

## Теплофизика

УДК 621. 396. 677: 536. 37

**Б.В. Аверин, В.А. Кудинов, Д.В. Левин, Р.Ж. Габдушев**

### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПЛАСТИНЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛОТЫ

*Решена задача о тепловой устойчивости бесконечно протяженной пластины при ее нагреве нелинейными источниками теплоты*

При воздействии на однослойную пластину электромагнитного излучения сверхвысокой частоты (СВЧ) происходит нагрев конструкции с образованием перегретых зон, температура в которых может неограниченно возрастать, что, в свою очередь, может привести к плавлению или разрушению конструкции. Для того, чтобы этого избежать, необходимо управлять мощностью электромагнитного излучения, чтобы исключить неограниченный нагрев материала от действия внутренних источников теплоты [1].

Математическая постановка задачи при линейной зависимости удельной мощности внутреннего источника теплоты от температуры  $q_v(T) = \omega_0(1 + \beta T)$  и при граничных условиях 3-го рода на внешних поверхностях пластины имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega_0}{c\rho} (1 + \beta T); \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq h); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + \alpha_1 [T_{c1} - T(0, \tau)] = 0; \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(h, \tau)}{\partial x} - \alpha_2 [T_{c2} - T(h, \tau)] = 0, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  - удельная мощность внутреннего источника при  $T=0^\circ\text{C}$ ;  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  - коэффициент темпе-

ратуропроводности;  $T$  - температура;  $x$  - координата;  $\alpha_1, \alpha_2$  - коэффициенты теплоотдачи;  $h$  - толщина пластины;  $T_{c1}, T_{c2}$  - температуры окружающей среды;  $\beta$  - коэффициент;  $c$  - массовая теплоемкость тела;  $\rho$  - плотность.

Решение уравнения (1) будем разыскивать в виде суммы двух функций

$$T(x, \tau) = u(x) + v(x, \tau), \quad (5)$$

где  $u(x)$  - решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями (3), (4);  $v(x, \tau)$  - решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями (3), (4), т.е. при  $T_{c1}=T_{c2}=0$ .

Математическая постановка стационарной задачи теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{\omega_0 \beta}{\lambda} + \frac{\omega_0}{\lambda} = 0; \quad (6)$$

$$\lambda \frac{du(0)}{dx} + \alpha_1 [t_{c1} - u(0)] = 0; \quad (7)$$

$$\lambda \frac{du(h)}{dx} - \alpha_2 [t_{c2} - u(h)] = 0. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$u(x) = C_1 \sin rx + C_2 \cos rx - \frac{1}{\beta}, \quad (9)$$

где  $r = \sqrt{\frac{\omega_0 \beta}{\lambda}}$ ;  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (7), (8):

$$C_1 = \frac{\left(T_{c1} + \frac{1}{\beta}\right)(rh \sin rh - Bi_2 \cos rh) + Bi_2 \left(T_{c2} + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(1 + \frac{Bi_2}{Bi_1}\right) rh \cos rh + \left(Bi_2 - \frac{r^2 h^2}{Bi_1}\right) \sin rh}; \quad (10)$$

$$C_2 = \frac{\left(T_{c1} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{r^2 h^2 \sin rh}{Bi_1} - \frac{Bi_2 r \cos rh}{Bi_1}\right) + Bi_2 rh \left(T_{c2} + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(1 + \frac{Bi_2}{Bi_1}\right) rh \cos rh + \left(Bi_2 - \frac{r^2 h^2}{Bi_1}\right) \sin rh}. \quad (11)$$

Таким образом, решение стационарной задачи найдено в виде (9)–(11).

Математическая постановка нестационарной задачи записывается в виде

$$\frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 v(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega_0 \beta}{c \rho} v(x, \tau); \quad (12)$$

$$v(x, 0) = u(x) - T_0; \quad (13)$$

$$\lambda \frac{\partial v(0, h)}{\partial x} - \alpha_1 v(0, \tau) = 0; \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial v(h, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 v(h, \tau) = 0. \quad (15)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (12)–(15) разыскивается в виде произведения двух функций

$$v(x, \tau) = \varphi(\tau) \psi(x). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (12), получим следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{a\varphi(\tau)} = -k^2; \quad (17)$$

$$\psi''(x) + (k^2 + r^2)\psi(x) = 0, \quad (18)$$

где  $k^2$  – некоторая постоянная.

Решение уравнения (17), как известно, имеет вид

$$\varphi(\tau) = D \exp(-k^2 a \tau). \quad (19)$$

Граничные условия для уравнения (18) будут

$$\left. \begin{aligned} \lambda \psi'(0) - \alpha_1 \psi(0) &= 0; \\ \lambda \psi'(h) + \alpha_2 \psi(h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Интегрируя уравнение (18), получим

$$\psi_n(x) = C_n \sin \sqrt{k_n^2 + r^2} x + B_n \cos \sqrt{k_n^2 + r^2} x, \quad (21)$$

где  $C_n, B_n$  – постоянные интегрирования ( $n=1,2,3,\dots$ ), определяемые из граничных условий (20).

Формулы для их нахождения следующие:

$$\frac{B_n}{C_n} = \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{k_n^2 + r^2}; \quad (22)$$

$$\frac{B_n}{C_n} = \frac{-\frac{(\alpha_2 \sin \sqrt{k_n^2 + r^2} h)}{\lambda} + \sqrt{k_n^2 + r^2} \cos \sqrt{k_n^2 + r^2} h}{\frac{\alpha_2 \cos \sqrt{k_n^2 + r^2} h}{\lambda - \sqrt{k_n^2 + r^2} \sin \sqrt{k_n^2 + r^2} h}}. \quad (23)$$

Отсюда для определения собственных чисел  $k_n$  получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{(\mu_n^2 - Bi_1 Bi_2)}{\mu_n (Bi_1 + Bi_2)}, \quad (24)$$

где  $\mu_n = \sqrt{k_n^2 + r^2} h$ .

Собственные функции, учитывая (22), (23), находятся из (21) в виде

$$\psi_n(x) = \sin\left(\mu_n \frac{x}{h}\right) + \frac{\mu_n}{Bi_1} \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right). \quad (25)$$

Общее решение задачи (12)-(15) приводится к виду

$$v(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left( \sin \mu_n \frac{x}{h} + \frac{\mu_n}{Bi_1} \cos \mu_n \frac{x}{h} \right) \exp\left[-(\mu_n^2 - r^2 h^2) Fo\right], \quad (26)$$

где  $Fo = \frac{a\tau}{h^2}$ .

Отсюда решение задачи (1)-(4)

$$T(x, y) = u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left( \sin \mu_n \frac{x}{h} + \frac{\mu_n}{Bi_1} \cos \mu_n \frac{x}{h} \right) \exp\left[-(\mu_n^2 - r^2 h^2) Fo\right]. \quad (27)$$

Постоянные  $D_n$  находятся из начального условия

$$D_n = \frac{\int_0^h [u(x) - T_0] \psi_n(x) dx}{\int_0^h \psi_n^2(x) dx}.$$

Корни характеристического уравнения (24) образуют последовательность чисел  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ .

Отсюда следует, что если  $r^2 h^2 < \mu_1^2$ , то при  $Fo \rightarrow \infty$  все экспоненты в формуле (27) стремятся к нулю. Это означает, что в стенке установится стационарное распределение температуры, определяемое соотношением (9).

При  $r^2 h^2 > \mu_1^2$  теплота, выделяющаяся за счет диссипативных потерь, не успевает отводиться от стенки в окружающую среду, что приводит к бесконечному нарастанию температуры в стенке или к температурному взрыву. Отсюда следует, что существует верхний предел количества выделяющейся в единицу времени теплоты, превышение которого может вызвать тепловое разрушение конструкции.

Поэтому необходимо уметь прогнозировать возможные условия возникновения таких тепловых режимов с тем, чтобы при проектировании конструкций, исходя из задаваемой мощности электромагнитного излучения, подбирать соответствующие материалы, их размеры и граничные условия теплообмена.

Для однородной стенки условие ее тепловой неустойчивости, как следует из решения (27), имеет вид

$$\frac{\omega_0 \beta}{\lambda} h^2 \geq \mu_1^2.$$

Графическая зависимость первого корня характеристического уравнения от критериев  $Bi_1$  и  $Bi_2$  представлена на рис. 1.

Таким образом, критические параметры теплового процесса, при которых может возникнуть неустойчивость температурного режима однородной стенки, находящейся в теплообмене с окружающей средой, будут определяться соотношением

$$\mu_1 = h \sqrt{\frac{\omega_0 \beta}{\lambda}}.$$

Отсюда можно найти допустимую величину удельной мощности теплового источника

$$\omega_{0 \max} = \frac{\mu_1^2 \lambda}{\beta h^2},$$

превышение которой при заданных условиях теплообмена на поверхностях стенки может вызвать ее тепловое разрушение.

При прогреве диэлектрических материалов в СВЧ - поле наиболее важной является задача об установлении определенного соотношения между мощностью (плотностью) СВЧ излучения и параметрами диэлектрической стенки, которое имеет вид

$$\omega_{0 \max} = \frac{2\pi \varepsilon_2'' p_{z \max}}{h \lambda_{\text{эл}} \cos \theta_0} \int_0^h \frac{|\dot{E}(x)|^2}{|A_1|^2} dx, \quad (28)$$

где  $p_{z \max}$  - максимальная плотность излучения электромагнитного поля;  $\lambda_{\text{эл}}$  - длина волны электромагнитного поля;  $\theta_0$  - угол сканирования;  $\varepsilon_2'' = \varepsilon_2 \operatorname{tg} \delta$ ;  $\varepsilon_2$  - относительная диэлектрическая проницаемость материала стенки;  $\operatorname{tg} \delta$  - тангенс угла диэлектрических потерь материала;  $\dot{E}(x)$  - электрическая комплексная составляющая электрического поля;  $A_1$  - комплексная амплитуда падающей электромагнитной волны.

Выражая из соотношения (28)  $p_{z \max}$ , получим

$$p_{z \max} = \frac{\mu^2 \lambda}{\beta h R_{\text{ТП}}}, \quad (29)$$

где  $R_{\text{ТП}}$  - интегральный коэффициент тепловых потерь,  $R_{\text{ТП}} = \frac{2\pi \varepsilon_2''}{\lambda_{\text{эл}} \cos \theta_0} \int_0^h \frac{|\dot{E}(x)|^2}{|A_1|^2} dx$ .

Рассмотрим два частных случая, которые могут иметь место на поверхности диэлектрической стенки: 1)  $Bi_1=0$ ;  $Bi_2 \rightarrow \infty$ ; 2)  $Bi_1 \rightarrow \infty$ ;  $Bi_2 \rightarrow \infty$ .

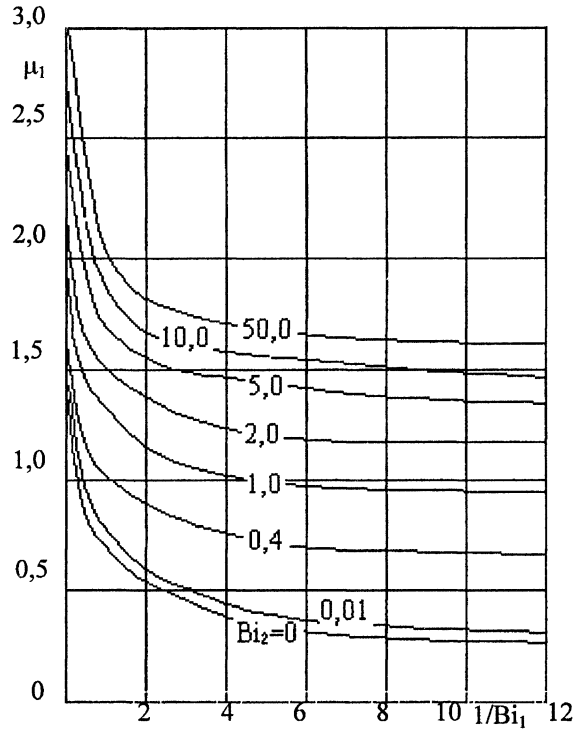
В первом случае формула (28) будет  $p_{z \max} = \frac{\pi^2 \lambda}{4\beta h R_{\text{ТП}}}$ .

Во втором -

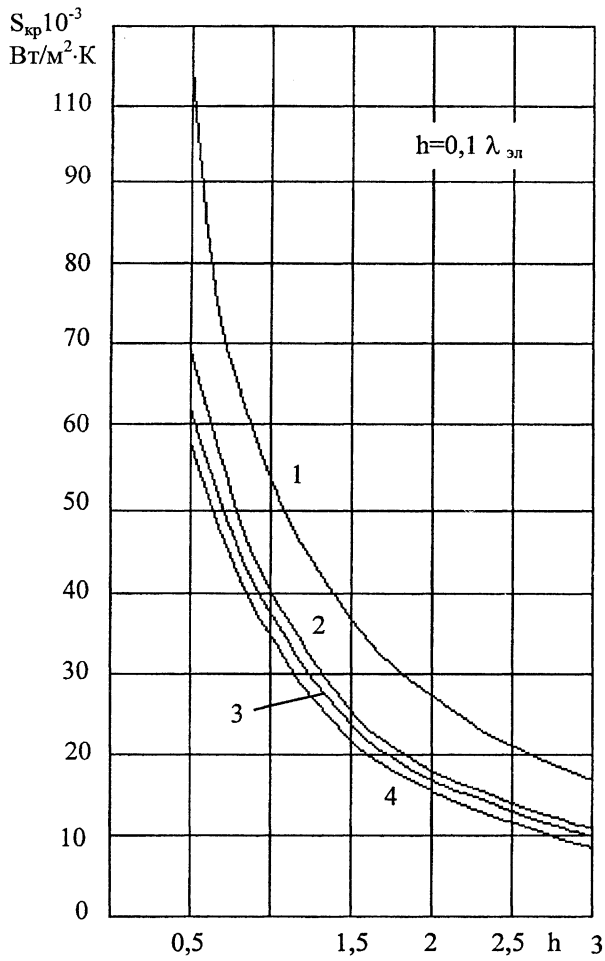
$$p_{z \max} = \frac{\pi^2 \lambda}{\beta h R_{\text{ТП}}}. \quad (30)$$

Используя формулу (30), на рис. 2 и 3 построим зависимости критического значения

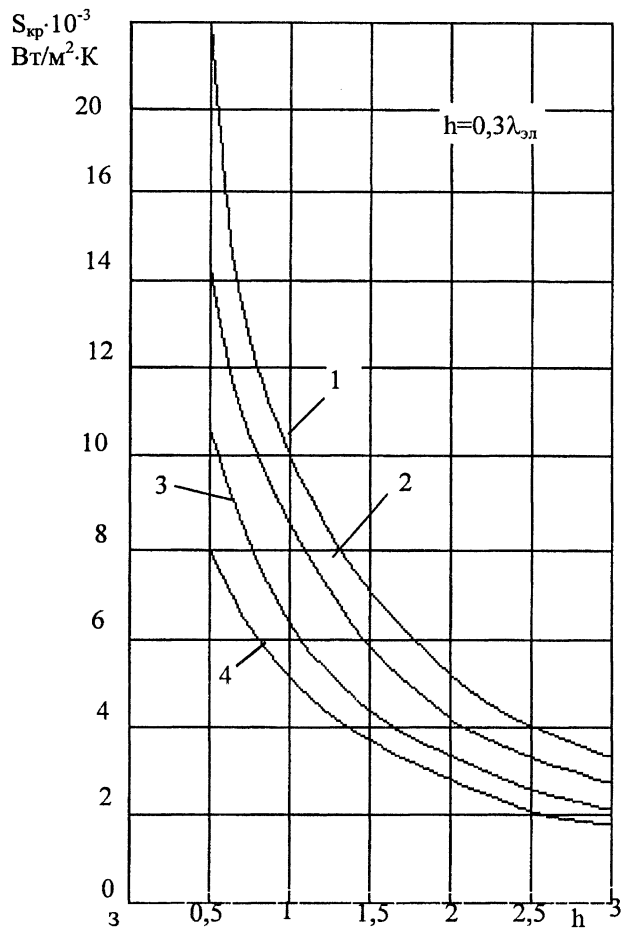
$S_{\text{кр}} = p_{z \max} \beta$  от приведенных толщин пластины  $\left( \frac{h}{\lambda_{\text{эл}}} = 0,1, \frac{h}{\lambda_{\text{эл}}} = 0,3 \right)$ , выполненной из



Р и с. 1. Критические кривые, отделяющие дозрывную область от области теплового взрыва в однослойном изделии



Р и с. 2. Зависимость критического значения плотности потока СВЧ мощности  $S_{кр} = P_{z \max} \beta$  от толщины пластины при различных углах падения волны: 1-0°, 2-40°, 3-70°, 4-80°



Р и с. 3. Зависимость критического значения плотности потока СВЧ мощности  $S_{кр} = P_{z \max} \beta$  от толщины пластины при различных углах падения волны: 1-0°, 2-40°, 3-60°, 4-70°

стеклотекстолита марки СК-9ХК. Построенные графические зависимости позволяют выделить область таких значений СВЧ мощности, а также размеров пластины, зависящих от длины электромагнитного излучения, при которых неограниченный нагрев пластины неизбежен.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айзен А.М., Редчиц И.С. Расчет стационарной нелинейной теплопроводности через многослойные стенки с источниками тепла // Теплофизика и теплотехника. 1974. Вып. 27. С 133-138.