

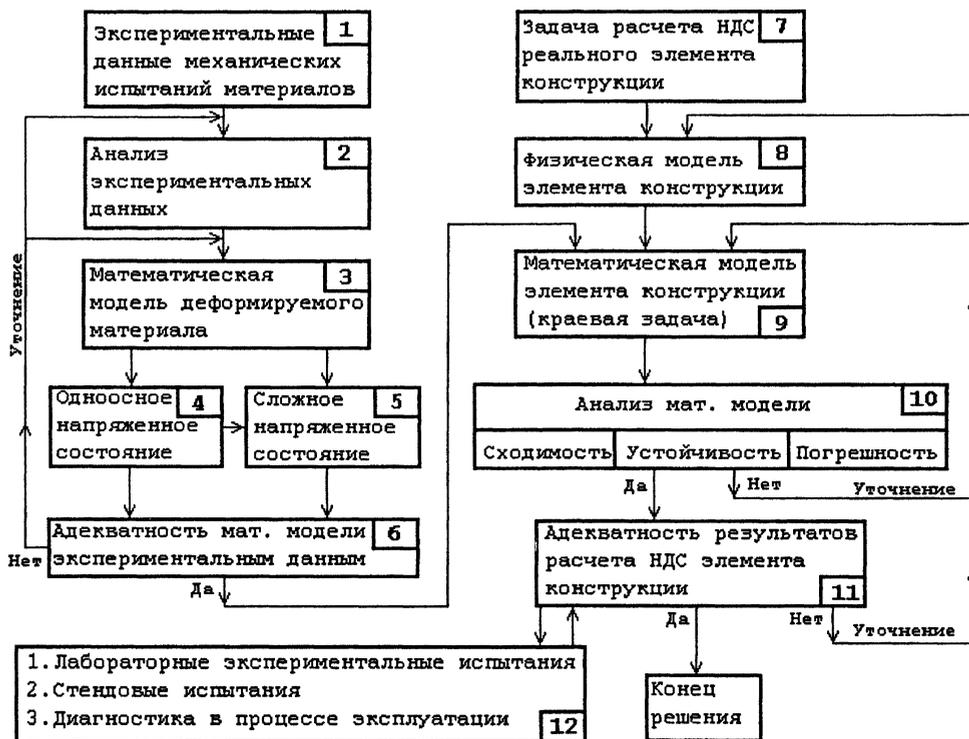
*В.П. Радченко, А.В. Симонов*

## РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВЫРАВНИВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

*Разработан ряд моделей и алгоритмов, которые позволяют полностью автоматизировать процесс обработки экспериментальных данных и построения математической модели неупругого деформирования материалов. Реализован и апробирован метод выделения стадий ползучести, методика вычисления параметров при аппроксимации кривых ползучести с применением методов непараметрического выравнивания опытных данных. Предложена модель упругопластического деформирования и разработана методика автоматизированного вычисления ее параметров. Выполнена обстоятельная экспериментальная проверка всех теоретических положений.*

### 1. Постановка задачи

Появление в настоящее время новых мощных электронно-вычислительных машин позволило с новых позиций взглянуть на реализацию алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций в механике деформируемого твердого тела. Машинная техника вычислений, которая характерна сегодня для большинства приближенных методов, потребовала представления расчетных алгоритмов в форме, наиболее приспособленной к использованию в электронно-вычислительных машинах. И если схема расчета НДС элементов конструкций остается неизменной (рис. 1), то способы реализации каждого блока этой схемы, передачи информации от блока к блоку существенно изменились.



Р и с. 1. Схема расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций

Все большую роль играют мощные вычислительные комплексы, в которых процессы обработки, расчета и передачи информации происходят в автоматическом режиме, т.е. эти функции полностью переданы электронно-вычислительным машинам. Однако практическая реали-

зация этого подхода требует от исследователя решения новых математических задач, которые не могли возникнуть при использовании прежних методов расчета.

Одной из основных задач при расчете НДС конструкций является адекватный выбор модели деформирования материала (см. рис. 1). Однако хорошо известно, что результаты механических испытаний материалов на ползучесть или упругопластическое деформирование имеет существенный разброс данных (например, [1-6]). Это обстоятельство играет отрицательную роль при построении соответствующих математических моделей, так как многие методы аппроксимации экспериментальных данных функциональными или дифференциальными операторами чувствительны к нерегулярностям опытных значений. И если при использовании прежних методов обработки данных "вручную" исследователь мог интуитивно отфильтровать опытные данные исходя из физических соображений относительно динамики рассматриваемого процесса, то при передаче этих функций ЭВМ необходимо разработать методы фильтрации, которые позволили бы решить указанные выше проблемы при автоматизированной обработке экспериментальных данных.

Целью настоящей работы является разработка автоматизированной вычислительной системы построения математической модели неупругого реологического деформирования на основании экспериментальных данных. Эта задача соответствует блокам 1-6 схемы расчета НДС элементов конструкции (см. рис. 1)

В качестве рабочей реологической модели неупругого деформирования используется модель, предложенная в работах [7,8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e + e^p + p, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad \dot{e}^p = \chi S'(\sigma) \dot{\sigma}, \quad p = u + v + w; \\ u(t) &= \sum_{k=1}^s u_k(t), \quad \dot{u}_k(t) = \lambda_k \left[ a_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n - u_k(t) \right]; \\ v(t) &= \sum_{k=1}^s v_k(t), \quad \dot{v}_k = \begin{cases} \lambda_k \left[ b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n - v_k(t) \right], & b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n > v_k(t); \\ 0, & b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n \leq v_k(t); \end{cases} \\ \dot{w}(t) &= c \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^m; \\ \sigma &= \sigma_0 (1 + \omega); \\ \dot{\omega} &= \gamma \sigma \dot{e}^p + \alpha \sigma \dot{p}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \omega); \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \gamma \sigma \dot{e}^p + \alpha \sigma \dot{p}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  - полная деформация;  $e$  и  $e^p$  - упругая и пластическая деформации;  $p$  - деформация ползучести;  $u, v, w$  - вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие  $p$ ;  $\sigma_0$  и  $\sigma$  - номинальное и истинное напряжения;  $E$  - модуль Юнга;  $\lambda_k, a_k, b_k, c, n, m, \sigma_*$  - реологические константы материала;  $\alpha$  и  $\gamma$  - параметры материала, контролирующие процессы разупрочнения. Величина  $\chi = 1$  при  $\sigma(t) > \sigma(\tau)$  ( $0 \leq \tau < t$ ) и  $\chi = 0$ , если можно указать такой момент  $\tau$ , когда  $\sigma(t) \leq \sigma(\tau)$ .

Как следует из уравнений (1)-(3), надо различать обычное (номинальное) напряжение  $\sigma_0(t) = \frac{F(t)}{S_0}$  и истинное напряжение  $\sigma(t) = \frac{F(t)}{S}$ , где  $F(t)$  - растягивающее усилие, приложенное к образцу;  $S_0$  и  $S$  - площади поперечного сечения образца без учета и с учетом микрповреждений (соответственно), которые накапливаются в материале в результате необратимого неупругого деформирования. Поврежденность же в материале описывается параметром поврежденности  $\omega$ , который пропорционален работе истинного напряжения на деформациях

пластичности и ползучести. Разрушение образца происходит в момент времени  $t = t^*$ , для которого выполняется соотношение

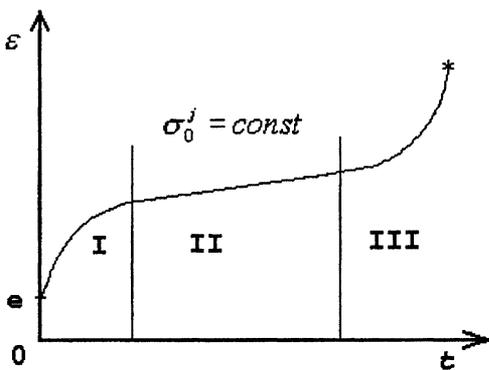
$$\int_0^{t^*} \frac{\sigma de^p(t)}{A_*^P} + \int_0^{t^*} \frac{\sigma dp(t)}{A_*^C(\sigma_0)} = 1, \quad (4)$$

где  $A_*^P, A_*^C$  - критические величины работы истинного напряжения на деформации пластичности и ползучести соответственно.

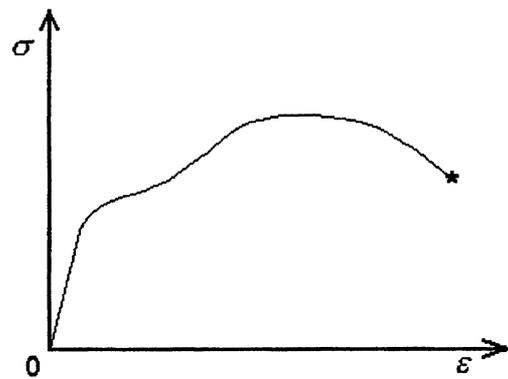
Исходной информацией для определения параметров и функций модели (1)-(4), описывающих деформацию ползучести, являются серия кривых ползучести, доведенных до разрушения при постоянном номинальном напряжении  $\sigma_0 = \sigma_0^t = const (t > 0)$  (рис.2), а часть испытаний должна быть выполнена в режиме нагрузка-разгрузка, т.е.

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} \sigma_0^j, & 0 < t \leq T; \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (5)$$

где время  $T$  выбирается таким образом, чтобы разгрузка была выполнена на второй стадии.



Р и с 2. Кривая стационарной ползучести



Р и с 3. Диаграмма упругопластического деформирования

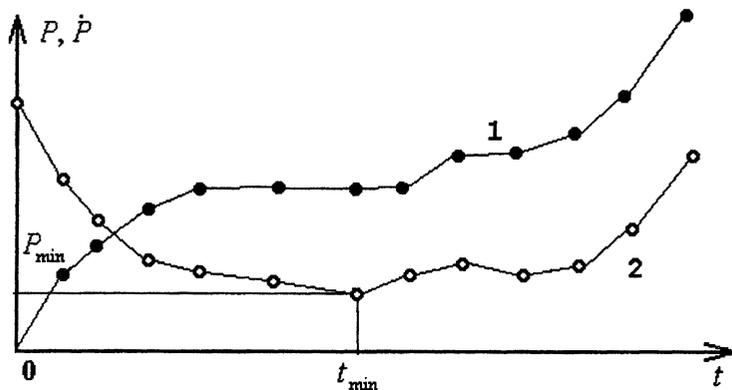
Для определения же параметров, описывающих деформацию пластичности, необходимо иметь стандартную кривую упругопластического деформирования, которая схематически представлена на рис. 3.

## 2. Обработка экспериментальных данных по ползучести материалов

*Алгоритм выделения стадий ползучести.* В общем случае кривые ползучести, полученные при  $\sigma_0 = const$  и постоянной температуре  $\theta$ , имеют, как известно, три характерные стадии (участка): затухающую, установившуюся и ускоренную (см. рис. 2). Указанные стадии развития деформации ползучести соответствуют различному физическому состоянию материала и могут быть описаны различными аналитическими выражениями.

Таким образом, для аналитического описания кривой ползучести необходимо выделить стадии ползучести. Для этого достаточно, очевидно, указать границы второй стадии. При наличии разброса экспериментальных данных эта задача становится нетривиальной, особенно при реализации на ЭВМ.

Задача выделения стадий ползучести была решена в математическом плане в работах [9,10]. Изложим кратко эту методику, поскольку она была положена в основу соответствующей вычислительной процедуры настоящей работы. Согласно [9,10], перейдем от деформации ползучести к скоростям ползучести (рис. 4). Второй стадии должна соответствовать постоянная скорость ползучести, т. е. случайные значения скорости ползучести во второй стадии должны принадлежать одной генеральной совокупности.



Р и с. 4. Экспериментальные кривые деформации ползучести (1) и скоростей деформации ползучести (2)

Скорость ползучести на первой стадии убывает, а на третьей начинает возрастать. Поэтому в качестве первого значения, принадлежащего искомой совокупности (второй стадии), выберем минимальное значение скорости ползучести ( $P_{\min}$  на рис. 4).

Присоединяя затем к этой точке по одной точке слева и справа, оцениваем, используя вероятностный критерий принадлежности точек однородной совокупности

Смирнова Н.В. [11], будут ли эти три точки удовлетворять требованиям критерия. Если нет, делаем вывод о том, что вторая стадия здесь отсутствует и точка, отвечающая минимальной скорости, является граничной точкой первой и третьей стадий. Если три выбранные точки образуют однородную совокупность, то присоединяем еще одну точку (справа или слева) и, пользуясь той же методикой, принимаем решение об исключении или оставлении присоединенной точки в данной совокупности и т. д. до тех пор, пока справа и слева не останется точек, принадлежащих указанной совокупности. Точки найденной однородной совокупности соответствуют второй стадии. Точки, расположенные левее, очевидно, отвечают первой стадии ползучести, а правее - третьей.

Критерий принадлежности точек однородной совокупности [11] в применении к задаче выделения стадий ползучести обладает одним существенным недостатком. При проверке принадлежности значений  $\{Y_i\}$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) однородной совокупности в случае, когда  $Y_i$  очень близки друг к другу и часть этих значений совпадает, критерий отказывает, т. е. такие значения не считаются принадлежащими однородной совокупности. Поэтому для статистического критерия Смирнова Н.В. [11], справедливого для независимых испытаний, должен быть установлен порог применимости, ниже которого значения  $\{Y_i\}$  относят к однородной совокупности без применения критерия. Для этой цели была введена величина [9,10]

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n-1}} - 0,05 \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad (6)$$

выражающая разность между оценкой среднего квадратического отклонения и 5%-ной долей от среднего значения.

Для близких значений  $R < 0$ . При наличии существенного разброса (среднее квадратическое отклонение больше 5% от среднего значения) -  $R > 0$ . На основании вышеизложенного был принят следующий алгоритм:

- при  $R < 0$  значения  $\{Y_i\}$  относятся к однородной совокупности;
- при  $R > 0$  значения  $\{Y_i\}$  проверяются на однородность по статистическому критерию [11].

Пятипроцентный уровень от среднего значения, используемый в выражении (6), выбран в соответствии с практически реализуемым уровнем точности измерений деформаций ползучести и уровнем стабильности условий испытаний (температура, напряжение и т.д.).

При аналитическом описании кривых ползучести при постоянном напряжении и  $e^p = 0$  из соотношений (1)-(3) можно получить выражение

$$\varepsilon^j = e^j + \sum_{i=1}^s c_i^j (1 - e^{-\lambda_i t}) + d^j t + f^j(t), \quad (7)$$

где  $c_i^j, d^j, f^j, e^j$  зависят от напряжения  $\sigma_0^j$ . Слагаемое  $e^j$  в (7) описывает упругую деформацию; сумма  $\sum_{i=1}^s c_i^j (1 - e^{-\lambda_i t})$  - деформацию неустановившегося течения (первую стадию ползучести); слагаемое  $d^j t$  - деформацию установившегося течения;  $f^j(t)$  - деформацию ускоренной ползучести, величина  $c_i = a_i + b_i$ . Поскольку в уравнении (7) различные слагаемые описывают различные стадии ползучести, то для определения параметров этих слагаемых необходимо использовать экспериментальные данные, принадлежащие соответствующим стадиям.

Алгоритм выделения стадий был достаточно полно отработан на большом числе экспериментальных и смоделированных кривых ползучести. Пример выделения всех стадий ползучести показан на рис. 5.

После выделения второй стадии ползучести при различных постоянных  $\sigma_0 = \sigma_0^j = const$  можно построить степенную аппроксимацию для скорости установившейся ползучести вида

$$d^j = d(\sigma_0^j) = \dot{\epsilon} = c(\sigma/\sigma_*)^m.$$

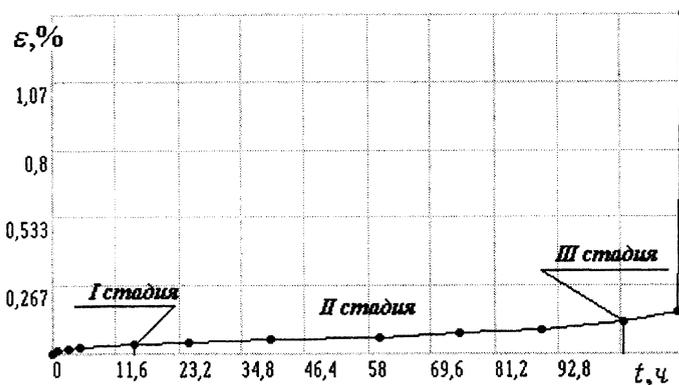
Рассмотрим теперь метод непараметрического выравнивания опытных данных обработки стадии неустановившейся ползучести

Для построения аналитической аппроксимации первой стадии ползучести для конкретной кривой вида

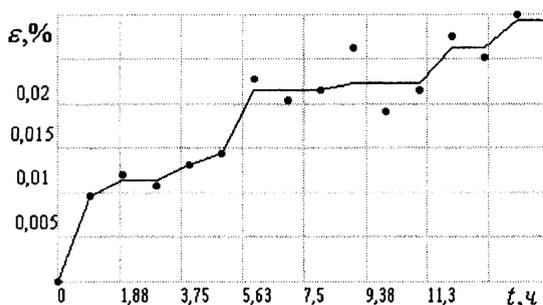
$$h_i^j(t) = \sum_{i=1}^s c_i^j (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (8)$$

в данной работе используется метод последовательного выделения экспоненциальных слагаемых [12]. Однако этот метод является чувствительным к нерегулярностям аппроксимируемой эмпирической кривой. Поэтому для того, чтобы надежно фиксировать неизвестные параметры и алгоритмизировать эту процедуру вплоть до передачи всех функций ЭВМ, необходимо при наличии заметного разброса опытных данных выполнить их выравнивание. Хорошо известный метод выравнивания - метод наименьших квадратов (МНК) в данном случае использовать затруднительно, так как получается неудобная нелинейная система уравнений. Поэтому предлагается использовать метод непараметрического выравнивания экспериментальных данных (МНВ), который не требует конкретного аналитического вида исследуемой зависимости, а учитывает только ее общие свойства, например, такие, как монотонность и выпуклость кривых ползучести на первой стадии. Подробно математическая модель выравнивания по монотонности и выпуклости изложена в [9,10]. В качестве примера на рис. 6 проиллюстрировано применение этого метода для модельной кривой.

После выделения второй стадии на кривой ползучести при  $\sigma_0 = \sigma_0^j = const$  и построения ее аппроксимации в виде  $d^j t$  ( $d^j = const$ ) отделяется первая стадия ползучести с использованием формулы



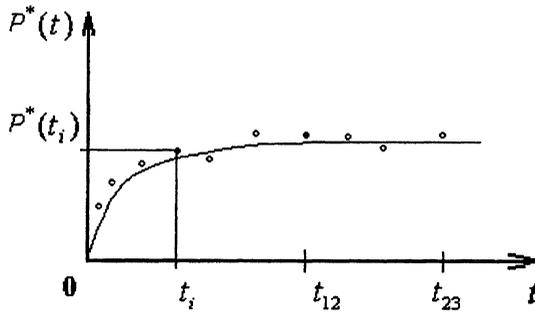
Р и с 5. Выделение стадий ползучести по экспериментальным данным для сплава ЭИ698 при температуре 700°C и  $\sigma=530$  МПа



Р и с 6. Выравнивание экспериментальных данных исходя из условия монотонности (точки - смоделированные экспериментальные данные)

$$P^{*j}(t) = P^{*j}(t) - d^j t \quad (t \in [0, t_{23}]),$$

где  $P^j(t)$  - экспериментальные данные;  $t_{23}$  - момент времени, являющийся границей второй и третьей стадий. Типичная картина зависимости  $P^*(t)$  схематически представлена на рис. 7



Р и с. 7. Значения  $P^*(t)$ , соответствующие первой стадии

Здесь  $t_{12}$  - граница первой и второй стадий. В силу разброса экспериментальных данных  $P^{*j}$  каждая кривая  $P^{*j} = P^{*i}(t)$  должна быть предварительно выравнена из условий монотонности и выпуклости. Далее из всех кривых  $P^{*j}$  ( $1 \leq j \leq r$ ), описывающих первую стадию ползучести, выбирается одна кривая  $P^{*f}$  ( $0 < f < r$ ), и для нее находится аппроксимация вида (8) при  $j = f$ , согласно методу выделения экспоненциальных слагаемых [12].

При реализации алгоритма последовательного выделения экспоненциальных слагаемых на ЭВМ необходимо было внести некоторые дополнительные моменты, связанные с особенностями машинной обработки.

1. Входные параметры (время и деформация) задаются дискретно, массивами размерности  $N$ , причем значения деформации предварительно выравниваются по монотонному убыванию производной.

2. При вычислении величин  $\tau_1/4, \tau_1/2, P' = P^*(\tau_1/4), P'' = P^*(\tau_1/2)$  оказывается, что значения  $\tau_1/4, \tau_1/2$  часто не попадают в узлы массива времени  $T_i$ . Поэтому для нахождения значений  $P' = P^*(\tau_1/4), P'' = P^*(\tau_1/2)$  необходимо определять, какому интервалу времени принадлежат точки  $\tau_1/4, \tau_1/2$ , а затем, осуществляя линейную интерполяцию, находить  $P' = P^*(\tau_1/4), P'' = P^*(\tau_1/2)$ .

3. Перед выделением каждого следующего экспоненциального слагаемого на  $s$ -том шаге необходимо определять  $\tau_s = T_k$ ; для этого проверялись на однородность с помощью критерия Смирнова Н.В. точки  $R(T_{k+1}), \dots, R(T_N)$ , соответствующие разностям между опытными данными и выделенными слагаемыми. Они должны образовывать однородную совокупность, а точки  $R(T_1), \dots, R(T_k)$  - нет.

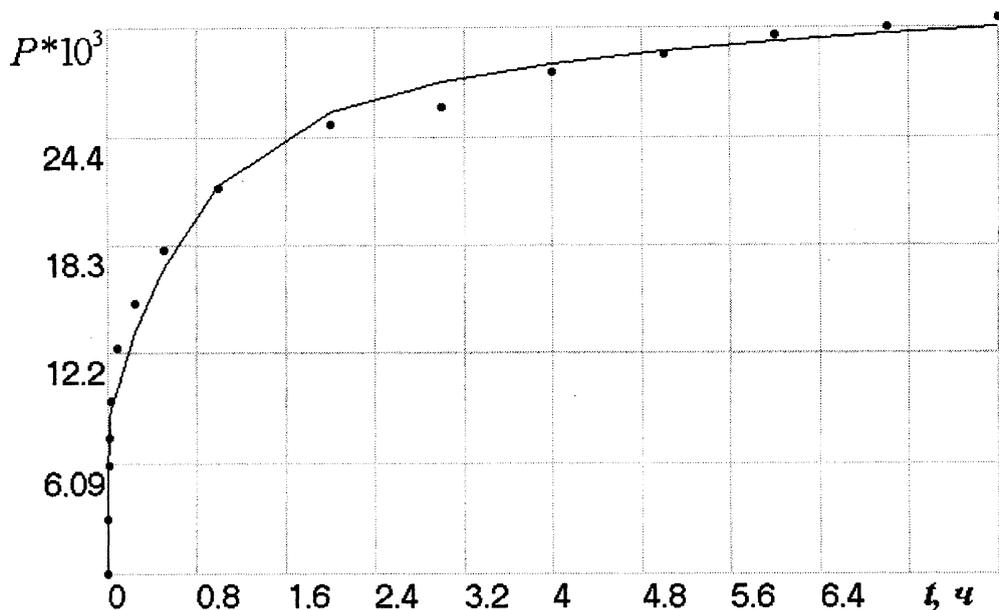
4. Окончание вычислительного процесса предусмотрено в случае, когда число оставшихся точек  $k \leq 3$ . Если  $k < 3$ , то полагалось  $\lambda_s = 10 \cdot \lambda_{s-1}$ , а  $c_s$  полагается равным  $R(T_1)$ . Если  $k = 3$ , то  $\lambda_s$  вычисляется по общим формулам, а  $c_s$  полагается равным  $R(T_1)$ .

5. Метод позволяет очень точно вычислять значения  $\lambda_i$ , однако в некоторых случаях точность вычисления коэффициентов  $c_i$  неудовлетворительна. В этом случае они уточняются с

помощью метода наименьших квадратов для функции  $f(t) = \sum_{i=1}^m c_i (1 - e^{-\lambda_i t})$ , где  $\lambda_i$  вычислены методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых. Поэтому соответствующая система МНК относительно  $c_i$  будет линейной.

В качестве примера на рис. 8 точками представлены экспериментальные данные по ползучести поливинилхлоридного пластината при  $T=20^\circ\text{C}$ . Машинная обработка выдает признак существования только первой стадии ползучести. Аппроксимация для данного образца (рис. 8) имеет вид

$$h(t) = [8.24(1 - e^{-0.24t}) + 15.11(1 - e^{-1.45t}) + 8.31(1 - e^{-250t})] \cdot 10^{-3}.$$



Р и с. 8. Аппроксимация ползучести полихлорвинилового пластината при  $T=20^{\circ}\text{C}$  и нагрузке  $\sigma = 6.29$  МПа

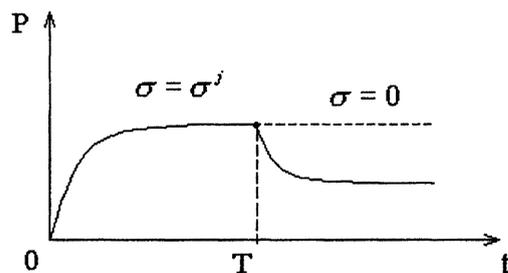
Аппроксимация по полученной формуле представлена на рис. 8 сплошной линией. Вводя далее упрощающую гипотезу подобия кривых ползучести  $p^{*j}$  для первой стадии, не составляет труда построить аппроксимацию для всей совокупности реализаций  $0 \leq j \leq r$  вида

$$h(t) = \sum_{i=1}^s c_i (1 - e^{-\lambda_i t}) \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n, \quad (9)$$

например, по методу наименьших квадратов.

Для определения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  необходимо иметь кривые обратной ползучести (рис. 9). Тогда вычисляя значения обратимой деформации  $u^j(t) = p^j(T) - p^j(t+T)$  и вводя гипотезу подобия  $u^j(t)$  и  $h^j(t) = u^j + v^j$ , найдем, что  $a_i = \beta c_i$ ,  $b_i = (1 - \beta)c_i$ , где  $\beta = \frac{u^j(t)}{h^j(t)}$

( $0 \leq \beta \leq 1$ ). При этом  $c_i = a_i + b_i$ . Таким образом, процедура определения всех параметров для описания кривой ползучести в пределах первых двух стадий закончена.



Р и с. 9. Кривая ползучести в режиме нагрузка-разгрузка

### 3. Вычисление характеристик пластической деформации с применением метода непараметрического выравнивания

Для определения характеристик модели (1)-(3), описывающих пластическую деформацию  $e^p$ , необходимо иметь стандартную диаграмму упругопластического деформирования. Полагая в соотношениях (1)-(3)  $p=0$ , получим модель упругопластического деформирования [7,13]:

$$\varepsilon = e + e^p + p; \quad \dot{e} = \frac{\dot{\sigma}}{E}; \quad \dot{e}^p = \chi S'(\sigma) \dot{\sigma}; \quad (10)$$

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \omega); \quad (11)$$

$$\dot{\omega} = \gamma \sigma \dot{e}^p, \quad (12)$$

где  $\gamma$  - параметр, аппроксимация которого в общем случае принимается в виде

$$\gamma = b_1 (e^p)^{m_1}. \quad (13)$$

Здесь  $b_1$  и  $m_1$  - константы материала (в частном случае возможно  $\gamma = \text{const}$ ).

Для аппроксимации функции  $S(\sigma)$  используется степенная функция вида

$$S(\sigma) = a(\sigma - \sigma_{np})^n, \quad (14)$$

где  $a$ ,  $n$  - константы материала;  $\sigma_{np}$  - предел упругости.

Для описания разрушения материала используется энергетический критерий (4) при  $p = 0$ , т. е. материал находится в неразрушенном состоянии, если  $A < A_*^p$ , где

$$A_*^p = \int_0^{e_*^p} \sigma de^p \quad (15)$$

– работа истинного напряжения на пластической деформации, соответствующая разрушению и являющаяся константой материала;  $e_*^p$  - деформация пластичности, соответствующая разрушению. Величина  $A^p$  - текущее значение работы истинного напряжения:

$$A^p = \int_0^{e^p} \sigma de^p.$$

Истинное напряжение задается формулой (11). Таким образом, из (15) следует, что разрушение образца наступает тогда, когда работа истинного напряжения на деформации пластичности достигает критического значения  $A_*^p$ . Для определения параметров  $a, n, \gamma, m_1, A_*^p$  необходимо иметь стандартную диаграмму мгновенного упругопластического деформирования. Рассматривая процесс нагружения с заданной скоростью нагружения  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 = \text{const}$ , имеем  $\dot{\sigma} > 0$ . Тогда из (10)-(12), (14) нетрудно получить соотношения

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(\int_0^{e^p} \gamma \sigma_0 de^p\right) \quad (16)$$

$$e^p = a \left[ \sigma_0 \exp\left(\int_0^{e^p} \gamma \sigma_0 de^p\right) - \sigma_{np} \right]^n. \quad (17)$$

При малых значениях пластической деформации  $e^p$  поврежденность  $\omega$  незначительна, истинное и номинальное напряжения отличаются мало и можно считать  $\sigma \approx \sigma_0$ . Тогда, используя начальный участок экспериментальной диаграммы упругопластического деформирования, легко определить параметры  $a$  и  $n$  аппроксимации (15) (например, по методу наименьших квадратов).

Определение параметра  $\gamma$  осуществляется численно [13,14]. Для этого используется ряд экспериментальных значений  $(e_i^p, \sigma_{oi})$  всей диаграммы деформирования, включая участок неустойчивого деформирования. Представляя значение интеграла в (17), например, по формуле прямоугольников, получаем

$$\gamma(e_i^p) = \frac{1}{\sigma_0 (e_i^p - e_{i-1}^p)} \ln \left[ \frac{\left(\frac{e_i^p}{a}\right)^{\frac{1}{n}} + \sigma_{np}}{\left(\frac{e_{i-1}^p}{a}\right)^{\frac{1}{n}} + \sigma_{np}} \cdot \frac{\sigma_{0(i-1)}}{\sigma_{0i}} \right]. \quad (18)$$

Зная дискретную зависимость  $\gamma(e_i^p)$  от  $(e_i^p)$ , можно построить либо аппроксимацию вида (13), либо принять гипотезу  $\gamma(e^p) = const$ . Далее с помощью зависимости  $\gamma(e^p)$  по (16) можно рассчитать величину истинного напряжения  $\sigma$ . Величина  $A_*^p$  определяется согласно формуле (15), где  $e_*^p$  -пластическая деформация, соответствующая точке разрушения на диаграмме деформирования образца.

Алгоритм автоматизированного вычисления параметров модели (10)-(15) с использованием ЭВМ на основании экспериментальных данных с учетом разброса результатов испытаний сводится к следующему. На первом этапе обработки опытных данных возникает задача отделения упругой деформации от пластической, т.е. фактически отделение линейного участка диаграммы от нелинейного. Для выделения стадии упругой деформации перейдем к конечно-разностной аппроксимации скоростей:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\right)_z = \frac{\Delta\varepsilon_z}{\Delta\sigma_z} = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{\sigma_{i+1} - \sigma_i}, \quad i = \overline{1, k-1},$$

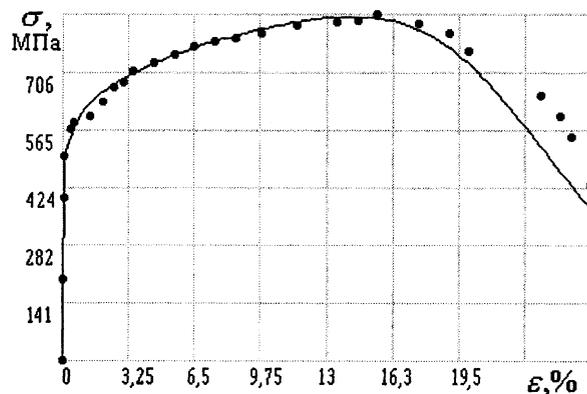
где  $k$  - индекс, соответствующий максимальному значению напряжения. Линейному участку диаграммы соответствует постоянная скорость деформации и его можно отделить с помощью модифицированного критерия Смирнова, рассмотренного выше. Взяв первую точку, присоединяем к ней следующую и проверяем справедливость критерия для получившейся совокупности. Если он выполняется, то присоединяем следующую точку и т.д. до тех пор, пока очередная точка не окажется не принадлежащей однородной совокупности. Эта точка будет соответствовать границе упругой и пластической деформаций (пределу упругости). Для описания упругого участка достаточно знать модуль Юнга

$$E = \frac{m}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_i},$$

где  $m$  - число точек на стадии упругой деформации.

Как указано выше, для определения констант  $a, n$  аппроксимации (14) используется начальный участок диаграммы упругопластического деформирования, на котором  $e^p$  составляет величину порядка 2-3%. Однако в эксперименте на этом участке наблюдается значительный разброс данных (кривая деформирования на этом участке может быть даже вогнутой) и непосредственная аппроксимация приведет к значительным погрешностям в описании кривой деформирования в целом (вплоть до разрушения). Поэтому предварительно данные, принадлежащие к этому участку, выравниваются по возрастанию и выпуклости с помощью метода непараметрического выравнивания и только после этого методом наименьших квадратов строится степенная функция (14).

Выравнивание участка диаграммы от значения деформации, соответствующей максимальному значению напряжения, до значения, соответствующего разрушению, по убыванию и выпуклости также оправдано, так как численные значения параметра  $\gamma(e_i^p)$ , определяемые по формуле (18) очень чувствительны к нерегулярностям исходных данных. После этого на основании экспериментальных данных строится аналитическая зависимость  $\gamma = b(e^p)^{m_1}$  ( $b$  и  $m_1$  вычисляются по МНК). Разрешая уравнение (17) относительно  $\sigma_0$ , получим неявную зависимость  $\sigma_0$  от  $e^p$  вида



Р и с. 9. Диаграмма упруго-пластического деформирования сплава АД-1 при температуре 20

$$\sigma_0 = \frac{\left[ \left( \frac{e^p}{a} \right)^{\frac{1}{n}} + \sigma_{np} \right]}{\exp \left( \int_0^{e^p} \gamma \sigma_0 d e^p \right)}. \quad (19)$$

Для построения теоретической зависимости  $\sigma_0 = \sigma_0(e^p)$  отрезок  $[0, e_*^p]$  разбивается на отрезки  $\Delta e^p$  и на каждом шаге (19) решается численно методом итераций. После достижения заданной точности на  $n$ -м шаге итерации в точке  $[\sigma_0^k, e_k^p]$  осуществляется переход к следующей и т.д., пока не будет пройден весь отрезок  $[0, e_*^p]$ .

Соотношение (19) дает теоретическую зависимость для номинальной (условной) диаграммы упругопластического деформирования в координатах  $\sigma_0 - e^p$ . В качестве примера на рис. 9 приведена расчетная диаграмма (сплошная линия) упругопластического деформирования для сплава АД-1 в координатах  $\sigma_0 - e^p$  (точки - экспериментальные значения).

#### 4. Метод расчета третьей стадии ползучести

После отделения I и II стадий и построения их аппроксимаций, а также определения параметров, описывающих деформацию пластичности, неизвестными являются лишь параметр  $\alpha$  в (3) и величина  $A_*^C$ .

В общем случае эти величины могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

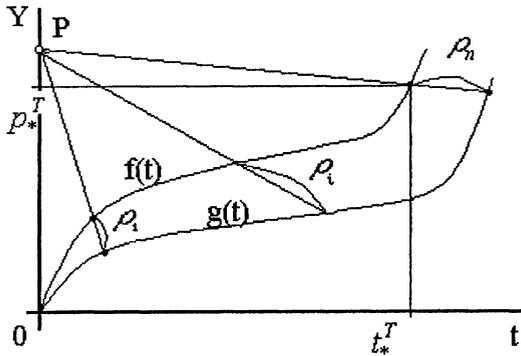
$$\alpha = \alpha_1 \sigma_0^{m_1}, \quad A_*^C = \alpha_A \sigma_0^{m_A}. \quad (20)$$

Определение величины  $\alpha$  при каждом фиксированном  $\sigma_0 = \sigma_0^j$  осуществлялось на основании критерия близости экспериментальной и расчетной кривой ползучести. Величина  $\alpha$  варьировалась и каждый раз система (1)-(3) решалась численно по методу Эйлера. Для оценки близости экспериментальной и расчетной кривых использовалось среднее статистическое (D) расстояний  $\rho$  между ними. Расстояния  $\rho$  вычислялись так, как показано на рис. 10. В зависимости от того, уменьшилось или увеличилось значение D по сравнению с предыдущим шагом, изменялась величина направления  $\Delta \alpha$ . Расчет осуществляется релаксационным методом до достижения величиной D минимального значения. При этом процесс повторяется для каждой кривой серии. Последней точкой на расчетной кривой является точка с координатами  $(p_*^T, t_*^T)$  (см. рис. 10). После определения величины  $\alpha$ , минимизирующей величину D при заданном  $\sigma_0$ , определялась величина  $A_*^C$  из соотношения (см. (4)):

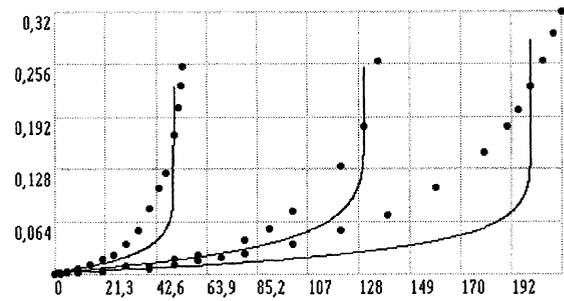
$$A_*^C = \int_0^{t_*^T} \sigma dp / \left[ 1 - \int_0^{t_*^T} \frac{\sigma de^p}{A_*^P} \right].$$

После нахождения  $\alpha^j$  и  $A_*^{Cj}$  при заданных  $\sigma_0^j$  строятся аппроксимации (20). В частных случаях возможны варианты  $\alpha = const$ ,  $A_*^C = const$ .

Результаты расчета на основании уравнений (1)-(4) приведены на рис. 11. Из рисунка видно хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных.



Р и с. 10. Расстояния между точками, вычисленные по направлениям, задаваемым пучком прямых:  $g(t)$  - экспериментальная кривая;  $f(t)$  - теоретическая



Р и с. 11. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) кривые для сплава ЭП693 при температуре  $750^{\circ}\text{C}$

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

В работе разработан ряд моделей, алгоритмов и программ, которые полностью позволяют автоматизировать процесс обработки экспериментальных данных и построения математической модели неупругого деформирования материалов. Важными решенными задачами, выходящими далеко за рамки рассмотренных в данной работе проблем, являются следующие:

- 1) реализован и апробирован метод выделения стадий ползучести, который может быть применен к любым процессам, имеющим стадии приработки, стабилизации свойств и деградации;
- 2) реализована методика вычисления параметров при аппроксимации кривых ползучести с применением методов непараметрического выравнивания опытных данных;
- 3) предложена модель упругопластического деформирования и разработана методика автоматизированного вычисления ее параметров;
- 4) разработан пакет прикладных программ, реализующий работу вычислительного комплекса, на высоком современном уровне с удобным и наглядным для пользователя вводом-выводом информации;
- 5) выполнена объемная работа по проверке адекватности и устойчивости работы всех заложенных в программы алгоритмов и методов в самых разнообразных ситуациях; выполнена обстоятельная экспериментальная проверка всех теоретических результатов с хорошей согласованностью расчетных и опытных данных.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю.П.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Биргер И.А.* и др. Термопрочность деталей машин. М.: Наука, 1976. 607 с.
3. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
4. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // ПМТФ. 1980. №3. С. 155-159.
5. *Самарин Ю.П.* О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. №1. С. 88-94.
6. *Радченко В.П.* Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // Проблемы прочности. 1992. №2. С. 34-40.
7. *Радченко В.П.* Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // ПМТФ. 1991. №4. С. 172-179.
8. *Радченко В.П.* Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // Вестн. СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки. Вып. 4. 1996. С. 43-63.
9. *Мухина Л.Г.* Вычисление характеристик ползучести по опытным данным с применением метода непараметрического выравнивания. // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях: Сб. науч. тр. Куйбышев: КИТИ, 1984. С. 86-94.

10. Мухина Л.Г., Самарин Ю.П. О непараметрическом выравнивании эмпирических зависимостей из условия монотонности // Математическая физика: Сб.тр. Куйбышев: КПТИ, 1979. С.129-133.
11. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1969. 511 с.
12. Самарин Ю.П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. №9. С. 24-27.
13. Радченко В.П., Кичаев Е.К. Феноменологическая реологическая модель и критерий разрушения металлов при одноосном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1991. №11. С. 13-19.
14. Радченко В.П., Симонов А.В. Вычисление характеристик феноменологической модели неупругого деформирования с применением метода непараметрического выравнивания // Математическое моделирование систем и процессов управления: Сб. тр. Самара: СамГТУ, 1997. С. 73-79.