принципу Кастильяно [5] зависимость между обобщенными силами Q_s и обобщенными перемещениями u_s в подконструкции (или ее обобщенная модель [6,7]) имеет вид

$$u_s = \frac{\partial \tilde{\Phi}_\alpha}{\partial Q_s}; \quad \tilde{\Phi}_\alpha = \tilde{\Phi}_\alpha(Q_r); \quad s, r=1, 2, \dots.$$

Эквивалентная обобщенная сила для неоднородной подконструкции определяется соотношением

$$Q_\alpha = \left(\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha} \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha+1} d\Omega \right)^{\frac{1}{\nu_\alpha+1}}; \quad \alpha=1, \dots, N. \quad (10)$$

Следовательно, $\tilde{\Phi}_\alpha = [B_{0\alpha} / (\nu_\alpha + 1)] \Omega_\alpha Q_\alpha^{\nu_\alpha+1}$, а обобщенная модель имеет вид $u_s = B_{0\alpha} \Omega_\alpha Q_\alpha^{\nu_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial Q_s}$.

Таким образом, вектор обобщенных перемещений перпендикулярен поверхности равной диссипации в пространстве сил.

Работа диссипации всей подконструкции определяется формулой

$$\tilde{\Psi}_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} \Psi_\alpha d\Omega, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (11)$$

В соответствии с (7) и (8)

$$\tilde{\Psi}_\alpha = \frac{1}{C_{0\alpha} (\mu_\alpha + 1)} \int_{\Omega_\alpha} \frac{1}{C_{1\alpha}} \varepsilon_{e\alpha}^{\mu_\alpha+1} d\Omega.$$

По определению эквивалентное обобщенное перемещение имеет вид

$$u_\alpha = \left(\frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \frac{1}{C_{1\alpha}} \varepsilon_{e\alpha}^{\mu_\alpha+1} d\Omega \right)^{1/(\mu_\alpha+1)}, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Согласно принципу Лагранжа

$$Q_s = \frac{\partial \tilde{\Psi}_\alpha}{\partial u_s}, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = \tilde{\Psi}_\alpha(u_r); \quad s, r = 1, 2, \dots, .$$

причем в нашем случае $\tilde{\Psi}_\alpha = \frac{1}{C_{0\alpha}(\mu_\alpha + 1)} \Omega_\alpha u_\alpha^{\mu_\alpha + 1}$.

Тогда обратная форма обобщенной модели подконструкции может быть представлена в виде

$$Q_s = \frac{1}{C_{0\alpha}} \Omega_\alpha u_\alpha^{\mu_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_s}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что вектор обобщенных сил перпендикулярен поверхности равной диссипации в пространстве перемещений.

Из (9) следует, что для подконструкции α работа заданных внешних сил $D_\alpha = Q_s u_s$ может быть представлена равенствами

$$D_\alpha = (1 + \nu_\alpha) \tilde{\Phi}_\alpha = (1 + \mu_\alpha) \tilde{\Psi}_\alpha. \quad (14)$$

Подставляя (6), (7) и (8) в формулу для эквивалентного обобщенного перемещения (12), можно записать

$$u_\alpha = \left(C_{0\alpha} B_{0\alpha} \frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} B_{1\alpha} \sigma_{e\alpha}^{\nu_\alpha + 1} d\Omega \right)^{\nu_\alpha / (\nu_\alpha + 1)}, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Учитывая, что эквивалентная обобщенная сила определяется зависимостью (10), теперь легко получить связь эквивалентной обобщенной силы и эквивалентного обобщенного перемещения в виде

$$u_\alpha = (B_{0\alpha} C_{0\alpha})^{\nu_\alpha / (\nu_\alpha + 1)} Q_\alpha^{\nu_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (15)$$

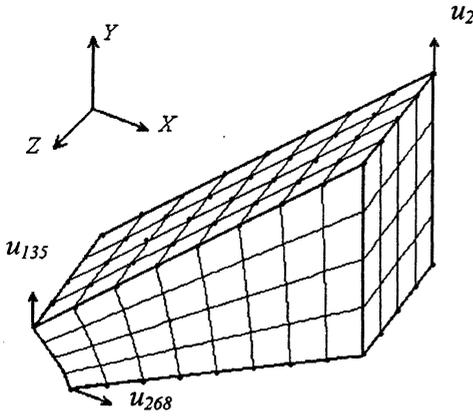
В случае однородного изотропного тела из несжимаемого материала эта обобщенная формула совпадает с известными зависимостями [7,8]. Зависимости (14) и (15) могут быть использованы для одновременного анализа формы поверхностей равной диссипации в пространствах сил и перемещений.

Линейной зависимости между обобщенными перемещениями и обобщенными силами ($\nu_\alpha = 1$) в пространстве обобщенных сил и в пространстве обобщенных перемещений соответствуют поверхности равной диссипации в форме гиперэллипсоидов. При $\nu_\alpha > 1$ эти поверхности не являются гиперэллипсоидами. На рис.1 в двух проекциях изображена конечно-элементная модель некоторой пространственной конструкции, на двух поверхностях которой в отмеченных жирными точками узлах заданы все три перемещения. Всего задано 270 перемещений. На рис.2 приведено сечение поверхностей равной диссипации в пространстве перемещений плоскостью $\{u_2, u_{268}\}$. Из приведенных рисунков видно, что поверхности равной диссипации вкладываются друг в друга с изменением степени нелинейности ν_α .

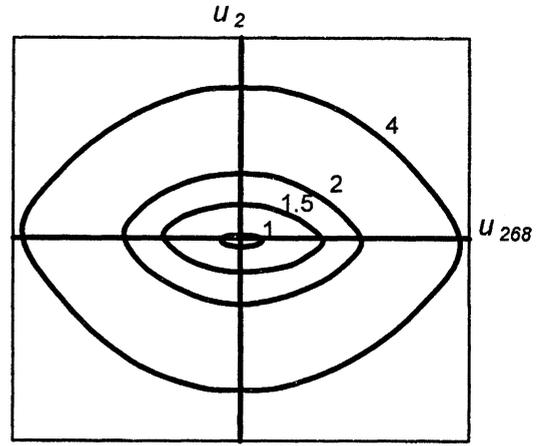
3. Аппроксимирующая обобщенная модель подконструкции

Как уже отмечалось, поверхность постоянной диссипации при $\nu_\alpha > 1$ не является гиперэллипсоидом. Однако из проведенного анализа следует, что любая существенная ее часть может быть с высокой степенью точности представлена как часть гиперэллипсоида. Если при одних и тех же внешних воздействиях на конструкцию поворот вектора сил или перемещений, действующих на подконструкцию, оказывается в пределах такого участка, то указанная аппроксимация может быть основой создания эффективной обобщенной модели подконструкции. Впервые построение таких обобщенных моделей подконструкций было предложено в работе [9].

Использование в качестве аппроксимирующей поверхности гиперэллипсоида объясняется стремлением получить векторно-линейную (квазилинейную) связь между силами и перемещениями. Обобщенное перемещение в соответствии с такой аппроксимацией может быть представлено в виде



Р и с. 1. Конечно-элементная модель пространственной конструкции



Р и с. 2. Сечения $\{u_2, u_{268}\}$ гиперповерхностей равной диссипации пространственной конструкции (рис.1). Цифрами отмечены значения показателя степени ν

$$u_\alpha = \left(\frac{C_{0\alpha}}{\Omega_\alpha} \right)^{\frac{1}{\mu_\alpha+1}} (c_{rs\alpha} u_r u_s)^{\frac{1}{2}}; r, s=1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $c_{rs\alpha}$ - матрица жесткости подконструкции α .

Используя представление (16), вместо (13) получаем аппроксимирующее обобщенное определяющее уравнение

$$Q_s = c_{rs\alpha} u_\alpha^{\mu_\alpha-1} u_r; \quad 0 < \mu_\alpha \leq 1. \quad (17)$$

Аппроксимирующую поверхность будем далее строить в пространстве перемещений и таким образом, чтобы она касалась действительной поверхности в одной заданной точке. Проанализирован ряд возможных вариантов такой аппроксимации. Наиболее удачный из них предполагает известными результаты нелинейного конечно-элементного расчета подконструкции для одного заданного сочетания внешних сил или перемещений. Аппроксимирующий гиперэллипсоид соответствует некоторой эквивалентной подконструкции той же формы, что и исходная подконструкция, но с неоднородными линейными свойствами материала. Свойства материала эквивалентной подконструкции будем определять по полученным из нелинейного расчета напряжениям и деформациям, которые и определяют положение точки аппроксимации.

Легко убедиться, что описанная выше аппроксимирующая поверхность в окрестности точки аппроксимации находится внутри действительной поверхности. Действительно, пусть $\varepsilon_{e\alpha} = \varepsilon_{e\alpha 0} + \Delta\varepsilon_{e\alpha}$. Раскладывая работу внешних сил

$$D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}] = \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha}^{\mu_\alpha+1}}{C_\alpha} d\Omega$$

в ряд по $\Delta\varepsilon_{e\alpha}$ до второй степени, получаем

$$D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}] = D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha 0}] + (\mu_\alpha + 1) \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha}}{C_\alpha} \Delta\varepsilon_{e\alpha} d\Omega + \frac{\mu_\alpha(\mu_\alpha + 1)}{2} \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha-1}}{C_\alpha} (\Delta\varepsilon_{e\alpha})^2 d\Omega. \quad (18)$$

Для эквивалентной подконструкции функционал $D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] = \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha-1} \varepsilon_{e\alpha}^2}{C_\alpha} d\Omega$ представляется конечной суммой

$$D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] = D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha 0}] + 2 \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha}}{C_\alpha} \Delta\varepsilon_{e\alpha} d\Omega + \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha-1}}{C_\alpha} (\Delta\varepsilon_{e\alpha})^2 d\Omega. \quad (19)$$

Так как $D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}] = D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha 0}]$ и $\int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha}}{C_\alpha} \Delta \varepsilon_{e\alpha} d\Omega = -\frac{\mu_\alpha}{2} \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha - 1}}{C_\alpha} (\Delta \varepsilon_{e\alpha})^2 d\Omega$, то из (19) сле-

дует, что $D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] = D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha 0}] + (1 - \mu_\alpha) \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha - 1}}{C_\alpha} (\Delta \varepsilon_{e\alpha})^2 d\Omega$.

Второе слагаемое в правой части этого равенства неотрицательно. В точке аппроксимации $D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha 0}] = D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha 0}]$. Следовательно, поверхность $D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] = const$ в окрестности точки аппроксимации находится внутри поверхности $D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}] = const$.

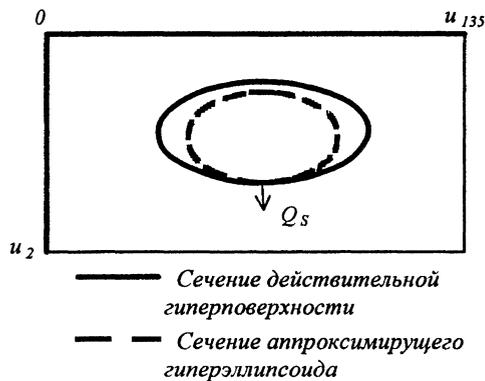
Зависимости (18) и (19) вместе с равенствами

$$u_{so} Q_{so} = D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha 0}] Q_{so} \Delta u_s = \int_{\Omega_\alpha} \frac{\varepsilon_{e\alpha 0}^{\mu_\alpha}}{C_\alpha} \Delta \varepsilon_{e\alpha} d\Omega,$$

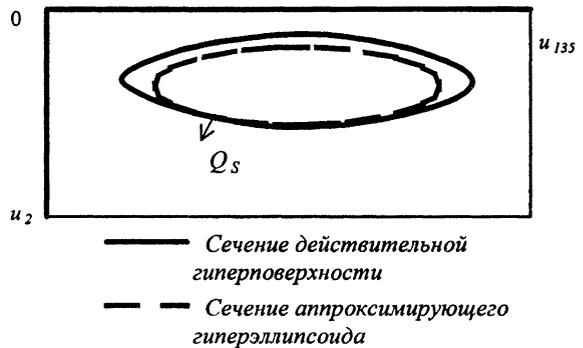
где u_{so} и Q_{so} соответствуют точке аппроксимации, Δu_s соответствует $\Delta \varepsilon_{e\alpha}$, $\Delta u_s = u_s - u_{so}$, а u_s и u_{so} принадлежат поверхности равной диссипации подконструкции α , позволяют оценить погрешность величины работы внешних сил, обусловленную предложенной аппроксимацией, в окрестности точки аппроксимации. Принимая в (19) $D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] = D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha 0}]$ и используя затем (18), получаем оценку относительной погрешности в виде

$$\delta_D^{(\alpha)} = \left| \frac{D_{1\alpha}[\varepsilon_{e\alpha}] - D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}]}{D_\alpha[\varepsilon_{e\alpha}]} \right| = (1 - \mu_\alpha^2) \left| \frac{Q_{so} \Delta u_s}{Q_{so} u_{so}} \right|. \quad (20)$$

Эта оценка соответствует участкам поверхности, форма которых в наибольшей степени отличается от гиперэллипсоида. Резкое искажение формы поверхности вблизи однородных НДС снижает точность аппроксимации. Поэтому для областей с низким градиентом напряжений может оказаться целесообразным сохранять обычное конечно-элементное представление, используя минимальное количество конечных элементов.



Р и с. 3. Сечение $\{u_2, u_{135}\}$ гиперповерхности равной диссипации и сечение аппроксимирующего гиперэллипсоида в пространстве перемещений ($\nu_\alpha = 2$)



Р и с. 4. Сечение $\{u_2, u_{135}\}$ гиперповерхности равной диссипации и сечение аппроксимирующего гиперэллипсоида в пространстве перемещений ($\nu_\alpha = 5$)

Некоторые примеры сечений аппроксимирующих гиперэллипсоидов для элемента пространственной конструкции, изображенной на рис.1, приведены на рис.3 и 4.

4. Алгоритм вычислительной процедуры метода аппроксимирующих обобщенных моделей

Анализ напряженно-деформированного состояния конструкции в условиях установившейся ползучести предлагаемым методом включает несколько этапов. Блок-схема соответствующей вычислительной процедуры показана на рис.5.

Этап 0. С использованием известного метода декомпозиции в параллель решается краевая задача для заданных внешних условий при линейном определяющем соотношении

$$\varepsilon_{ij} = B_{\alpha} \Phi_{ijkl}^{(\alpha)} \sigma_{kl},$$

которое следует из (1) при $\nu_{\alpha} = 1$. Результатом решения линейной краевой задачи на этом этапе являются перемещения точек глобальной модели, т.е. точек на границах подконструкций.

Этап 1. По результатам предшествующих вычислений для каждой подконструкции формируются векторы заданных перемещений внешних узлов u_s . Проводится нелинейный локальный анализ подконструкций при заданных перемещениях u_s . Его результатом являются, в частности, матрицы жесткости подконструкций $c_{rs\alpha}$, сконденсированные к внешним степеням свободы.

Этап 2. В соответствии с (16) и (17) формируются нелинейные численные аппроксимирующие модели подконструкций

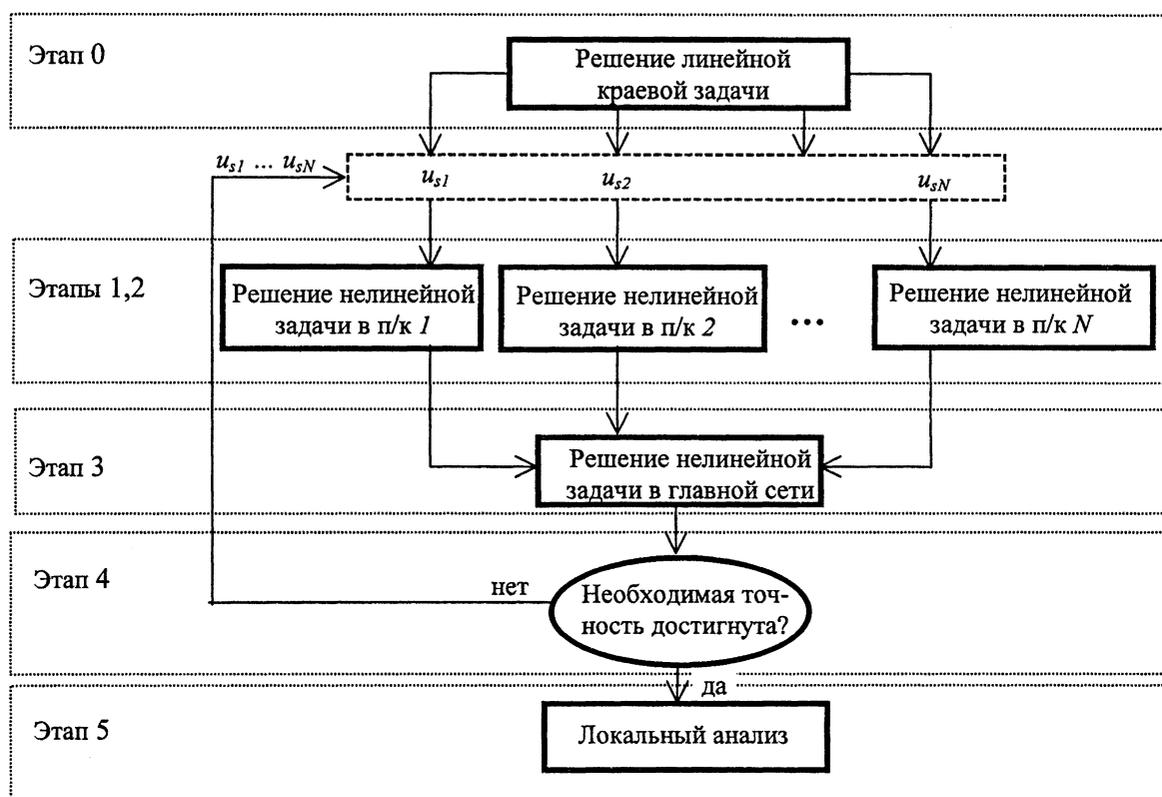
$$Q_s = c_{rs\alpha} u_{\alpha}^{\mu_{\alpha}-1} u_r; \quad 0 < \mu_{\alpha} \leq 1,$$

где для каждой подконструкции на этапе 1 определены значения $c_{rs\alpha}$.

Этап 3: Решается нелинейная глобальная задача для всей конструкции, составленной из подконструкций.

Этап 4. Оценивается достигнутая точность решения. При необходимости повторяются этапы 1-4.

Этап 5. Выполняется локальный анализ тех подконструкций, которые представляют интерес для расчетчика. В качестве исходных данных здесь выступают полученные при глобальном анализе (этап 3) перемещения внешних узлов.



Р и с. 5. Блок-схема алгоритма вычислительной процедуры

Из приведенного алгоритма видно, что при решении задачи установившейся ползучести используется итерационный метод решения. Одна итерация состоит из этапов 1 - 4.

Описанный выше метод в дальнейшем называется методом аппроксимирующих обобщенных моделей.

Нелинейные задачи на этапах 1 и 3 могут быть решены любым из известных методов решения физически нелинейных задач, например методами упругих решений. На этапах 1, 2 и 5 анализ каждой из подконструкций выполняется без какого-либо обмена информацией между подконструкциями. Обычно предполагается, что каждый процессор работает со своей индиви-

дуальной подконструкцией, поэтому на этих этапах могут быть достигнуты идеальные ускорение и эффективность параллелизации. Вычисления в главной сети на этапах 3, 4 в общем случае выполняются на одном процессоре.

При использовании предложенного алгоритма вычисления производятся или с максимальной степенью параллелизма (этапы 1, 2 и 5) или последовательно на одном процессоре (этапы 3 и 4). При вычислении предела ускорения параллельного алгоритма S_p по формуле закона Амдала операции этапов 3 и 4 образуют ту часть всех операций, доля которых представлена величиной γ . Для дальнейшего повышения ускорения S_p необходимо либо переходить к многоуровневому методу декомпозиции, который будет рассмотрен ниже, либо использовать известные методы распараллеливания решения систем линейных уравнений на этапе 3 [10].

Для доказательства сходимости описанного выше алгоритма рассмотрим конструкцию, на части поверхности которой задан вектор обобщенных сил F_k ($k = 1, 2, \dots$). Им соответствуют обобщенные перемещения w_k . На остальной поверхности заданы обобщенные перемещения. Действительное решение соответствует вектору u_s^* . Пусть u_α^* обозначают соответствующие эффективные обобщенные перемещения в подконструкциях. Решение на текущей итерации обозначим $u_s^{(p)}$, где верхний индекс - номер итерации.

Матрица $c_{rs\alpha}^{(p-1)}$ считается на этапе текущей итерации p в соответствии с заданными на границе подконструкции величинами $u_s^{(p-1)}$. Они были определены на предыдущей итерации. Обозначим также

$$u_\alpha^{(q)}(u_t^{(p)}) = (c_{rs\alpha}^{(q)} u_r^{(p)} u_s^{(p)})^{1/2}; t, r, s = 1, 2, \dots; p, q = 0, 1, \dots; \alpha = 1, \dots, N.$$

Покажем, что формула полной энергии для конструкции $L = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{\Psi}_\alpha - F_k w_k$ может быть преобразована к виду

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{[u_\alpha(u_r)]^{\mu_\alpha+1}}{d_\alpha(\mu_\alpha+1)} \right) - F_k w_k, \quad (21)$$

где $d_\alpha = (B_{0\alpha} C_{0\alpha})^{\mu_\alpha/(\mu_\alpha+1)}$.

Действительно, работу диссипации подконструкции α можно записать как

$$\tilde{\Psi}_\alpha = Q_\alpha u_\alpha / (\mu_\alpha + 1). \quad (22)$$

Используя (15), вместо (22) получаем

$$\tilde{\Psi}_\alpha = \left(\frac{1}{B_{0\alpha} C_{0\alpha}} \right)^{\mu_\alpha/(\mu_\alpha+1)} u_\alpha^{\mu_\alpha+1}; \alpha = 1, \dots, N,$$

откуда и следует (21).

В соответствии с принципом минимума полной энергии

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_\alpha^{(p-1)}(u_r^{(p-1)})]^{\mu_\alpha+1}}{d_\alpha(\mu_\alpha+1)} - F_k w_k^{(p-1)} \geq \sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_\alpha^{(p-1)}(u_r^{(p)})]^{\mu_\alpha+1}}{d_\alpha(\mu_\alpha+1)} - F_k w_k^{(p)}; p = 1, 2, \quad (23)$$

где $w_k^{(p)}$ - обобщенные перемещения конструкции в целом, соответствующие обобщенным перемещениям в подконструкциях $u_s^{(p)}$, подсчитанным на этапе 3.

Принятому алгоритму отвечает условие

$$u_\alpha^{(p)}(u_r^{(p)}) = u_\alpha^*(u_r^{(p)}). \quad (24)$$

Тогда из того факта, что аппроксимирующая поверхность находится внутри действительной в окрестности точки аппроксимации, следует

$$u_\alpha^{(p)}(u_r^{(p)}) \leq u_\alpha^{(p-1)}(u_r^{(p)}), \quad (25)$$

где равенство справедливо только для точки аппроксимации.

Заменяя в (25) p на $(p-1)$ и учитывая (23), получаем

$$L_{p-1} \geq L_p, \quad (26)$$

где

$$L_p = \sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_{\alpha}^{(p-1)}(u_r^{(p)})]^{\mu_{\alpha}+1}}{d_{\alpha}(\mu_{\alpha}+1)} - F_k w_k^{(p)}.$$

Учитывая (24), в соответствии с принципом минимума полной энергии можно записать

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_{\alpha}^{(p)}(u_r^{(p)})]^{\mu_{\alpha}+1}}{d_{\alpha}(\mu_{\alpha}+1)} - F_k w_k^{(p)} \geq L_*, \quad (27)$$

где

$$L_* = \sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_{\alpha}^*(u_{r\alpha}^*)]^{\mu_{\alpha}+1}}{d_{\alpha}(\mu_{\alpha}+1)} - F_k w_k^*.$$

Из (25) и (27) следует

$$L_p \geq L_*. \quad (28)$$

Последовательность L_p ($p = 1, 2, \dots$) при $p \rightarrow \infty$ равномерно сходится к пределу L_* :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L_p = L_*. \quad (29)$$

Это следует из (26) и (28), так как для любой сколь угодно малой положительной величины Δ всегда можно найти номер P такой, что для всех $p > P$ будет выполняться неравенство

$$|L_p - L_*| < \Delta.$$

Учитывая единственность решения краевой задачи, нетрудно доказать, что полученный результат обеспечивает также сходимость

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{s\alpha}^{(p)} = u_{s\alpha}^*.$$

Действительно, предположим, что существует

$$u_s^{**} \neq u_s^*, \quad (30)$$

такое, что $\lim_{p \rightarrow \infty} u_s^{(p)} = u_s^{**}$.

В соответствии с описанным алгоритмом из (29) следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{[u_{\alpha}^*(u_r^{**})]^{\mu_{\alpha}+1}}{d_{\alpha}(\mu_{\alpha}+1)} - F_k w_k^{**} = L_*. \quad (31)$$

Действительное решение u_s^* сообщает абсолютный минимум полной энергии диссипации. Поэтому, учитывая (31) и единственность решения краевых задач, получаем равенство $u_s^{**} = u_s^*$, что противоречит предположению (30).

Величина относительного изменения полной энергии на очередной итерации

$$\delta_L = (L_{p-1} - L_p) / |L_p| \quad (32)$$

может быть использована на этапе 4 для оценки достигнутой точности решения.

Изложенная процедура решения задачи установившейся ползучести может быть реализована на основе метода конечных элементов, метода граничных элементов или другого метода конечномерной аппроксимации конструкции.

5. Алгоритм вычислительной процедуры при многоуровневой декомпозиции

Многоуровневый метод декомпозиции состоит в том, что подконструкции могут использоваться рекурсивным образом, т.е. главная сеть, составленная из подконструкций, может иметь узлы с внешними степенями свободы. По этим внешним степеням свободы данная главная сеть может быть соединена с другими главными сетями. Таким образом строится новая главная сеть, которая в свою очередь может иметь внешние степени свободы и т.д. В общем случае число подконструкций на любом из уровней может быть произвольным. В качестве иллюстрации на рис.6,а показана возможная схема трехуровневой декомпозиции.

Подконструкции первого уровня могут состоять, например, из конечных элементов. Главная сеть представляет собой конструкцию в целом. При решении задачи на параллельной ЭВМ наилучшая загрузка процессоров и наименьшая стоимость обменов и синхронизации достига-

ется при использовании графа сдваивания [10]. Заметим, что такой граф, показанный на рис.6,б, представляет собой бинарное дерево. Поэтому операцию, выполняемую с помощью графа сдваивания, иногда называют “операцией на дереве”. В этом случае число подконструкций на первом уровне равно 2^l , где l - число уровней. На каждом последующем уровне происходит уменьшение числа подконструкций в два раза. На последнем уровне число подконструкций равно двум и из них собирается главная сеть.

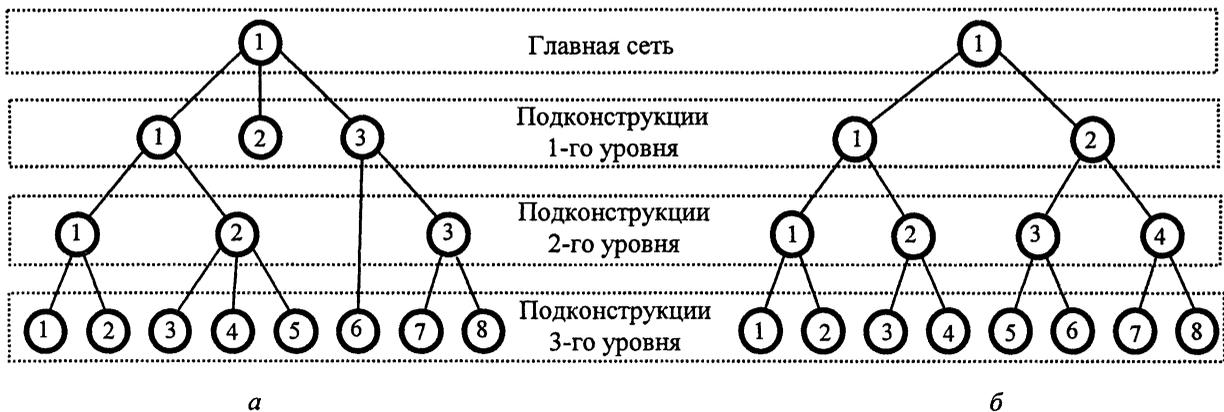
С целью решения задачи установившейся ползучести предлагается алгоритм, включающий следующие основные этапы (рис.7).

Этап 0. Используя многоуровневый метод декомпозиции, в параллель решается линейризованная краевая задача для всей конструкции под действием приложенных нагрузок. Для всех уровней принимается определяющее уравнение (1) при $v_a = 1$. После определения перемещений точек главной сети проводится обратный ход от подструктур высшего уровня до подструктур первого уровня. Результатом решения линейных краевых задач на этом этапе являются перемещения точек внешних узлов подконструкций первого уровня.

Этап 1. По полученным результатам для каждой подконструкции первого уровня формируются векторы заданных перемещений внешних узлов u_{sa} . Проводится нелинейный локальный анализ подконструкций при заданных перемещениях u_{sa} . В соответствии с (16) и (17) формируются нелинейные численные аппроксимирующие модели подконструкций и происходит переход на следующий уровень.

Этап 2. Решается нелинейная задача для подконструкций текущего уровня и формируются нелинейные численные аппроксимирующие модели подконструкций.

Этап 3. Оценивается относительная погрешность, связанная с поворотом вектора перемещений. При необходимости происходит возврат на предыдущий уровень для уточнения аппроксимирующих моделей подконструкций.



Р и с. 6. Схема многоуровневой декомпозиции. Цифрами обозначены номера подконструкций каждого уровня: a - произвольный случай декомпозиции; b - декомпозиция в виде бинарного дерева

Этап 4. Происходит переход на следующий уровень, и если главная сеть еще не достигнута, выполняются этапы 2, 3 для подконструкций нового уровня.

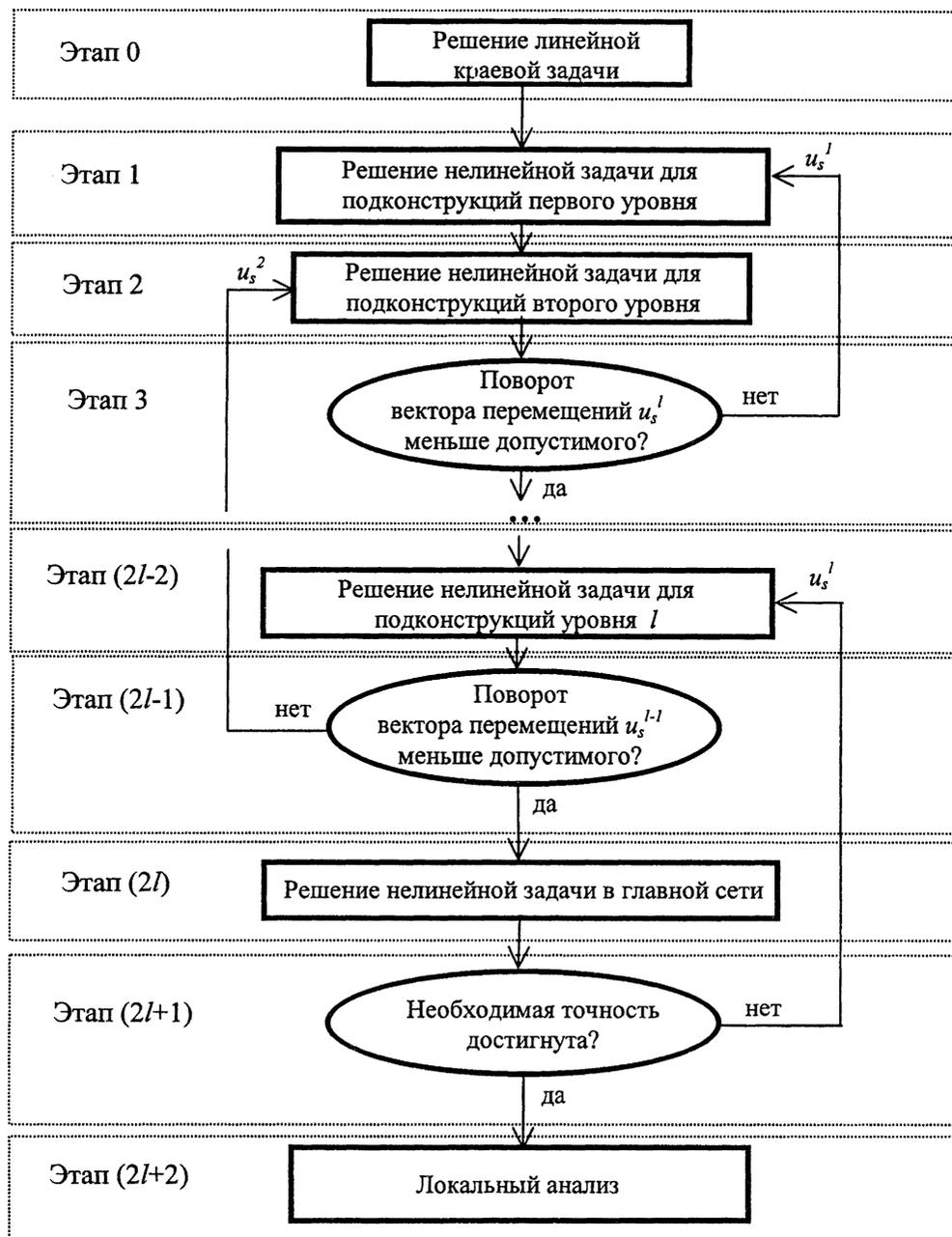
...

Этап $2l$. При достижении главной сети решается нелинейная глобальная задача для всей конструкции при заданных значениях внешних сил и перемещений.

Этап $2l+1$. Оценивается достигнутая точность решения. При необходимости происходит возврат на предыдущий уровень и повторяются этапы $(2l-2)$, $(2l-1)$ и $2l$.

Этап $2l+2$. Выполняется локальный анализ тех подконструкций, которые представляют интерес для расчетчика. В качестве исходных данных здесь выступают полученные перемещения внешних узлов.

На этапах 3, 5, ..., $2l-1$ для оценки погрешности аппроксимации, зависящей от поворота вектора перемещений, предлагается использовать относительную величину погрешности работы внешних сил $\delta_D(20)$.



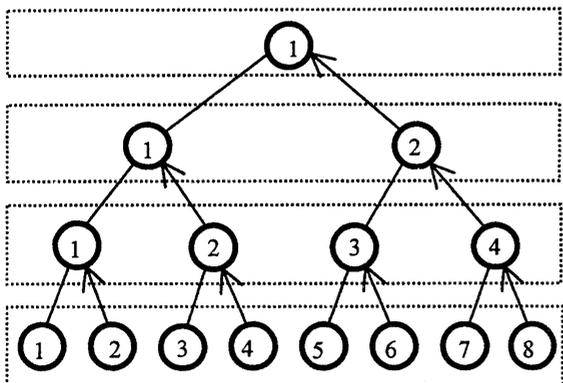
Р и с. 7. Блок-схема алгоритма вычислительной процедуры при многоуровневой декомпозиции: (l - общее число уровней декомпозиции)

Как видно из приведенного алгоритма, степень параллелизма при многоуровневом методе декомпозиции изменяется от одного уровня к другому. На первом уровне (этап 1) степень параллелизма имеет максимальное значение, равное числу подконструкций на этом уровне. При решении нелинейной глобальной задачи для всей конструкции (этап $2l$) степень параллелизма равна единице, т.е. вычисления на этом этапе выполняются последовательно. Однако по сравнению с одноуровневым методом декомпозиции размер главной сети в этом случае значительно меньше и поэтому, в соответствии с законом Амдаля, может быть достигнуто большее ускорение S_p .

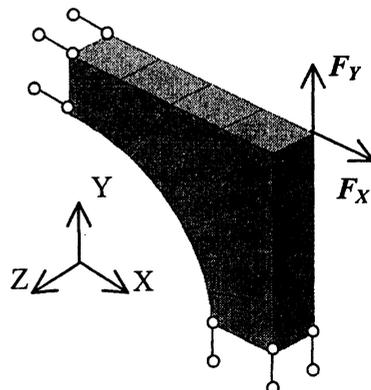
На всех этапах, где одновременно считаются несколько подконструкций, вычисления в пределах одного уровня выполняются без какого-либо обмена информацией между подконструкциями. При переходе с одного уровня на другой половина из задействованных процессоров посылает данные соседнему процессору. Схема взаимодействия процессоров при трехуровневой декомпозиции изображена на рис.8.

Доказательство сходимости описанного выше алгоритма приведено в работе [11]. Так же, как и при одноуровневой декомпозиции, величина относительного изменения полной энергии (32) может быть использована на этапе $2l$ для оценки достигнутой точности решения.

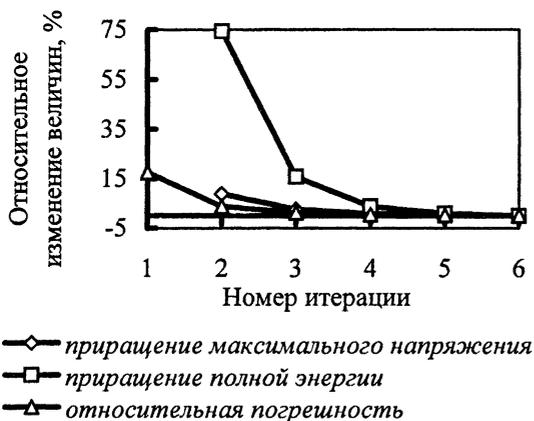
Для реализации метода аппроксимирующих обобщенных моделей на параллельной ЭВМ была создана вычислительная программа, использующая МКЭ. В качестве параллельной ЭВМ использовалась сеть рабочих станций Silicon Graphics. Было решено более 30 задач. Рассматривались конструкции различного типа, при различных граничных условиях и параметрах декомпозиции, в том числе и с неоднородными и анизотропными свойствами материала. Во всех решенных задачах была достигнута хорошая сходимость и высокая точность результатов. Например, для элемента пространственной конструкции, изображенного на рис. 9, соответствующие графические зависимости показаны на рис. 10 и 11.



Р и с. 8. Схема взаимодействия процессоров при трехуровневой декомпозиции конструкции. Цифрами обозначены номера процессоров



Р и с. 9. Разбиение на 8 подконструкций и условия деформирования элемента пространственной конструкции



Р и с. 10. Зависимость приращений максимального напряжения, полной энергии и работы внешних сил от числа итераций при декомпозиции элемента пространственной конструкции на 8 подконструкций ($\nu_\alpha = 8$)



Р и с. 11. Зависимость максимальных перемещения и напряжения от числа итераций при декомпозиции элемента пространственной конструкции на 8 подконструкций ($\nu_\alpha = 8$)

Разработанные процедуры являются универсальными, пригодными для конструкций любой формы и с неограниченным числом степеней свободы. В процессе моделирования подконструкций возможно использование любых численных методов: МКЭ, МГЭ и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Klebanov J.M. Uniqueness of solutions of non-homogeneous and anisotropic problems of non-linear viscoelasticity // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1996. V.31. №4. P.419-423.
2. Клебанов Я.М., Самарин Ю.П. Вложенные поверхности мощности диссипации в пространстве сил и скоростей перемещений при установившейся ползучести неоднородных и анизотропных тел // Механика твердого тела. 1997. № 6. С.121-125.

3. *Boyle J.T.* The theorem of nesting surfaces in steady creep and its application to generalised models and lemit reference stresses // *Res. Mechanica*. 1982. № 4. P.275-294.
4. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1989. 221 с.
5. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455с.
6. *Самарин Ю.П., Клебанов Я.М.* Обобщенные модели в теории ползучести конструкций. Самара: Поволж. отд-ние Инженерной академии РФ. Самар. гос. техн. ун-т, 1994. 197с.
7. *Boyle J.T. Spence J.* Stress analysis for creep. London: Butterworths, 1983. 284 p.
8. *Kachanov L.M.* Theory of Creep. National Lending Library for Science and Technology. Boston Spa, 1967.
9. Метод обобщенных элементов в теории ползучести: (Промежуточ. отчет) / Самар. гос. техн. ун-т. Руковод. темы *Я.М.Клебанов*, Науч. конс. *Ю.П.Самарин*. Самара., 1994. 47 с.
10. *Ортега Д.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 367с.
11. *Клебанов Я.М., Давыдов А.Н.* Многоуровневая декомпозиция конструкций методом аппроксимирующих обобщенных моделей // Численные и аналитические методы расчета конструкций: Тр. междунар. конф./ СамГАСА.. Самара, 1998. С. 92–96.