УДК 539.214

Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова

О ВЛИЯНИИ УДАЛЕННОЙ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ НА РАСКРЫТИЕ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

Нагружение трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в поле остаточных напряжений (связанных с предыдущими циклами нагружения) может приводить к образованию двух очагов пластического течения: непосредственно у кончика трещины и в зоне максимального остаточного растяжения, которое в случае циклического нагружения достигает одной трети предела текучести. Моделируя по схеме Дагдейла пластические зоны отрезками, для определения трех безразмерных параметров, характеризующих положения пластических зон, получена система нелинейных уравнений, которая анализируется с помощью оригинального численного алгоритма, разработанного специально для этой цели. Получена точная формула для вычисления раскрытия трещины при двухзонно локализованных пластических деформациях. Асимптотический анализ величины раскрытия трещины для случая, когда линейный размер удаленной пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины, приводит к заключению, что влияние удаленной пластической зоны на трещину проявляется в форме ее дополнительного закрытия.

1. Постановка задачи и основные уравнения.

Исследование плоского напряженного состояния трещины нормального отрыва было впервые выполнено в работе [1]. В соответствии с экспериментальными данными предполагалось, что пластическая зона представляет собой отрезок, находящийся на продолжении линии трещины. С тех пор предложенная в [1] модель, известная как модель Дагдейла, широко используется для расчета напряженного состояния и вычисления раскрытия трещины в стальных пластинах [2].

Соответствующая подобной сильно локализованной у вершины трещины зоны текучести модель трещины основывается на следующих основных предположениях.

1. Элементы пластической зоны подвержены воздействию только нормального растягивающего напряжения, равного пределу текучести.

2. Толщина пластической зоны намного меньше, чем ее длина, так что внутренняя граница упругой зоны может рассматриваться как сильно сплющенный эллипс с большой полуосью равной $2(l+c)$, где $2l$ – длина трещины, c – длина пластической зоны.

3. Длина пластической зоны в точности такова, что пластическая зона полностью поглощает сингулярность поля нормальных напряжений.

В представляемой работе рассматривается нагружение пластины с трещиной нормального отрыва, при котором возникает дополнительная, удаленная от кончика трещины, зона пластического растяжения. Подобная ситуация, как показывают расчеты, действительно реализуется при циклическом нагружении с переменной амплитудой напряжений. Разгрузка трещины сопровождается мгновенным образованием у кончика трещины сжатой пластической зоны, в то время как на некотором удалении от кончика трещины возникает зона остаточного растяжения, в которой напряжения могут достигать трети от предела текучести. В этой последней зоне в течение последующих циклов нагружения могут локализоваться пластические деформации, образуя новый очаг пластического течения.

Вычисление параметров, определяющих локализацию зон пластического течения, сопряжено с решением сложной системы двух нелинейных уравнений и поэтому реализовано численно. Величина раскрытия трещины при повторном нагружении вычисляется с помощью полученной точной формулы, в которую входят только указанные параметры локализации. Эта формула тем самым позволяет оценить влияние удаленной пластической зоны на величину раскрытия трещины.

Рассмотрим трещину нормального отрыва $|x_1| \le l$ в пластине в условиях плоского напряженного состояния. Обозначим через Y предел текучести при одноосном растяжении.

Напряжения и перемещения представляются через единственный комплексный потенциал по формулам Колосова-Мусхелишвили [3]:

$$\sigma_{11}^* = 2\mathrm{Re}\left[\partial_z \varphi^*\right] - 2x_2 \mathrm{Im}\left[\partial_z^2 \varphi^*\right],\ \sigma_{22}^* = 2\mathrm{Re}\left[\partial_z \varphi^*\right] + 2x_2 \mathrm{Im}\left[\partial_z^2 \varphi^*\right],\ \sigma_{12}^* = -2x_2 \mathrm{Re}\left[\partial_z^2 \varphi^*\right]; \quad (1)$$

$$2Gu_1^* = (\kappa - 1)\mathrm{Re}\left[\varphi^*\right] - 2x_2 \mathrm{Im}\left[\partial_z \varphi^*\right],\ 2Gu_2^* = (\kappa + 1)\mathrm{Im}\left[\varphi^*\right] - 2x_2 \mathrm{Re}\left[\partial_z \varphi^*\right]. \quad (2)$$

в которых

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{11}, \sigma_{12}^* = \sigma_{12}, \sigma_{22}^* = \sigma_{22} - \hat{\sigma}_{22}^\infty,\ u_1^* = u_1,\ u_2^* = u_2 - x_2 E^{-1} \hat{\sigma}_{22}^\infty,\ \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu),$$

$\varphi^*(z)$ – комплексный потенциал, который является аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$ функцией комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; $\hat{\sigma}_{22}^\infty$ – нормальные растягивающие напряжения на бесконечности.

Обозначим через $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{u}_i$ напряжения и перемещения, а через $x_1 = l + \hat{c}$ – координату границы пластической зоны при первом нагружении напряжением $\hat{\sigma}_{22}^\infty$. В соответствии с решением Дагдейла находим:

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y} = 1 - \frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2\hat{\beta} + \xi}{(1+\xi)\sec\hat{\beta}} + \arcsin\frac{\sec^2\hat{\beta} - \xi}{(1-\xi)\sec\hat{\beta}}\right\} \quad \left(|\xi| \ge \sec\hat{\beta}\right); \quad (3)$$

$$\frac{\pi E \hat{u}_2}{2Yl} = -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln\cos\hat{\beta} + 2\ln(\sin\hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2\cos^2\hat{\beta}}) + \xi\ln\frac{\xi - 1}{\xi + 1} +$$

$$+\xi\ln\frac{\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}} + \xi\cos^2\hat{\beta} + 1}{\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}} - \xi\cos^2\hat{\beta} + 1}, \quad (1 \le |\xi| \le \sec\hat{\beta}); \quad (4)$$

$$\frac{\hat{c}}{l} = \sec\hat{\beta} - 1, \quad (5)$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x_1}{l},\ \hat{\beta} = \frac{\pi}{2Y}\hat{\sigma}_{22}^\infty. \quad (6)$$

Для исследования напряженно-деформированного состояния после разгрузки пластины введем следующие разности: $\Delta\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ и $\Delta u_i = \tilde{u}_i - \hat{u}_i$, где $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{u}_i$ – остаточные напряжения и перемещения, которые наблюдаются в пластине с трещиной после разгрузки. Основой последующего анализа является предположение о том, что после снятия нагрузки у вершины трещины мгновенно происходит перераспределение напряжений: нормальные растягивающие напряжения на пределе текучести мгновенно сменяются сжимающими, равными пределу текучести при сжатии. Таким образом, поле остаточных напряжений сжимает вершину трещины, что приводит к ее закрытию. Что касается перемещений, то поскольку снятие нагрузки за пределами локализованной зоны сжатия приводит к обратному переходу из пластичности в упругое состояние, то изменения нормальных перемещений вне указанной зоны остаточного сжатия не происходит.

Исходя из приведенного выше анализа, для определения комплексного потенциала $\Delta\varphi^*$ граничные условия могут быть сформулированы в виде

$$\Delta\sigma_{22}^* = \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (|x_1| \le l,\ x_2 = 0);\ \Delta\sigma_{22}^* = -2Y + \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (l \le |x_1| \le l + \tilde{c},\ x_2 = 0);$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad (|x_1| \ge l + \tilde{c},\ x_2 = 0),\ \partial_z \Delta\varphi^*(z) = O(z^{-2}) \quad (z \to \infty), \tag{7}$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} + \hat{\sigma}_{22}^{\infty}$, $x_1 = l + \tilde{c}$ – координата остаточной сжатой пластической зоны.

Предполагается (и это подтверждается полученным решением), что при повторном нагружении пластины растягивающим напряжением $\breve{\sigma}_{22}^{\infty}$ образуются две локализованные пластические зоны $l \le x_1 \le l + \breve{c}$ и $l + c' \le x_1 \le l + c''$, первая из которых примыкает к вершине трещины, а вторая находится на некотором удалении от первой.

Относительно разностей $\Delta\sigma_{ij} = \breve{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}$ и $\Delta u_i = \breve{u}_i - \tilde{u}_i$ снова получается упругая задача с граничными условиями вида

$$\Delta\sigma_{22}^* = 2Y - \breve{\sigma}_{22}^{\infty} \quad (l \le |x_1| \le l + \breve{c},\ x_2 = 0),\ \Delta\sigma_{22}^* = 2Y - \breve{\sigma}_{22}^{\infty} \quad (l \le |x_1| \le l + \breve{c},\ x_2 = 0);$$

$$\Delta\sigma_{22}^* = Y - \tilde{\sigma}_{22} - \breve{\sigma}_{22}^{\infty} \quad (l + c' \le |x_1| \le l + c'',\ x_2 = 0); \tag{8}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad (l + \breve{c} \le |x_1| \le l + c',\ x_2 = 0;\ \ |x_1| \ge l + c'',\ x_2 = 0),\ \partial_z \Delta\varphi^*(z) = O(z^{-2}) \quad (z \to \infty),$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} - \breve{\sigma}_{22}^{\infty}$.

Граничные задачи (7), (8) относительно потенциала $\Delta\varphi^*$ сводятся к смешанной задаче теории аналитических функций для верхней полуплоскости, которая может быть эффективно разрешена с помощью интегралов типа Коши [4], анализ которых в случае дополнительной пластической зоны представляет, однако, значительные трудности.

Решение граничной задачи (7) может быть получено в замкнутом виде. Для определения комплексного потенциала $\Delta\varphi^*$ может быть получено следующее уравнение:

$$\frac{d\Delta\varphi^*(z)}{dz} = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2}} \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{22}^{\infty} - 2Y}{2} \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt + Y \int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt \right\}, \tag{9}$$

где аналитическая ветвь корня определяется условием

$$\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} = z - \frac{(l + \tilde{c})^2}{2z} + \cdots \qquad (z \to \infty).$$

Интегралы в формуле (9), по существу, аналогичные тем, которые входят в схему Дагдейла, вычисляются явно как это приводится ниже:

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt = -\pi\left(\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} - z\right) \qquad (z \notin [-l - \tilde{c},\ l + \tilde{c}]); \tag{10}$$

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -\pi x_1 \qquad (x_1 \in [-l - \tilde{c},\ l + \tilde{c}]); \tag{11}$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - z} dt = -2z \arcsin\frac{l}{l + \tilde{c}} + \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} \ln\frac{z - l}{z + l} +$$

$$+ \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} \ln\frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - l^2}\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} + (l + \tilde{c})^2 + zl}{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - l^2}\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} + (l + \tilde{c})^2 - zl} \qquad (z \notin [-l,\ l]); \tag{12}$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -2x_1 \arcsin\frac{l}{l + \tilde{c}} + \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - x_1^2} \ln\left|\frac{x_1 - l}{x_1 + l}\right| +$$

$$+\sqrt{(l+\tilde{c})^2-x_1^2}\,\ln\frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2-l^2}\sqrt{(l+\tilde{c})^2-x_1^2}+(l+\tilde{c})^2+x_1 l}{\sqrt{(l+\tilde{c})^2-l^2}\sqrt{(l+\tilde{c})^2-x_1^2}+(l+\tilde{c})^2-x_1 l}\ (|x_1|\le l+\tilde{c})\,; \tag{13}$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2-t^2}}{t-x_1}dt=-2x_1\arcsin\frac{l}{l+\tilde{c}}+\sqrt{x_1^2-(l+\tilde{c})^2}\,\times$$

$$\times\left\{\arcsin\frac{(l+\tilde{c})^2+x_1 l}{(l+x_1)(l+\tilde{c})}+\arcsin\frac{(l+\tilde{c})^2-x_1 l}{(l-x_1)(l+\tilde{c})}\right\}\qquad(|x_1|\ge l+\tilde{c})\,. \tag{14}$$

В приведенных выше формулах $\sqrt{(l+\tilde{c})^2-z^2}$ обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные положительные значения, если $z\in(-l-\tilde{c},l+\tilde{c})$, символ ln обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные значения, если $l<z<l+\tilde{c}$.

Длина остаточной пластической зоны вычисляется по формуле

$$\frac{\tilde{c}}{l}=\sec\frac{\hat{\beta}}{2}-1\,. \tag{15}$$

Поле остаточных напряжений определяется в виде

$$\frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y}=-1-\frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2\hat{\beta}+\xi}{(1+\xi)\sec\hat{\beta}}+\arcsin\frac{\sec^2\hat{\beta}-\xi}{(1-\xi)\sec\hat{\beta}}\right\}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2(\hat{\beta}/2)+\xi}{(1+\xi)\sec(\hat{\beta}/2)}+\arcsin\frac{\sec^2(\hat{\beta}/2)-\xi}{(1-\xi)\sec(\hat{\beta}/2)}\right\}\qquad\left(|\xi|\ge\sec\hat{\beta}\right); \tag{16}$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y}=-1+\frac{2}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2(\hat{\beta}/2)+\xi}{(1+\xi)\sec(\hat{\beta}/2)}+\arcsin\frac{\sec^2(\hat{\beta}/2)-\xi}{(1-\xi)\sec(\hat{\beta}/2)}\right\}\quad(\sec\frac{\hat{\beta}}{2}\le|\xi|\le\sec\hat{\beta})\,; \tag{17}$$

Остаточные перемещения определяются в виде

$$\frac{\pi E\tilde{u}_2}{2Yl}=2\ln\frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos\hat{\beta}}+2\ln\frac{\sin\hat{\beta}+\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}}}{[\sin(\hat{\beta}/2)+\sqrt{1-\xi^2\cos^2(\hat{\beta}/2)}]^2}-\xi\ln\frac{\xi-1}{\xi+1}+\ln(\xi^2-1)+$$

$$+\xi\ln\frac{(\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}}+\xi\cos^2\hat{\beta}+1)(\sin(\hat{\beta}/2)\sqrt{1-\xi^2\cos^2(\hat{\beta}/2)}-\xi\cos^2(\hat{\beta}/2)+1)^2}{(\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}}-\xi\cos^2\hat{\beta}+1)(\sin(\hat{\beta}/2)\sqrt{1-\xi^2\cos^2(\hat{\beta}/2)}+\xi\cos^2(\hat{\beta}/2)+1)^2}$$

$$(1\le|\xi|\le\sec(\hat{\beta}/2))\,; \tag{18}$$

$$\frac{\pi E\tilde{u}_2}{2Yl}=-\ln(\xi^2-1)-2\ln\cos\hat{\beta}+2\ln(\sin\hat{\beta}+\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}})+$$

$$+\xi\ln\frac{(\xi-1)(\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}}+\xi\cos^2\hat{\beta}+1)}{(\xi+1)(\sin\hat{\beta}\sqrt{1-\xi^2\cos^2\hat{\beta}}-\xi\cos^2\hat{\beta}+1)}\qquad(\sec(\hat{\beta}/2)\le|\xi|\le\sec\hat{\beta})\,. \tag{19}$$

Как следует из приведенного решения, вблизи кончика трещины поле остаточных напряжений является сжимающим и стремится закрыть трещину. По мере удаления от трещины, сжимающие напряжения сменяются растягивающими. Максимум остаточного растягивающего напряжения достигается у правой границы пластической зоны, сформировавшейся непосредственно перед разгрузкой и равен

$$\max\frac{\breve{\sigma}_{22}}{Y}=-1+\frac{2}{\pi}\left\{\arcsin\frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2)-1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)}+\arcsin\frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2}\right\}. \tag{20}$$

При малых значениях отношения $\hat{\sigma}_{22}^{\infty}/Y$ этот максимум достигает значительной величины, равной одной трети предела текучести.

Безразмерная координата точки, в окрестности которой остаточное сжатие переходит в остаточное растяжение, есть

$$\xi=\sqrt{\sec\hat{\beta}}\,.$$

Решению, таким образом, подлежит краевая задача с условиями (8), в которых остаточное поле напряжений вычисляется по формулам (16), (17).

2. Локализация пластических деформаций при повторном нагружении.

Решение граничной задачи (8) имеет вид

$$2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^*=-\left(2Y-\breve{\sigma}_{22}^{\infty}\right)\int\limits_{-(l+\breve{c})}^{l+\breve{c}}\frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z}dt+2Y\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z}dt+4zY\int\limits_{l+c'}^{l+c''}h(t)\frac{\sqrt{|G(t)|}}{t^2-z^2}dt+C_1z\,. \tag{21}$$

В последней формуле использованы следующие обозначения:

$$G(z)=[z^2-(l+c'')^2][z^2-(l+c')^2][z^2-(l+\breve{c})^2]\,,\ 2Yh(x_1)=Y-\tilde{\sigma}_{22}-\breve{\sigma}_{22}^{\infty}\,. \tag{22}$$

Помимо неизвестных параметров локализации пластических деформаций, определению подлежит также и константа C_1.

Устраняя сингулярность в формуле (21), приходим к условиям на границах пластических зон:

$$\lim_{z\to l+\breve{c}}(2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^*)=0\,,\ \lim_{z\to l+c'}(2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^*)=0\,,\ \lim_{z\to l+c''}(2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^*)=0\,. \tag{23}$$

Введем три безразмерных параметра, характеризующих положение очагов пластических деформаций

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{l+\breve{c}}{l}\,,\ \frac{1}{\Delta'}=\frac{l+c'}{l+\breve{c}}\,,\ \frac{1}{\Delta''}=\frac{l+c''}{l+\breve{c}} \tag{24}$$

и еще одно безразмерное отношение

$$\Sigma=\frac{\breve{\sigma}_{22}^{\infty}}{2Y}\,. \tag{25}$$

Условия устранения сингулярностей в граничных точках пластических зон примут тогда форму

$$\frac{1-\Sigma}{\Delta^2}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}}dq+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2\Delta''^2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq+\frac{C_1}{2Yl^2}=0\,;$$

$$\frac{1-\Sigma}{\Delta^2}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta'^{-2}-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}dq+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2\Delta''^2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1} h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2)}{q(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq+\frac{C_1}{2Yl^2}=0\,;$$

$$\frac{1-\Sigma}{\Delta^2}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}dq-$$

$$-\frac{1}{\Delta^2\Delta''^2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}} h(q)\sqrt{\frac{(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})(q-\Delta''^2)}{q(1-q)}}dq+\frac{C_1}{2Yl^2}=0\,,$$

где $h(q)=1-\Sigma\ (\ (\Delta\Delta''\sec(\hat\beta/2))^2\ge q)$;

$$h(q)=1-\Sigma-\frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2(\hat\beta/2)+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\qquad(\hat\beta/2)}+\arcsin\frac{\sec^2(\hat\beta/2)-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\qquad(\hat\beta/2)}\right\}$$

$$(\ (\Delta\Delta''\sec(\hat\beta/2))^2\le q\le(\Delta\Delta''\sec\hat\beta)^2)\,;$$

$$h(q)=1-\Sigma-\frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2(\hat\beta/2)+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat\beta/2)}+\arcsin\frac{\sec^2(\hat\beta/2)-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat\beta/2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\arcsin\frac{\sec^2\hat\beta+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1+(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat\beta}+\arcsin\frac{\sec^2\hat\beta-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1-(\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat\beta}\right\}$$

$$(\ q\ge(\Delta\Delta''\sec\hat\beta)^2)\,.$$

Полученная система уравнений после вычитания второго уравнения из третьего, а третьего уравнения из первого приобретает вид (первое уравнение сохраняется неизменным, но становится последним по порядку следования)

$$(1-\Sigma)\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-q}{q(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}dq+$$

$$+\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1} h(q)\sqrt{\frac{q-\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta'^{-2}\Delta''^2)}}dq=0\,;$$

$$(1-\Sigma)\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta'^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta''^{-2}-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}dq+$$

$$+\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1} h(q)\sqrt{\frac{q-\Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta''^2)}}dq=0\,; \qquad (26)$$

$$\frac{1-\Sigma}{\Delta^2}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}}dq-\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}}dq+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2\Delta''^2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}} h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq+\frac{C_1}{2Yl^2}=0\,.$$

Полученная система уравнений (2.6) может быть также представлена в сжатой форме:

$$(1-\Sigma)J_{13}-J_{11}+L_{12}=0;\ (1-\Sigma)J_{23}-J_{21}+L_{22}=0;$$

$$(1-\Sigma)I_{33}-\Delta^2 I_{31}+\Delta''^{-2}S_{32}+(2Y)^{-1}l^{-2}\Delta^2 C_1=0, \qquad (27)$$

или, предполагая, что длина удаленной пластической зоны значительно меньше длины трещины и заменяя функцию $h(q)$ ее максимальным значением,

$$(1-\Sigma)J_{13}-J_{11}+h_c J_{12}=0;\ (1-\Sigma)J_{23}-J_{21}+h_c J_{22}=0;$$

$$(1-\Sigma)I_{33}-\Delta^2 I_{31}+\Delta''^{-2}h_c I_{32}+(2Y)^{-1}l^{-2}\Delta^2 C_1=0, \qquad (28)$$

где введены следующие обозначения:

$$J_{11}=\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}dq;\quad J_{12}=\int_{\Delta''^2\Delta'^2}^1\sqrt{\frac{q-\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta'^{-2}\Delta''^2)}}dq;$$

$$L_{12}=\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q)\sqrt{\frac{q-\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta'^{-2}\Delta''^2)}}dq;\quad J_{13}=\int_0^1\sqrt{\frac{1-q}{q(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}}dq;$$

$$J_{21}=\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q}{q\left(\Delta^{-2}-q\right)\left(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q\right)}}dq;\quad J_{22}=\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1\sqrt{\frac{q-\Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta''^2)}}dq;$$

$$L_{22}=\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q)\sqrt{\frac{q-\Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta''^2)}}dq;\quad J_{23}=\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta'^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta''^{-2}-q)}}dq;$$

$$I_{31}=\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}}dq;\quad I_{33}=\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}}dq;$$

$$I_{32}=\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq;\quad S_{32}=\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq;$$

$$h_c=1-\Sigma-\frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{3\cos^2(\hat\beta/2)-1}{2\cos^3(\hat\beta/2)}+\arcsin\frac{\sec(\hat\beta/2)}{2}\right\}.$$

Для определения константы C_1 (или безразмерного отношения $\Delta^2 C_1/(2Yl^2)$) необходимо дополнительное уравнение. Наиболее простой путь получить это дополнительное условие описывается ниже.

Прежде всего заметим, что из непрерывности нормальных перемещений на границах удаленной пластической зоны следуют условия

$$\Delta u_2^*(l+c',0)=0,\ \Delta u_2^*(l+c'',0)=0. \qquad (29)$$

Интегрируя частную производную

$$\frac{\partial\Delta u_2^*}{\partial x_1}(x_1,0)$$

вдоль удаленной пластической зоны и учитывая формулы (29), получим уравнение

$$\int_{l+c'}^{l+c''}\frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1}dx_1=0, \qquad (30)$$

в котором в силу (2) подынтегральное выражение выражается в форме

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\Delta u_2^*}{}(x_1,0)=\frac{\kappa+1}{2G}\operatorname{Im}\left[\partial_z\Delta\varphi^*\right]. \tag{31}$$

Подставляя (21) в это последнее уравнение и затем интегрируя (31) вдоль удаленной пластической зоны, находим с помощью формулы (30), что (см. [5], формулы 235.00, 235.17)

$$\frac{C_1\Delta^2}{2Yl^2}=-\frac{\Delta'^{-2}-1}{\mathbf{K}(s)}\left\{\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}h(q)\sqrt{\frac{1-q}{q\left(q-\Delta''^2\right)\left(q-\Delta''^2\Delta'^{-2}\right)}}\Pi\left(\alpha_2^2,s\right)dq+\right.$$

$$+\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}\Pi(\alpha_1^2,s)dq-$$

$$\left.-(1-\Sigma)\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}\Pi(\alpha^2,s)dq\right\}-\frac{1}{\Delta''^2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq-$$

$$-(1-\Sigma)\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}}dq+\Delta^2\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}}dq, \tag{32}$$

где

$$\alpha^2=s^2\frac{1-q}{\Delta'^{-2}-q};\alpha_1^2=s^2\frac{\Delta^{-2}-q}{\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q};\alpha_2^2=s^2\frac{q-\Delta''^2}{q-\Delta''^2\Delta'^{-2}};\quad s^2=\frac{\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2}-1}. \tag{33}$$

Альтернативное представление может быть получено с помощью формулы ([6], формула 1.2.27.5)

$$\int\limits_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}}\sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2}-\theta)(\theta-\Delta'^{-2})(\theta-1)}}\frac{d\theta}{\theta'-\theta}=-\frac{2}{(\Delta''^{-2}-\theta')\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\Pi(\omega^2,s),$$

где $\omega^2=\dfrac{\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2}-\theta'}$.

В результате преобразований вместо (32) получается уравнение (см. также [5], формула 235.00)

$$\frac{C_1\Delta^2\mathbf{K}(s)}{2Yl^2}=\Delta''^{-2}\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}h(q)\sqrt{\frac{(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(1-q)}}\Pi(\omega_1^2,s)dq+$$

(2.14)

$$+\Delta^2\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega_2^2,s)dq-(1-\Sigma)\int\limits_0^1\sqrt{\frac{(1-q)\left(\Delta'^{-2}-q\right)}{q\left(\Delta''^{-2}-q\right)}}\Pi(\omega^2,s)dq, \tag{34}$$

где $\omega^2=\dfrac{\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2}-q}$; $\omega_1^2=\dfrac{1-\Delta''^2\Delta'^{-2}}{1-q}$; $\omega_2^2=\dfrac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2}\Delta^{-2}}{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}$.

С учетом уравнения (32) третье уравнение системы (27) примет вид

$$-(1-\Sigma)J_{33}+J_{31}+L_{32}=0, \tag{35}$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны,

$$-(1-\Sigma)J_{33}+J_{31}+h_cJ_{32}=0, \tag{36}$$

где $J_{31} = \int_0^1 \Pi(\alpha_2, s)\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)}}dq$; $J_{33} = \int_0^1 \Pi(\alpha_2, s)\sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}}dq$;

$$J_{32} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 \Pi(\alpha_2, s)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^{2})(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}}dq;$$

$$L_{32} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q)\Pi(\alpha_2, s)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^{2})(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}}dq.$$

Константа C_1 при этом вычисляется по формуле

$$\frac{C_1\Delta^2}{2Yl^2} = -\Delta''^{-2}\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}}dq + \Delta^2\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}}dq -$$

$$-(1-\Sigma)\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}}dq. \qquad (37)$$

Уравнения (35), (36) заменяют третье уравнение систем (27), (28) соответственно. Из полученных таким образом систем уравнений может быть исключен параметр $(1-\Sigma)$, а параметр Δ может быть принят в качестве независимого параметра нагружения.

Итак, решению относительно параметров локализации пластических деформаций Δ', Δ'' подлежит система уравнений

$$\frac{J_{31}-\Lambda_{32}}{J_{33}-J_{32}} = \frac{J_{21}+\Lambda_{22}}{J_{23}+J_{22}}, \quad \frac{J_{11}+\Lambda_{12}}{J_{13}+J_{12}} = \frac{J_{21}+\Lambda_{22}}{J_{23}+J_{22}}, \qquad (38)$$

где $\Lambda_{12} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 H(q)\sqrt{\frac{q-\Delta''^2}{q(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq$; $\Lambda_{22} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 H(q)\sqrt{\frac{q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}{q(1-q)(q-\Delta''^{2})}}dq$;

$$\Lambda_{32} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 H(q)\Pi(\alpha_2, s)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq; \qquad H(q) = 1-\Sigma-h(q),$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, система

$$\frac{J_{31}-\hat{h}J_{32}}{J_{33}-J_{32}} = \frac{J_{21}+\hat{h}J_{22}}{J_{23}+J_{22}}, \quad \frac{J_{11}+\hat{h}J_{12}}{J_{13}+J_{12}} = \frac{J_{21}+\hat{h}J_{22}}{J_{23}+J_{22}}, \qquad (39)$$

где $\hat{h} = \frac{1}{\pi}\left\{\arcsin\frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2)-1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin\frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2}\right\}$.

Укажем ряд канонических представлений интегралов, с помощью которых формулируются разрешающие системы уравнений через эллиптические интегралы Лежандра:

$$J_{11} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left\{\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2}-1)F(\Omega, \Delta's)\right\};$$

$$J_{21} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left\{\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's)\right\};$$

$$J_{12}=\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\Pi(s^2,\Delta's)\ ;\quad J_{22}=\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left[\Pi(s^2,\Delta's)-\boldsymbol{K}(\Delta's)\right];\quad (40)$$

$$J_{13}=\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left\{-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}\right\};$$

$$J_{23}=\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left\{-\Pi(s^2,\Delta's)+\boldsymbol{K}(\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}\right\},$$

где $\sigma^2=\dfrac{-1}{\Delta''^{-2}-1}$, $\sin^2\Omega==\dfrac{\Delta''^{-2}-1}{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-1}$.

Следует отметить также следующие соотношения:

$$J_{22}-J_{12}=-\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\boldsymbol{K}(\Delta's);\quad J_{11}-J_{21}=-\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}F(\Omega,\Delta's);$$

$$J_{22}+J_{23}=J_{12}+J_{13}=\frac{\pi\Delta'(\Delta'^{-2}-1)}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}.$$

С помощью канонических представлений (40) и первых двух уравнений системы (28) находим

$$1-\Sigma-h_c=\frac{\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)-(\Delta'^{-2}-1)h_c\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}}{(\Delta'^{-2}-1)\left[-\Pi(s^2,\Delta's)+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}\right]}-$$

$$-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{(\Delta'^{-2}-1)\left[-\Pi(s^2,\Delta's)+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}\right]};$$

$$1-\Sigma-h_c=\frac{\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)-(\Delta'^{-2}-1)h_c\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}}{(\Delta'^{-2}-1)\left[-\Pi(s^2,\Delta's)+\mathrm{K}(\Delta's)+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}\right]}.$$

Полученные уравнения затем после ряда преобразований приводятся к следующему виду:

$$\boldsymbol{K}(\Delta's)\hat{h}=F(\Omega,\Delta's);\qquad (41)$$

$$1-\Sigma-\hat{h}=\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)}\times\left\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\right.\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\left(1-s^2\right)\left(1-\Delta'^2\right)}}\Bigg]+\quad \Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\quad \sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\Bigg\}. \tag{42}$$

Уравнение (36) на основании (42) преобразуется к виду

$$\int_0^1 \Pi(\alpha_2,s)\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}dq-\frac{F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\int_0^1 \Pi(\alpha_2,s)\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}dq=$$

$$=\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)}\Bigg\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-s^2)^{-1}(1-\Delta'^2)^{-1}}\right]+$$

$$+\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\Bigg\}\Bigg\{\int_0^1 \Pi(\alpha_2,s)\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}dq-$$

$$-\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}} \Pi(\alpha_2,s)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq\Bigg\}. \tag{43}$$

Таким образом, уравнения (41), (43) образуют систему уравнений для определения параметров локализации пластического течения, пригодную для использования в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, т. е. $\Delta''^2\Delta'^{-2}\approx 1$. Напомним также, что величина Δ должна выступать в качестве параметра нагружения.

С помощью уравнения (42) уравнение (34) в случае $\Delta''^2\Delta'^{-2}\approx 1$ сводится к следующему:

$$\frac{C_1\Delta^2\mathbf{K}(s)}{2Yl^2}=\Delta^2\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega_2^2,s)dq-\frac{F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\int_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega^2,s)dq-$$

$$-\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)}\Bigg\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-s^2)^{-1}(1-\Delta'^2)^{-1}}\right]+$$

$$+\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\Bigg\}\Bigg\{\int_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega^2,s)dq-$$

$$-\Delta''^{-2}\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1\sqrt{\frac{\left(q-\Delta''^2\right)\left(q-\Delta''^2\Delta'^{-2}\right)}{q\left(1-q\right)}}\Pi\left(\omega_1^2,s\right)dq\Bigg\}. \tag{44}$$

Численный анализ локализации пластических деформаций проводился в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны. Система (39) была заменена эквивалентной системой уравнений

$$\frac{\hat{h}J_{22}+J_{21}}{J_{22}+J_{23}}=\frac{\hat{h}I_{21}-I_{23}}{I_{21}-I_{22}}; \tag{45}$$

$$\frac{\hat{h}J_{32}-J_{31}}{J_{32}-J_{33}}=\frac{\hat{h}I_{21}-I_{23}}{I_{21}-I_{22}}, \tag{46}$$

в которой

$$I_{21}=\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq\,;\quad I_{22}=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}dq;$$

$$I_{23}=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}dq. \tag{47}$$

Численное решение системы уравнений (45) и (46) относительно параметров локализации Δ' и Δ'' сопряжено со значительными трудностями и требует значительных затрат времени. Для оптимизации счета был специально разработан алгоритм ускоренного вычисления входящих в уравнения квадратур, основанный на разложении эллиптических интегралов в ускоренно сходящиеся ряды Фурье. Численные расчеты, которые проводились для случая, когда линейный размер удаленной локализованной пластической зоны значительно меньше длины трещины, подтверждают разрешимость указанной системы и, таким образом, также обосновывают предлагаемую схему локализации пластических деформаций.

Если характерный линейный размер удаленной пластической зоны нельзя считать малым по сравнению с длиной трещины, то система уравнений (45) и (46) должна быть заменена на

$$\frac{\Lambda_{22}+J_{21}}{J_{22}+J_{23}}=\frac{\Lambda_{21}-I_{23}}{I_{21}-I_{22}},\quad \frac{\Lambda_{32}-J_{31}}{J_{32}-J_{33}}=\frac{\Lambda_{21}-I_{23}}{I_{21}-I_{22}},$$

где $\Lambda_{21}=\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}H(q)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}dq$.

3. Вычисление раскрытия трещины при двухзонной локализации пластических деформаций.

Раскрытие трещины — один из важнейших параметров механики разрушения. Поэтому оценка влияния удаленной пластической зоны на трещину может быть выполнена на основе вычисления изменения раскрытия трещины, обусловленного влиянием второго очага локализации пластических деформаций. В принципе, для точного определения раскрытия трещины необходимо дополнительно учесть изменение геометрии берегов трещины, искаженных остаточными перемещениями. Однако перенос граничных условий на деформированные берега трещины делает невозможным аналитический анализ проблемы. В дальнейшем предполагается, что граничные условия формулируются на неискаженных берегах трещины.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1}(x_1,0)=\frac{\kappa+1}{2G}\mathrm{Im}[\partial_z\Delta\varphi^*], \tag{48}$$

интегрируя которое вдоль пластической зоны, примыкающей к кончику трещины, получим

$$-\Delta u_2(l,0)=\frac{\kappa+1}{2G}\int\limits_{l}^{l+\bar c}\mathrm{Im}[\partial_z\Delta\varphi_*]dx_1\,. \tag{49}$$

Раскрытие трещины поэтому может быть вычислено по формуле

$$\frac{\pi E\bar u_2}{4Yl}=\ln\frac{\cos^2(\hat\beta/2)}{\cos\hat\beta}-\frac{\pi}{Yl}\int\limits_{l}^{l+\bar c}\mathrm{Im}[\partial_z\Delta\varphi_*]dx_1\,. \tag{50}$$

Второе слагаемое в правой части полученного уравнения может быть вычислено только через три параметра локализации пластических деформаций Δ,Δ',Δ'', как показано ниже.

Используя формулу (21), получим

$$-\frac{\pi}{Yl}\int\limits_{l}^{l+\bar c}\mathrm{Im}[\partial_z\Delta\varphi^*]\,dx_1=\frac{C_1\Delta}{4Yl^2}\int\limits_{\Delta^2}^{1}\frac{d\theta}{\sqrt{(\Delta''^{-2}-\theta)(\Delta'^{-2}-\theta)(1-\theta)}}+$$

$$+\frac{\Delta}{2}\int\limits_{\Delta^2}^{1}\frac{d\theta}{(\theta'-\theta)\sqrt{(\Delta''^{-2}-\theta)(\Delta'^{-2}-\theta)(1-\theta)}}\int\limits_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}}h(\theta')\sqrt{\frac{(\Delta''^{-2}-\theta')(\theta'-\Delta'^{-2})(\theta'-1)}{\theta'}}d\theta'+$$

$$+\frac{\Delta}{2}\int\limits_{\Delta^2}^{1}\frac{d\theta}{(\theta'-\theta)\sqrt{(\Delta''^{-2}-\theta)(\Delta'^{-2}-\theta)(1-\theta)}}\int\limits_{0}^{\Delta^2}\sqrt{\frac{(\Delta''^{-2}-\theta')(\Delta'^{-2}-\theta')(1-\theta')}{\theta'}}\,d\theta-$$

$$-\frac{\Delta}{2}(1-\Sigma)\int\limits_{\Delta^2}^{1}\frac{d\theta}{(\theta'-\theta)\sqrt{(\Delta''^{-2}-\theta)(\Delta'^{-2}-\theta)(1-\theta)}}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{(\Delta''^{-2}-\theta')(\Delta'^{-2}-\theta')(1-\theta')}{\theta'}}d\theta'\ .$$

Вводя обозначение

$$\sin^2\gamma=\frac{1-\Delta^2}{\Delta'^{-2}-\Delta^2}, \tag{51}$$

можно заключить, что

$$-\frac{\pi\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}{Y\Delta l}\int\limits_{l}^{l+\bar{c}}\mathrm{Im}[\partial_z\Delta\varphi^*]\qquad dx_1=\frac{C_1}{2Yl^2}F(\gamma,s)-$$

$$-\int\limits_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^{1}h(q)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_2^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_1^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-(1-\Sigma)\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq\,, \tag{52}$$

где $\beta^2=\dfrac{q-\Delta'^{-2}}{q-1}$; $\beta_1^2=\dfrac{q-\Delta^{-2}\Delta'^{-2}}{q-\Delta^{-2}}$; $\beta_2^2=\dfrac{q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}{q-\Delta''^{2}}$.

Подставляя формулу (52) в (50) и выражение для $(1-\Sigma)$, согласно уравнению (42), предполагая тем самым малым размер удаленной пластической зоны, после многочисленных преобразований получим

$$\frac{\pi E\breve{u}_2\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}{4\Delta Yl}=\Delta^{-1}\sqrt{\Delta''^{-2}-1}\ln\frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos\hat{\beta}}+\frac{C_1}{2Yl^2}F(\gamma,s)-$$

$$-\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_1^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-\frac{F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)}\left\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-s^2)^{-1}(1-\Delta'^2)^{-1}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\right\}\times$$

$$\left\{\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq+\right.$$

$$\left.+\int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_2^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq\right\}. \qquad (53)$$

Если исключить теперь константу C_1 из последнего уравнения с помощью соотношения (44), то для вычисления раскрытия трещины при повторном нагружении можно получить формулу

$$\frac{\pi E\breve{u}_2\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}{4\Delta Yl}=\Delta^{-1}\sqrt{\Delta''^{-2}-1}\ln\frac{\cos^2(\hat\beta/2)}{\cos\hat\beta}+$$

$$+\frac{F(\gamma,s)}{K(s)}\int_0^1\sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega_2^2,s)dq-\frac{F^2(\gamma,s)}{\Delta^2K^2(s)}\int_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}}\Pi(\omega^2,s)dq-$$

$$-\frac{2F(\gamma,s)}{\pi\Delta^2\mathbf{K}(s)}\frac{\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{(\Delta'^{-2}-1)}\left\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-s^2)^{-1}(1-\Delta'^2)^{-1}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\right\}\left\{\int_0^1\sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}}\Pi\left(\omega^2,s\right)dq-\right.$$

$$\left.-\Delta''^{-2}\int_{\Delta''^2\Delta'^2}^1\sqrt{\frac{(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(1-q)}}\Pi(\omega_1^2,s)dq\right\}-$$

$$-\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_1^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-\frac{F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq-$$

$$-\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)}\left\{-\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega,\Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)}\left[\mathbf{K}(\Delta's)-\Pi(s^2,\Delta's)+\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-s^2)^{-1}(1-\Delta'^2)^{-1}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Delta''^{-2}\Pi(\Omega,\sigma^2,\Delta's)-(\Delta''^{-2}-\Delta'^{-2})F(\Omega,\Delta's)\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq+\right.$$

$$+\int\limits_{\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}^{1}\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^{2})(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}}\qquad[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_2^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq\Bigg\}. \qquad (54)$$

Уравнение (54) позволяет вычислить раскрытие трещины, если три безразмерных параметра локализации пластических деформаций $\Delta, \Delta', \Delta''$ определены или заданы. Тем самым может быть охарактеризовано влияние удаленной пластической зоны на трещину.

В случае, если характерный линейный размер удаленной пластической зоны сравним с длиной трещины, то на основании формул (50) и (52) и (37) находим

$$\frac{\pi E\breve{u}_2(l,0)}{4Yl}=\ln\frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos\hat{\beta}}+\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta''^{-2}-1}}\left\{\frac{C_1}{2Yl^2}F(\gamma,s)-V_1+\overline{V}_2-(1-\Sigma)(V+V_2)\right\}, \qquad (55)$$

где $V=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq$;

$$V_1=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_1^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq;$$

$$\overline{V}_2=\int\limits_{\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}^{1}H(q)\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^{2})(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_2^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq;$$

$$V_2=\int\limits_{\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}^{1}\sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^{2})(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}}[(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma,\beta_2^2,s)+(1-q)F(\gamma,s)]dq;$$

$$\frac{C_1}{2Yl^2}=\Delta''^{-2}\Delta^{-2}\overline{S}_{32}+I_{31}-(1-\Sigma)\Delta^{-2}(I_{33}+\Delta''^{-2}I_{32});$$

$$\overline{S}_{32}=\int\limits_{\Delta''^{2}\Delta'^{-2}}^{1}H(q)\sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^{2}\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^{2})}}dq;\quad 1-\Sigma=\frac{J_{11}+\Lambda_{12}}{J_{13}+J_{12}}.$$

Таким образом, если параметры локализации определены, то формула (55) позволяет вычислить раскрытие трещины при любой протяженности удаленной пластической зоны (для этого необходимо вычислить только приведенные выше квадратуры).

Асимптотический анализ величины раскрытия трещины при малой (по сравнению с длиной трещины) длине удаленной пластической зоны приводит к простой зависимости

$$\frac{\pi E}{4Yl}\Delta u_2=-\gamma[2-(4Y)^{-1}\pi\sqrt{(\Delta'^{-2}-1)^{-1}}\breve{\sigma}_{22}^{\infty}]\qquad(\Delta''^{2}\Delta'^{-2}\to 1-0)\qquad(56)$$

для дополнительного закрытия трещины при повторном нагружении.

Таким образом, возникновение нового очага пластического течения при повторном нагружении проявляется в форме дополнительного закрытия трещины, асимптотическое значение которого может быть вычислено по формуле (56).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8 . No. 2. P. 100-104.
2. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.– Л.: Гостехтеориздат, 1949. 272 с.
5. *Byrd P. F., Friedman M. D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and physicist. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. P. 68-161.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.