УДК 539.214

Т.Б. Лаврова

МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Предлагается модель описания поведения изотропного материала, приобретающего анизотропные свойства в процессе пластического деформирования. Эта модель - вариант теории течения анизотропно упрочняющихся материалов с первоначальным условием пластичности Треска. Показано, что принцип макродетерминизма приводит к ограничениям на выбор сингулярной поверхности нагружения и параметров истории. Проведено сравнение поведения материла, определяемого этой моделью, с экспериментальными данными при сложном нагружении.

В качестве начальной поверхности нагружения выберем поверхность текучести Треска

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = k \qquad (i \neq j). \tag{1}$$

Изменения этой поверхности в процессе нагружения будут определяться следующим образом. Собственные значения тензора напряжений заменим на собственные значения тензора активных напряжений Кадашевича-Новожилова [3] $S_{ij} = \sigma_{ij} - qe_{ij}^p$, а константу k - на функцию материала $k(q)$, аргумент этой функции q - параметр упрочнения, а сама функциональная зависимость определяется с помощью экспериментальных данных. Способ определения этой функции будет предложен в дальнейшем.

В результате этих изменений уравнение поверхности нагружения примет вид

$$\max\left|S_i - S_j\right| = k(q) \qquad (i \neq j). \tag{2}$$

Предположим, что приращения компонент тензора деформаций можно представить как сумму приращений компонент тензора упругих деформаций и приращений компонент тензора пластических деформаций $de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p$, а приращения компонент тензора упругих деформаций связаны с приращениями компонент тензора напряжений законом Гука. Из ассоциированного закона течения следует соосность тензоров S_{ij} и de_{ij}^p.

Будем считать, что приращение параметра упрочнения линейная однородная функция приращений компонент тензора пластических деформаций

$$dq = A_{ij}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q)de_{ij}^p. \tag{3}$$

В силу симметрии поверхности (2) в пространстве главных активных напряжений достаточно рассмотреть эволюцию в процессе нагружения её части, попадающей в область $S_1 \geq S_2 \geq S_3$ этого пространства. Поверхность (2) в рассматриваемой области кусочно-линейна, поэтому возникает необходимость различать её грани и ребра.

Уравнение грани поверхности (2), принадлежащей области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, имеет вид

$$S_1 - S_3 = k. \tag{4}$$

На этой грани соотношения ассоциированного закона течения дают возможность получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций:

$$de_{ij}^p = d\psi(l_i l_j - n_i n_j) \tag{5}$$

(здесь l_i, m_i, n_i - направляющие косинусы собственных осей тензоров S_{ij} и de_{ij}^p).

Тогда приращение параметра упрочнения на грани (4) можно вычислить следующим образом:

$$dq = Bd\psi; \qquad B = A_{ij}(l_i l_j - n_i n_j). \tag{6}$$

Формулы для компонент тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{ij} = (S_1 - S_2)(l_i l_j + n_i n_j) + S_2\delta_{ij} - kn_i n_j + qe_{ij}^p. \tag{7}$$

Система уравнений (5), (6), (7) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем грани поверхности нагружения. Функции $\psi, S_1, S_2, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды.

Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений играет роль определяющих соотношений на рассматриваемой грани

$$d\psi = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}{2q + B(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - n_i n_j))}, \quad dS_2 = d\sigma_{ij} m_i m_j - d\psi B e_{ij}^p m_i m_j ;$$

$$dS_1 = d\sigma_{ij} n_i n_j - d\psi B e_{ij}^p n_i n_j + k' B d\psi ;$$

$$dl_i = a m_i + b n_i ; \quad dm_i = -a l_i + c n_i ; \quad dn_i = -b l_i - c m_i ;$$

$$a = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi B e_{ij}^p) l_i m_j}{k + S_3 - S_2} ; \quad b = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi e_{ij}^p) l_i n_j}{k} ; \quad c = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi B e_{ij}^p) n_i m_j}{S_2 - S_3}$$

(здесь k' -производная $k(q)$ по параметру q.

Ребра поверхности нагружения (2), принадлежащие области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$,получаются при выполнении условий $S_2 = S_3$ или $S_1 = S_2$.

При $S_2 = S_3$ уравнение ребра имеет вид

$$\begin{cases} S_1 - S_3 = k ; \\ S_1 - S_2 = k. \end{cases} \tag{8}$$

На этом ребре с помощью ассоциированного закона течения можно получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций

$$de_{ij}^p = d\psi_1 (l_i l_j - n_i n_j) + d\psi_2 (l_i l_j - m_i m_j) . \tag{9}$$

Для приращения параметра упрочнения на ребре (8) имеем:

$$dq = B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2 , \tag{10}$$

где

$$B_1 = A_{ij}(l_i l_j - n_i n_j) ; \tag{11}$$

$$B_2 = A_{ij}(l_i l_j - m_i m_j) . \tag{12}$$

Компоненты тензора напряжений на ребре (8) выражаются через собственные значения тензора активных напряжений и направляющие косинусы его главных осей следующим образом:

$$\sigma_{ij} = S_1 \delta_{ij} - k(\delta_{ij} - l_i l_j) + q e_{ij}^p . \tag{13}$$

Система уравнений (9), (10), (13) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (17) поверхности нагружения. Функции $\psi_1, \psi_2, S_1, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды. Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений на рассматриваемом ребре задается формулами

$$d\psi_1 = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}{2q + B_1(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - n_i n_j)} ; \tag{14}$$

$$d\psi_2 = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - m_i m_j)}{2q + B_2(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - m_i m_j))} ; \tag{15}$$

$$dS_1 = \frac{1}{3}(d\sigma_{ij}\delta_{ij} + 2k'(B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2)) ; \tag{16}$$

$$a = \frac{(d\sigma_{ij} - e_{ij}^p(B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2))l_i m_j}{k}; \tag{17}$$

$$b = \frac{(d\sigma_{ij} - e_{ij}^p(B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2))l_i n_j}{k}. \tag{18}$$

При $S_1 = S_2$ уравнение ребра имеет вид

$$\begin{cases} S_1 - S_3 = k; \\ S_2 - S_3 = k. \end{cases} \tag{19}$$

На этом ребре с помощью ассоциированного закона течения можно получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций:

$$de_{ij}^p = d\psi_1(l_i l_j - n_i n_j) + d\psi_2(m_i m_j - n_i n_j). \tag{20}$$

Приращение параметра упрочнения на ребре (19) можно вычислить следующим образом:

$$dq = B_3 d\psi_1 + B_4 d\psi_2, \tag{21}$$

где

$$B_3 = A_{ij}(l_i l_j - n_i n_j); \tag{22}$$

$$B_4 = A_{ij}(m_i m_j - n_i n_j). \tag{23}$$

Компоненты тензора напряжений на ребре (19) выражаются через собственные значения тензора активных напряжений и направляющие косинусы его главных осей следующим образом:

$$\sigma_{ij} = S_3\delta_{ij} + k\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) + qe_{ij}^p. \tag{24}$$

Система уравнений (20), (21), (24) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (19) поверхности нагружения. Функции $\psi_1, \psi_2, S_3, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды.

Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений на рассматриваемом ребре можно получить из соотношений (14)-(18), если в них подставить B_3 вместо B_1, B_4 вместо B_2; в (16) S_1 заменить на S_3, k на $-k$; в (15) и (17) - l_i на m_i, m_i на n_i; в (17) - a на c.

При напряженных состояниях, соответствующих ребрам поверхности нагружения, можно считать, что поворот собственных осей тензора активных напряжений происходит следующим образом: на ребре (8) поворот вектора l_i определяется соотношениями (17) и (18), а векторы m_i и n_i поворачиваются вместе с ним как жесткое целое. Аналогичным образом на ребре (20) определяется поворот вектора n_i, а векторы m_i и l_i поворачиваются вместе с ним как жесткое целое.

Уравнения, определяющие поведение среды, для напряженных состояний, которые не принадлежат области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, можно получить из приведенных выше круговой перестановкой индексов 1, 2, 3 у собственных значений тензора активных напряжений и соответствующей перестановкой собственных векторов l_i, m_i, n_i этого же тензора.

Для того чтобы завершить построение определяющих соотношений, необходимо конкретизировать определяющие приращения параметра истории свертки B, B_1, B_2, B_3, B_4 в формулах (6), (11), (12),(22) и (23).

В общем виде эти свертки могут быть определены с помощью принципа макродетерминизма [1] следующим образом.

Пусть ребро поверхности нагружения задано как пересечение граней

$$\begin{cases} f^{(1)}\left(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q\right) = 0; \\ f^{(2)}\left(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q\right) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Ассоциированный закон течения на этом ребре имеет вид

$$de^p_{ij} = d\psi_1 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{26}$$

Условия непрерывности изменения поверхности нагружения, тот факт, что точка нагружения принадлежит ребру (25), и ассоциированный закон течения (26) позволяют получить следующую связь между приращениями компонент тензора напряжений, параметрами $d\psi_i$ и $d\psi_2$, определяющими приращения компонент тензора пластических деформаций:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial e^p_{ij}} + \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial q} A_{ij} \right) \left(d\psi_1 \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0; \\ \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial e^p_{ij}} + \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial q} A_{ij} \right) \left(d\psi_1 \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Рассмотрим два пути нагружения в пространстве напряжений, выходящих из ребра (25) поверхности нагружения. Один из них такой, что вдоль него $\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$, а $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \alpha(t) > 0$, т.е. он соответствует грани $f^{(2)}(\sigma_{ij}, e^p_{ij}, q) = 0$. Вдоль другого пути $\dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \varepsilon(t) > 0$, а $\dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \alpha(t) > 0$. Пусть $\varepsilon(t)$ принимает сколь угодно малые положительные значения. Согласно принципу макродетерминизма сколь угодно близким путям нагружения должны соответствовать сколь угодно близкие пути деформирования. Таким образом, если $\varepsilon(t) \to 0$, то $d\psi_1$, полученное при решении системы (27), тоже должно стремиться к нулю, а $d\psi_2$ должно быть положительным. Для того чтобы выполнялись эти условия, необходимо иметь

$$\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial e^p_{ij}} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial q} A_{ij} \right) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \tag{28}$$

Повторяя аналогичные рассуждения для второй из образующих ребро граней, получим

$$\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial e^p_{ij}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial q} A_{ij} \right) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \tag{29}$$

Для ребра (8) поверхности (2) соотношения (28) и (29) приобретают вид

$$q + (k' + e^p_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)) A_{st}(l_s l_t - m_s m_t) = 0;$$
$$q + (k' + e^p_{ij}(l_i l_j - m_i m_j)) A_{st}(l_s l_t - n_s n_t) = 0.$$

С их помощью можно получить вид сверток B_1 и B_2:

$$B_1 = -\frac{q}{k' + e^p_{ij}(l_i l_j - m_i m_j)}; \quad B_2 = -\frac{q}{k' + e^p_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}.$$

С помощью аналогичной процедуры можно получить свертки B_3 и B_4 для ребра (19)

$$B_3 = -\frac{q}{k' + e^p_{ij}(m_i m_j - n_i n_j)}; \; B_4 = -\frac{q}{k' + e^p_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}.$$

Параметр истории q при переходе с грани поверхности нагружения на ребро должен изменяться непрерывно. Это условие позволяет получить следующий вид для свертки B:

$$B = -\frac{q}{k}\left(\frac{S_1 - S_2}{k' + e^p_{ij}(l_i l_j - m_i m_j)} + \frac{S_2 - S_3}{k' + e^p_{ij}(m_i m_j - n_i n_j)} \right).$$

Функция материала $k(q)$ может быть определена по данным эксперимента на чистое растяжение или на чистый сдвиг.

Рассмотрим процедуру определения $k(q)$ по данным эксперимента на чистое растяжение. Пусть отлична от нуля только компонента σ_{11} тензора напряжений. Тогда, исключив упругие составляющие компонент тензора деформаций, из диаграммы чистого растяжения можно получить зависимость $\sigma_{11} = f(e_{11}^p)$. В процессе чистого растяжения точка нагружения принадлежит ребру (8), соотношения (10) и (13) приобретают вид

$$f(e_{11}^p) = k + 1.5q \ \ e_{11}^p; \qquad \frac{dk}{de_{11}^p} + 1.5e_{11}^p \frac{dq}{de_{11}^p} + q = 0.$$

Решениями этой системы уравнений будут следующие зависимости $k(e_{11}^p)$ и $q(e_{11}^p)$:

$$\begin{cases} k = f(e_{11}^p) - 3 \ \ f'(e_{11}^p)\,; \\ q = 2 \ \ f'(e_{11}^p). \end{cases}$$

Исключая из этих зависимостей e_{11}^p, получим функцию материала $k(q)$, её вид зависит от аппроксимации начальной кривой $\sigma_{11} = f(e_{11}^p)$. В данной работе были использованы экспоненциальная, логарифмическая, степенная и линейная функции аппроксимации, их выбор продиктован свойствами кривой чистого растяжения. Эти аппроксимирующие функции и соответствующие им функции $k(q)$ представлены ниже:

$$f(e_{11}^p) = Ae_{11}^p + B + C\exp(De_{11}^p), \qquad k(q) = \alpha\ln(\mathrm{q} - 2\mathrm{A}) + \beta\mathrm{q} + \gamma;$$

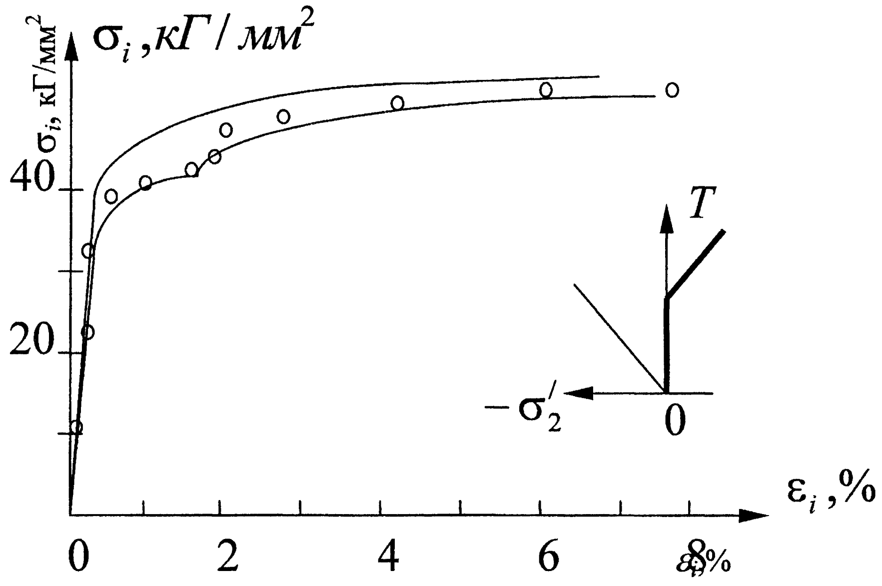
$$f(e_{11}^p) = A\ln(e_{11}^p + 1) + B, \qquad k(q) = A\ln q + 1.5q + \beta;$$

$$f(e_{11}^p) = A\sqrt{e_{11}^p + C} + B, \qquad k(q) = \frac{A^2}{q} + B - 1.5q;$$

$$f(e_{11}^p) = Ae_{11}^p + B, \qquad q = 2A, \qquad k = -2A\max\left|e_i^p\right| \quad (i = 1, 2, 3).$$

В этих формулах α, β, γ -функции коэффициентов аппроксимирующей функции $f(e_{11}^p)$.

По предлагаемой теории был проведен численный эксперимент по следующим программам нагружения цилиндрических полых образцов осевой растягивающей силой и внутренним давлением: 1) пропорциональное нагружение; 2) нагружение образца осевой растягивающей силой за предел текучести до фиксированного значения, затем резкий излом траектории нагружения в пространстве главных напряжений на прямую догружения; 3)нагружение образца двухосным растяжением $\sigma_z = 2\sigma_\varphi$ до того же значения осевого напряжения, что и в случае 2), затем резкий излом с выходом на второй участок траектории, на котором параметр догружения принимал те же значения, что и в случае 2). Эта программа полностью повторяла программу натурных испытаний, проведенных на образцах из стали 12ХН3А [2]. Для определения функции материала $k(q)$ были использованы степенная и логарифмическая аппроксимации $f(e_{11}^p)$. Различие результатов численных экспериментов для этих двух видов функции $k(q)$ оказалось незначительным. Максимальное расхождение результатов численного и натурного эксперимента не превышало 12%. На рисунке представлен характерный результат численного (сплошная кривая) и натурного (точки) экспериментов, проведенных по третьей программе. Здесь использованы следующие обозначения: σ_i — интенсивность касательных напряжений; ε_i — интенсивность сдвиговых деформаций; T — максимальное касательное напряжение; $\sigma_2' = T\mu_\sigma$, где μ_σ — параметр Лоде. Верхняя кривая соответствует пропорциональному нагружению.



Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошная линия) данные неупругого деформирования стали 12ХН3А

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Клюшников В.Д.* О законах пластичности для материалов с упрочнением // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 59-63.
2. *Жигалкин В.М., Усова О.М., Шемякин Е.И.* Простое и сложное нагружение стали в условиях нормальных и низких температур // Физика прочности и пластичности : Сб.науч.тр. Л.: Наука, 1986. С. 129-141.
3. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные напряжения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78-89.