

Математическая теория управления и оптимизации

УДК 678.5

К.А. Кубышкин, А.П. Амосов, А.М. Кишлякин

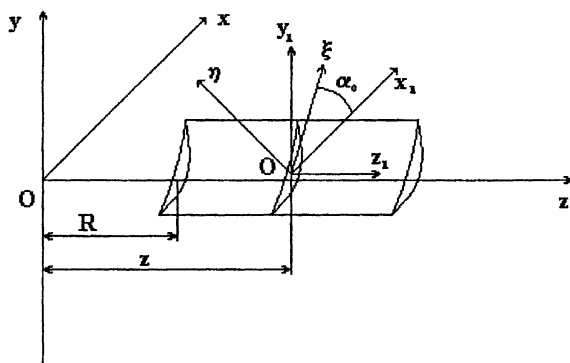
ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ ЛОПАТОК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предложен метод определения оптимальной структуры армирования консольно закрепленных лопаток газотурбинных двигателей, изготовленных из волокнистых композиционных материалов. Показана высокая работоспособность лопаток с рассчитанными структурами.

При проектировании лопаток ГТД из композиционных материалов одной из основных задач является выбор структуры армирования, обеспечивающей более полную реализацию свойств материала. Информация относительно выбора схем армирования слоистых лопаток в литературе встречается мало и в основном ограничивается рекомендациями. Предлагается математический метод определения оптимальной структуры армирования лопаток, основанный на методе Ньютона-Канторовича (обобщение известного метода касательных), позволяющий определять оптимальную структуру армирования в зависимости от нагруженного состояния, свойств материала, из которого изготовлена лопатка, и геометрических параметров пера.

Требуется найти решение уравнения $F(x)=0$, где $x=(x_1, \dots, x_n)$, $F(x) \in R^m$. Для нахождения решения составляется последовательность значений аргумента

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n),$$



Основные системы координат

где $F'(x_0)$ – матрица Якоби отображения $F(x)$. При некоторых предположениях [1] эта последовательность сходится к решению $F(x)=0$.

Лопатка рассматривается как стержень переменного сечения с начальной (естественной) закруткой. Ось лопатки (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) является пространственной кривой, мало уклоняющейся от радиального направления. Главные оси поперечных сечений повернуты друг относительно друга (начальная закрутка), что вызвано соображениями газодинамики.

Для расчетов применим техническую теорию стержней. Основной гипотезой в этой теории следует считать гипотезу плоских сечений, в соответствии с которой точки поперечного сечения стержня после деформации лежат в одной плоскости. Если размеры поперечного сечения существенно меньше длины стержня, гипотеза плоских сечений дает вполне удовлетворительную точность расчетов. По теории стержней поперечное сечение стержня в процессе деформации остается «жестким».

Основные системы координат показаны на рисунке. Ось x общей системы координат направлена по оси вращения (оси x) и проходит через центр тяжести корневого сечения лопатки. Ось z перпендикулярна оси вращения и проходит через центр тяжести корневого сечения лопатки. Ось y образует с осями x и z правую систему координат. Используется местная система

координат x_1, y_1, z_1 . Начало местной системы координат (точка O_1) помещается в центр тяжести поперечного сечения. Оси x_1, y_1 параллельны осям x, y соответственно и лежат в плоскости поперечного сечения. Координаты x, y, z называются неподвижными, рассматриваются также подвижные (связанные с текущим сечением) оси координат ξ, η, ζ , направляющие косинусы которых принимают по таблице. Координаты центра тяжести сечения обозначаются $x(z), y(z)$. Основные внешние нагрузки, приложенные к лопатке, центробежные и газодинамические силы [2].

Относительная закрученность стержня в данном сечении $\tau_0 = d\alpha_0/dz$.
Стержень равномерно закручен, если $\tau_0 = \text{const}$. Тогда

$$\alpha_0(z) = \alpha_0(0) + \tau_0 z, \quad \tau_0 = \alpha_0/l,$$

где α_0 – изменение угла установки сечений на длине l .

Одни особенности поведения закрученных стержней зависят от взаимного положения сечений (т.е. от абсолютного угла закрученности α_0), другие – от взаимного наклона винтовых линий в данном сечении (т.е. от относительного угла закрученности τ_0 и конфигурации сечения).

Перемещения точек оси стержня U_ξ, V_η, W_ζ , углы поворота $\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta$, а также компоненты вектора общей деформации (кривизны κ_ξ, κ_η и кручение τ_ζ) в системе координат ξ, η, ζ связаны соответственно с перемещениями U, V, W , углами поворота $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ и компонентами вектора общей деформации (кривизнами κ_x, κ_y и кручением τ_z) в системе координат x, y, z соотношениями таблицы, в частности:

$$\kappa_\xi = \kappa_x \cos \alpha_0 + \kappa_y \sin \alpha_0; \quad \kappa_\eta = -\kappa_x \sin \alpha_0 + \kappa_y \cos \alpha_0; \quad \tau_\zeta = \tau_z = \tau; \quad \theta_\zeta = \theta_z = \theta; \quad W_\zeta = W_z = W.$$

При малых прогибах $\kappa_x = -V''$, $\kappa_y = U''$.

Кручение $\tau = \theta'$, удлинение оси $\varepsilon = W'$, где знаком “ ’ ” обозначены производные по координате z .

Направляющие косинусы осей координат

Оси координат	X	Y	Z
ξ	$\text{Cos } \alpha_0$	$\text{Sin } \alpha_0$	0
η	$-\text{Sin } \alpha_0$	$\text{Cos } \alpha_0$	0
ζ	0	0	1

Компоненты главного вектора Q_ξ, Q_η, Q_ζ и главного момента M_ξ, M_η, M_ζ внутренних сил в системе ξ, η, ζ связаны соответственно с компонентами Q_x, Q_y, Q_z и M_x, M_y, M_z в системе координат x, y, z также соотношениями таблицы, в частности:

$$M_\xi = M_x \cos \alpha_0 + M_y \sin \alpha_0; \quad M_\eta = -M_x \sin \alpha_0 + M_y \cos \alpha_0; \quad M_\zeta = M_z; \quad Q_\zeta = Q_z.$$

Уравнения равновесия элемента стержня в системе координат x, y, z после исключения сил Q_x, Q_y имеют обычный вид

$$Q_z' + q_z = 0; \quad M_x'' + q_x + m_x' = 0; \quad M_y'' - q_x + m_y' = 0; \quad M_z' + m_z = 0,$$

где q_x, q_y, q_z и m_x, m_y, m_z – соответственно компоненты распределенной нагрузки и распределенного момента в направлении осей x, y, z [3]. Сила, действующая на элемент лопатки, представляет собой сумму центробежной и газодинамической составляющей

$$\bar{q} = \bar{q}^u + \bar{q}^0$$

Центробежная сила, действующая на элемент объема, имеет следующие составляющие по осям $q_x^u = 0$; $q_y^u = 0$; $q_z^u = \rho \omega^2 z F$, где ρ – плотность материала лопатки; ω – угловая скорость.

Газодинамические нагрузки создают распределенные усилия q_x^0 и q_y^0 , которые считаются положительными, если направлены вдоль осей x и y соответственно.

Необходимо определить газодинамические усилия, действующие на элемент лопатки, если известны поля скоростей и давлений. Предполагается, что частицы газа движутся по цилиндрическим поверхностям. Рассматривается цилиндрический слой, и выделяется струя газа, обтекающая одну лопатку. Составляющие абсолютной скорости газа на выходе обозначаются: C_{1x} – в окружном направлении, C_{1y} – в осевом направлении. Для определения усилий на элемент лопатки применяется теорема об изменении количества движения для движущейся среды. Масса газа, протекающая через рассматриваемый участок цилиндрического слоя в единицу времени,

$$dm = \frac{2\pi z dz}{N} \rho_1 C_{1x} = \frac{2\pi z dz}{N} \rho_2 C_{2x},$$

где N – число лопаток; ρ_1 и ρ_2 – плотность газа на входе и выходе.

Изменение количества движения в окружном направлении $dm(C_{2y} - C_{1y}) = dN_y$, где dN_y – равнодействующая усилий, приложенных к граничным поверхностям участка цилиндрического слоя. Но $dN_y = -dP_y$, где dP_y – сила, с которой газ действует в окружном направлении на элемент лопатки Б

$$dP_y = -\frac{2\pi z dz}{N} \rho_1 C_{1x} (C_{2y} - C_{1y}) = -\frac{2\pi z dz}{N} \rho_2 C_{2x} (C_{2y} - C_{1x}).$$

Положительное направление dP_y совпадает с направлением окружной скорости. Рассмотрение изменения количества движения в осевом направлении дает:

$$dm(C_{2x} - C_{1x}) = (P_1 - P_2) \frac{2\pi z dz}{N} + dN_x,$$

где P_1 и P_2 – давление перед и за рабочим колесом.

Усилие, действующее со стороны газа на лопатку $dP_x = -dN_x$, и поэтому

$$dP_x = (P_1 - P_2) \frac{2\pi z dz}{N} - \frac{2\pi z dz}{N} \rho_1 C_{1x} (C_{2x} - C_{1x}).$$

Положительное направление dP_x соответствует направлению вдоль потока. Так как обычно значения C_{1x} и C_{2x} отличаются незначительно, то усилие направлено со стороны большего давления к стороне меньшего давления, и вторым членом в выражении dP_x можно пренебречь. Окончательно усилия, приходящиеся на единицу длины лопаток, можно представить в следующем виде [2]:

$$q_x^0 = \frac{dP_x}{dz} = \frac{2\pi z}{N} (P_1 - P_2); \quad q_y^0 = \frac{dP_y}{dz} = -\frac{2\pi z}{N} \rho_1 C_{1x} (C_{2y} - C_{1y}); \quad q_z^0 = 0.$$

Определение главного момента центробежных сил, приложенных к элементу лопатки, дает $dm^u_x = 0$; $dm^u_y = 0$; $dm^u_z = \rho \omega^2 J_{x,y} dz$, где $J_{x,y}$ – центробежный момент инерции сечения, ρ – плотность материала лопатки.

В дальнейшем крутящим моментом относительно оси z от газодинамических сил пренебрегается, поэтому $m_z^0 = 0$. Окончательно получаем

$$m_z = m_z^u = \rho \omega^2 J_{x,y}.$$

Пренебрегая моментами m_x и m_y , получим систему уравнений равновесия в виде

$$Q_z' + q_z = 0; \quad M_x'' + q_y = 0; \quad M_y'' - q_x = 0; \quad M_z' + m_z = 0,$$

интегрирование которой с учетом граничных условий дает

$$M_x = - \int_z^{R_0+h} \left(\int_{z_2}^{R_0+h} q_y dz_1 \right) dz_2; \quad M_y = \int_z^{R_0+h} \left(\int_{z_2}^{R_0+h} q_x(z_1) dz_1 \right) dz_2;$$

$$M_z = \int_z^{R_0+h} \rho \omega^2 J_{x,y}(z_1) dz_1; \quad Q_z = \omega^2 \int_z^{R_0+h} \rho z_1 F(z_1) dz_1,$$

где h – размер лопатки.

Параметры деформации определяются из условия равновесия отсеченной части лопатки и в итоге сводятся к решению системы линейных уравнений

$$(Q_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta) = H_{ij}(\varepsilon, \kappa_\xi, \kappa_\eta, \tau),$$

где H_{ij} – матрица жесткости, вообще говоря, зависящая от относительной закрученности стержня.

Для случая слоистой композитной лопатки матрица коэффициентов жесткости в сечении имеет вид суммы

$$H = \sum_{i=1}^n E^{(i)} T^{(i)},$$

где n – число слоев; $E^{(i)}$ – модуль Юнга i – того слоя; $T^{(i)}$ – матрица размерности 4×4 .

В матрице $T^{(i)}$ компоненты определяются так же, как и в матрице жесткости при условии постоянства $E^{(i)}$ в пределах i -того слоя.

Если лопатка составлена из слоев армированного волокнами композита, в котором волокна расположены под углом γ_i , то для малых углов γ_i модуль Юнга определяется соотношением $E^{(i)} = E \cos \gamma_i$, где E – модуль Юнга композита вдоль волокон.

Применим метод Ньютона-Канторовича для нахождения точек минимума потенциальной энергии. Потенциальная энергия в точке (ξ, η, ζ) определена как сумма вида

$$\Pi(\xi, \eta, \zeta) = Q_\zeta \varepsilon + M_\xi \kappa_\xi + M_\eta \kappa_\eta + M_\zeta \tau.$$

Потенциальная энергия $\Pi = \Pi(z_0)$ зависит от углов армировки, которые входят в матрицу жесткости $H_{i,j}$, а следовательно, и в $\varepsilon, \kappa_\xi, \kappa_\eta, \tau$.

Задача заключается в выписывании последовательности для минимизации $\Pi = \Pi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – углы армирования по слоям лопатки. В точке минимума потенциальной энергии имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_1} = 0 \dots \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_n} = 0,$$

которая решается по методу Ньютона-Канторовича.

Соответствующая итерационная последовательность имеет вид $x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n)$, где x_0 – начальное значение углов армирования, $F(x)$ – столбец $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_1} \dots \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_n} \right)^T$; $F'(x_0)$ – матрица

из частных производных $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}$.

Таким образом, для реализации метода необходимо вычислить частные производные

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2}.$$

Вычисления удобнее производить в матричной форме. Обозначим $M = (Q_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta) = (m_1, m_2, m_3, m_4)$. Тогда $\Pi = (M, H^{-1}M)$. Запись в скобках означает скалярное произведение. Обозначим $H^{-1} = (g_{ij})$. Тогда потенциальная энергия определяется по формуле

$$\Pi = (M, H^{-1}M) = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij}(m_i, m_j).$$

Составим матрицу $\Phi = ((m_i, m_j))$. Матрица Φ имеет размер 4×4 . Предыдущее соотношение может быть переписано в следующем виде: $\Pi = \text{Tr}(H^{-1}\Phi)$, где $\text{Tr}(A)$ – след матрицы A (сумма диагональных элементов).

Вычисления приводят к следующим формулам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_i} = E \sin \gamma_i (M, H^{-1} T^{(i)} H^{-1} M) = E \sin \gamma_i \text{Tr}(H^{-1} T^{(i)} H^{-1} \Phi);$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = E^2 \sin \gamma_i \sin \gamma_j \text{Tr}(H^{-1} T^{(j)} H^{-1} T^{(i)} H^{-1} \Phi + H^{-1} T^{(i)} H^{-1} T^{(j)} H^{-1} \Phi), \quad i \neq j;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_i^2} = -E \cos \gamma_i \text{Tr}(H^{-1} T^{(i)} H^{-1} \Phi) + 2E^2 \sin^2 \gamma_i \text{Tr}(H^{-1} T^{(i)} H^{-1} T^{(i)} H^{-1} \Phi).$$

Последовательность Ньютона-Канторовича имеет вид

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{(n+1)} \\ \dots \\ \gamma_k^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(n)} \\ \dots \\ \gamma_k^{(n)} \end{pmatrix} - E \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_k} \end{pmatrix}.$$

Согласно изложенной методике, по начальному значению углов армирования $\{\gamma_i^0\}$ определяются углы в m -ном приближении, соответствующие минимальным значениям потенциальной энергии.

В качестве примера в работе приведен расчет оптимальной структуры направляющей лопатки компрессора (изделие ПС-90А) из стеклоуглепластика.

Изготовлены образцы – имитаторы с тремя структурами армирования, в том числе с рассчитанной структурой. Вибрационные испытания образцов показали более высокую работоспособность рассчитанной структуры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
2. Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей / Под ред. И.А. Биргера, Н.И. Котерова. М.: Машиностроение, 1984.
3. Шор Б.Ф. Естественно закрученные стержни / Под ред. И.А. Биргера, Я. Г. Аношко. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. М.: Машиностроение, 1968.